文章编号: 1000_0887(2005) 01_0025_07

细长体截面绕流中的一种临界状态*

李国辉, 　邓学蓥

(北京航空航天大学 流体力学研究所, 北京, 100083)

(我刊编委 邓学蓥来稿)

摘要: 应用拓扑分析的方法研究了细长体截面绕流拓扑结构的演变过程· 指出随着细长体背涡的发展, 导致截面流场的拓扑结构发生变化, 会出现一种临界流动状态· 在这种临界流态下, 流场中会出现一种高阶奇点· 这种高阶奇点的指数为- 3/2· 这种高阶奇点是结构不稳定的, 稍有扰动就会产生分叉, 使流场的拓扑结构发生变化·

关 键 词: 细长体; 高阶奇点; 分叉; 结构稳定性

中图分类号: V211.1 　　文献标识码: A

引　　言

现代高性能战斗机为了获得良好的飞行机动性和敏捷性, 往往要求在很大的迎角下飞行· 而在大迎角下, 机身前部会产生非对称背涡, 从而诱导出很大的侧向力, 甚至达到法向力的 1.5 倍· 导弹在大迎角飞行中, 也存在着同样的现象· 机身前体和导弹弹体均为旋成体外形, 因此研究旋成体外形大迎角下的非对称背涡的形成机理, 具有十分重要的实用价值·

自 1951 年 Allen 和 Perkins 在实验中发现旋成体在大迎角零侧滑下出现非对称流动现象以来[1], 很多人进行了这方面的研究, 然而由于流动现象和影响因素的复杂性, 非对称背涡的形成机理至今还未得到很好的理解和一致的看法· 为了详尽地了解迎角从 0°~ 90°细长旋成体绕流的各种流场特性, 从上世纪五十年代起, 人们做了大量的测力、测压和各种流谱观察及流动显示实验, 其目的在于弄清楚各种攻角下的基本流态的划分· 在这方面 Nielsen[2]、Ericsson[3]、Chapman[4] 等人做了大量的工作· 人们发现其绕流流场随迎角及轴向位置的变化将依次呈现附着流动状态、定常对称背涡状态、定常非对称背涡状态和非定常涡脱落状态·

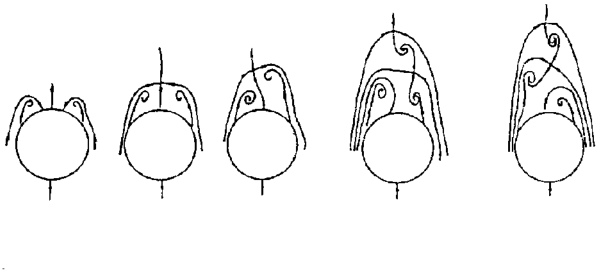
本文应用拓扑分析的方法研究细长体截面绕流拓扑结构的演变过程, 并主要分析在这一演变过程中会出现的一种临界流动状态及其特性·

1　临界流动状态

随着迎角的变化, 截面绕流的拓扑结构要发生变化· 不同迎角下细长体截面绕流拓扑结

* 收稿日期: 2003_08_10; 修订日期: 2004_08_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172017); 航空基础科学基金资助项目(02A51048)
作者简介: 李国辉(1966—), 男, 湖南永兴人, 副教授, 博士(E_mail: ghleebh0368@sina.com.cn);
邓学蓥(联系人. Tel: + 86_10_82317524; Fax: + 86_10_62566653; E_mail: dengxueying@vip.sina.com).

构图中, 比较有代表性的是 Lowson 和 Ponton 给出的图形[5], 见图 1•



(a) (b) (c) (d) (e)

图 1 不同迎角下旋成体绕流的截面拓扑结构图

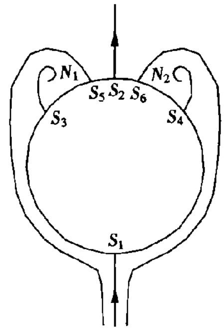


图 2 稳定对称流动状态

从 0°迎角开始, 随着迎角的增加, 一开始细长体的截面绕流为对称的附着流态, 没有附面层分离• 当迎角增大到一定程度, 由于细长体背部逆压的作用, 在物面上开始出现气流分离, 并形成空间的集中涡• 一开始集中涡比较小, 其结构如图 1(a) 所示• 为了详细说明这一流态的特点, 在图 2 中标出了流场中的各个奇点• 其中 S_2、S_3、S_4 代表的是物面上的分离线, S_1、S_5、S_6 代表的是物面上的再附线, N_1、N_2 代表的是空间集中涡, 故在截面流场中, S_2、S_3、S_4 为分离型鞍点, S_1、S_5、S_6 为再附型鞍点, N_1、N_2 为空间螺旋点•

随着迎角的增大, 由于沿旋成体轴向的速度 $V_t = V \cdot \cos\alpha$ 逐渐减小, 而垂直于轴向的横向速度 $V_n = V \cdot \sin\alpha$ 逐渐增大, 使得两个集中涡越卷越大, 占据的空间也逐渐增大, 必然迫使两侧的再附线向中间移动, 从而迫使 S_5, S_6 两点逐渐向 S_2 点靠拢• 当 S_5、S_6 两点与 S_2 点重合时, 就形成了一个新的奇点 O, 此时的流场拓扑结构就如图 3 所示•

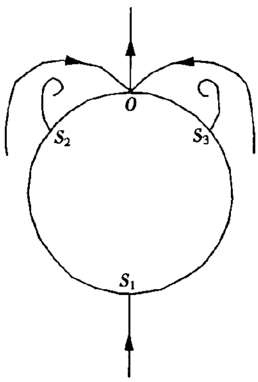


图 3 临界流动状态

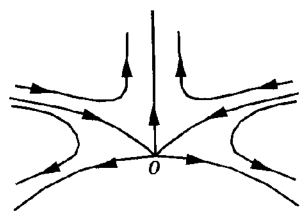


图 4 奇点 O 附近的轨线分布

此时的流动状态是介于流场结构从图 1(a) 到图 1(b) 的变化过程中的一个中间状态, 其特点表现为两侧的再附型鞍点与中间的分离型鞍点重合, 这就是细长体截面绕流中的临界流动状态•

2 临界流态的高阶奇点

在临界流动状态中, 最重要的就是新形成的奇点 O• 奇点 O 附近的轨线分布如图 4 所示• 下面我们就来分析这个奇点 O 的特性, 为此需要先建立流场的方程•

2.1 建立截面流场方程

用数学方法研究细长体截面绕流, 一个最大的困难是截面流场的方程 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 难以建立• 目前建立全流场速度方程的表达式还是比较困难的, 但是建立局部流场的数学表达式还是可以的•

建立坐标系 $Oxyz$• 在旋成体的圆柱段, 坐标原点取在旋成体背部对称面轴线上任一点, z 轴沿旋成体轴线指向头部, y 轴位于对称面内, 垂直向上方向为正, x 轴垂直于Oyz 平面指向右为正•

因为无论是图 1(a)、图 1(b) 所示的流动状态, 还是图 3 所示的临界流动状态, 流动都是对称的, 故可利用流动对称条件• 设流动关于 y 轴对称, 先建立对称条件下的流动方程• 应用条件:

1) 流动对称条件:

$$\begin{cases} U(x, y, z) = - U(- x, y, z), \\ V(x, y, z) = V(- x, y, z), \\ W(x, y, z) = W(- x, y, z)• \end{cases} \tag{1}$$

2) 壁面无滑移条件:

$$U(0, 0, 0) = V(0, 0, 0) = W(0, 0, 0) = 0• \tag{2}$$

3) 不可压连续方程:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0• \tag{3}$$

将方程在原点(0, 0, 0) 处进行泰勒展开, 并应用上述条件, 最后可得方程为(三阶展开式):

$$\begin{cases} U(x, y, z) = a_1x + a_7xy + a_8xz + a_{10}x^3 + a_{15}xy^2 + a_{16}xz^2 + a_{19}xyz, \\ V(x, y, z) = b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_9yz + \\ \qquad b_{11}y^3 + b_{12}z^3 + b_{13}x^2y + b_{14}x^2z + b_{17}y^2z + b_{18}yz^2, \\ W(x, y, z) = c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_9yz + \\ \qquad c_{11}y^3 + c_{12}z^3 + c_{13}x^2y + c_{14}x^2z + c_{17}y^2z + c_{18}yz^2• \end{cases} \tag{4}$$

在 $z = 0$ 的截面上, 变为二维方程(三阶展开式):

$$\begin{cases} u(x, y) = a_1x + a_7xy + a_{10}x^3 + a_{15}xy^2, \\ v(x, y) = b_2y + b_4x^2 + b_5y^2 + b_{11}y^3 + b_{13}x^2y• \end{cases} \tag{5}$$

由前面的不可压连续方程推导出系数之间的关系:

$$a_1 + b_2 = 0• \tag{6}$$

2.2 奇点 O 的类型

由方程(5) 可知, 只要流动是对称的, 则点 $O(0, 0)$ 始终是流场中的一个奇点, 即 $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$•

根据动力学的方法, 非线性系统(5) 的奇点特性可用其线性近似系统来分析(参见文献[6] 第 106~ 110 页)• 对点 $O(0, 0)$, 原系统对应的线性近似系统为:

$$\begin{cases} u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x, \\ v(x, y) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y• \end{cases} \tag{7}$$

其系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \end{pmatrix},$$

故其特征根为:

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 .$$

我们先讨论 $(\partial u/\partial x)_0$ 和 $(\partial v/\partial y)_0$ 不为零的情形. 由前面推导出的结果(6) 式, 可知 $(\partial u/\partial x)_0$ 和 $(\partial v/\partial y)_0$ 异号, 方程有两相异的实特征根, 故在对称流动状态下点(0, 0) 始终为系统的鞍点.

当 $(\partial u/\partial x)_0 < 0$, $(\partial v/\partial y)_0 > 0$ 时, 点 O 为分离型鞍点, 代表的是物面上的分离线, 如图 1(a) 所示;

当 $(\partial u/\partial x)_0 > 0$, $(\partial v/\partial y)_0 < 0$ 时, 点 O 为再附型鞍点, 代表的是物面上的再附线, 如图 1(b) 所示.

随着迎角的增加, 截面流态由图 1(a) 变为图 1(b), 点 O 由分离型鞍点变为再附型鞍点, $(\partial u/\partial x)_0$ 由负变为正, $(\partial v/\partial y)_0$ 由正变为负. 在这个过程中, $(\partial u/\partial x)_0$ 和 $(\partial v/\partial y)_0$ 必然要经历一个同时为零的状态, 这个状态我们称为临界流动状态.

在临界流动状态,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

此时点 O 附近的流场方程为:

$$\begin{cases} u(x, y) = a_6xy + a_{10}x^3 + a_{15}xy^2, \\ v(x, y) = b_4x^2 + b_5y^2 + b_{11}y^3 + b_{13}x^2y . \end{cases} \tag{8}$$

此时线性方程组的雅可比行列式 $J = \det A = 0$, 即线性方程组的两个特征根都为零.

在微分方程的定性理论中, 将平面自治系统的孤立奇点分类如下:

若 $J = \det A \neq 0$, 即 A 没有零特征值, 则点 O 为初等奇点(如鞍点、结点、焦点或中心);

若 $J = \det A = 0$, 即 A 有零特征值, 则点 O 为高阶奇点(也称复杂奇点).

故在临界流动状态, 点 O 是一个高阶奇点.

3　高阶奇点的指数

高阶奇点附近的轨线分布往往极为复杂, 其奇点指数也各不一样. 一般来说, 如果知道高阶奇点附近的轨线分布情况, 则可应用班狄克逊(Bendixson) 公式计算其指数(参见文献[7] 第 156~ 163 页).

班狄克逊(Bendixson) 公式:

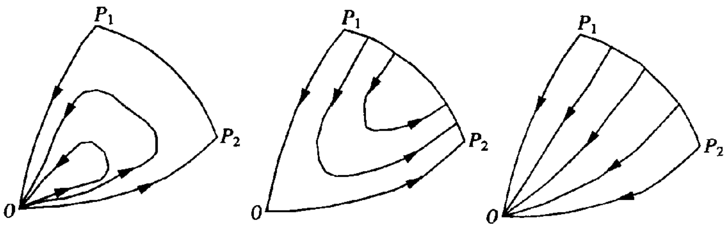
给定微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) . \end{cases} \tag{9}$$

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在原点 O 的邻域中是 x, y 的解析函数, 原点 O 是式(1) 的孤立奇点, h、e 和 p 分别是原点 O 的充分小邻域中双曲扇形、椭圆扇形和抛物扇形的个数, 又设奇点 O 的指数是 q, 则有:

$$q = 1 + \frac{e - h}{2} \tag{10}$$

关于椭圆扇形、双曲扇形和抛物扇形的定义请看图 5•



(a) 椭圆扇形 (b) 双曲扇形 (c) 抛物扇形

图 5 不同的扇形结构

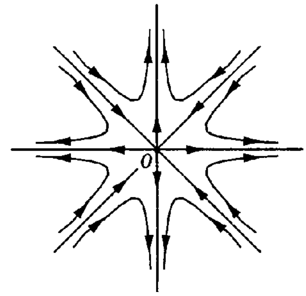


图 6 整个高阶奇点的轨线分布

现在我们来计算一下高阶奇点 O 的指数• 由于班狄克逊公式是针对完整的孤立奇点的,而图 4 中高阶奇点 O 是物面上的半个奇点,如果画出它整个奇点的轨线分布则如图 6 所示•在图 6 中,高阶奇点 O 有 8 个双曲扇形,没有椭圆扇形和抛物扇形,故其奇点指数为:

$$q = 1 + \frac{e - h}{2} = 1 + \frac{0 - 8}{2} = -3 \tag{11}$$

而图 4 中的高阶奇点是半个奇点,故其奇点指数为:

$$q = -\frac{3}{2} \tag{12}$$

现在来分析一下整个截面的奇点指数的规律• 图 3 中 S_1、S_2、S_3 为物面上的半鞍点,其奇点指数为 $-1/2$, N_1、N_2 为空间螺旋点,其奇点指数为 1,奇点 O 为物面上的半个高阶奇点,其奇点指数为 $-3/2$,故整个截面的奇点指数之和为:

$$\left(\sum N + \frac{1}{2}\sum N'\right) - \left(\sum S + \frac{1}{2}\sum S'\right) = (1 + 1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = -1 \tag{13}$$

Hunt[8] 等人分析了截面流场的拓扑规则,得出如下结论:截面上所有奇点的指数之和为 -1• 即:

$$\left(\sum N + \frac{1}{2}\sum N'\right) - \left(\sum S + \frac{1}{2}\sum S'\right) = -1 \tag{14}$$

由此可见,当截面流场中出现高阶奇点时,截面流场奇点指数之和也满足这一拓扑规律•

4 高阶奇点的稳定性

根据动力系统的结构稳定性理论,高阶奇点是结构不稳定的,任意小的适当的扰动都会使奇点的拓扑结构发生突然的变化,产生分叉• 一般来说,完整的分叉分析需要了解动力系统的全局拓扑结构• 但这是十分复杂,甚至是难以做到的• 在实际应用中,有时只需考虑在某个平衡点附近动力系统拓扑结构的变化,即只研究在它们的邻域内局部向量场的分叉• 这类分叉问题称为局部分叉• 如果分叉分析涉及向量场的大范围拓扑结构,则称为全局分叉•

下面我们就来分析一下奇点 O 附近流场的局部分叉问题•

临界流动状态下奇点 O 附近的流场方程如(8)式所示• 当迎角有微小变化时,会使流场

的速度也产生微小的变化, 相当于在原有的速度上产生一个速度增量• 将这个速度增量作为一个扰动速度加到等式(8) 中, 则有:

$$\begin{cases} u(x,y) = a_6xy + a_{10}x^3 + a_{15}xy^2 + \\ \qquad \varepsilon(c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2), \\ v(x,y) = b_4x^2 + b_5y^2 + b_{11}y^3 + b_{13}x^2y + \\ \qquad \varepsilon(d_0 + d_1x + d_2y + d_3x^2 + d_4xy + d_5y^2), \end{cases} \tag{15}$$

其中, ε 是小量•

由于流场仍然是对称的, 垂直于物面的速度仍为零, 仍然满足连续方程, 采用前面的分析方法, 同理可得:

$$\begin{cases} u(x,y) = \varepsilon c_1x + (a_6 + \varepsilon c_4)xy + a_{10}x^3 + a_{15}xy^2 + a_{22}x^3y + a_{26}xy^3, \\ v(x,y) = \varepsilon d_2y + (b_4 + \varepsilon d_3)x^2 + (b_5 + \varepsilon d_5)y^2 + b_{11}y^3 + \\ \qquad b_{13}x^2y + b_{19}x^4 + b_{20}y^4 + b_{24}x^2y^2. \end{cases} \tag{16}$$

(16) 式对应的线性近似系统为:

$$\begin{cases} u(x,y) = \varepsilon c_1x, \\ v(x,y) = \varepsilon d_2y, \end{cases} \tag{17}$$

其系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon c_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon d_2 \end{pmatrix},$$

故其特征根为: $\lambda_1 = \varepsilon c_1$, $\lambda_1 = \varepsilon d_2$•

同样由连续方程可知, 方程(17) 有两个异号实特征根, 故此时点 O 已经变为鞍点•

当迎角增加时, 两个集中涡增强, 相当于给 O 点一个向外向下的扰动速度, 此时, $\varepsilon c_1 > 0$, $\varepsilon d_2 < 0$, 点 O 变为再附型鞍点, 此时流场拓扑结构如图 1(b) 所示;

当迎角减小时, 两个集中涡减弱, 相当于给 O 点一个向内向上的扰动速度, 此时, $\varepsilon c_1 < 0$, $\varepsilon d_2 > 0$, 点 O 变为分离型鞍点, 此时流场拓扑结构如图 1(a) 所示•

由上述分析可见, 临界流动状态中的高阶奇点是拓扑结构不稳定的, 稍有扰动就会改变奇点特性, 产生分叉• 当迎角增加时, 它变为再附型鞍点; 当迎角减小时, 它变为分离型鞍点• 因此, 细长体截面绕流中的临界流动状态也是拓扑结构不稳定的, 稍有扰动, 流场的拓扑结构就会发生变化• 因此, 临界流动状态在实验中往往难以观察到, 但它确是细长体截面绕流中必然要经历的一个状态•

5　结　　论

本文应用微分方程的定性理论, 分析了细长体截面绕流中的一种临界流动状态, 得出如下结论:

1) 随着细长体背涡的发展, 导致截面流场的拓扑结构发生变化, 会出现一种临界流动状态•

2) 在这种临界流动流态下, 流场中会出现一种高阶奇点• 这种高阶奇点的指数为 $-3/2$•

3) 这种高阶奇点是结构不稳定的, 稍有扰动就会产生分叉, 使流场的拓扑结构发生变化•

致谢 本文的研究工作得到了陆启韶教授的大力帮助,并给了作者很多有益的启示,在此表示衷心的感谢•

[参 考 文 献]

[1] Allen H J, Perkins E W. Characteristcs of flow over inclined bodies of revolution[R]. NACA RMA, 50L07, 1951.

[2] Nielsen J N. Nonlinearities in missile aerodynamics[R]. AIAA Paper, 78_21, 1978.

[3] Ericsson L E. Karman vortex shedding and the effect of body motion[J]. AIAA J, 1980, **18**(8): 935—944.

[4] Keener E R, Chapman G T. Similarity in vortex asymmetric over slender bodies and wings[J]. AIAA J, 1977, **15**(9): 1370—1372.

[5] Lowson M V, Ponton A J. Symmetry breaking in vortex flows on conical bodies[J]. AIAA J, 1992, **30**(6): 1576—1583.

[6] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.

[7] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[8] Hunt J C R, Abell C J, Peterka J A, *et al*. Kinematical studies of the flows around free or surface_mounted obstacles; applying topology to flow visualization[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, **86**(1): 179—200.

A Critical Pattern of Crossflow Around a Slender

LI Guo_hui, DENG Xue_ying

(Institute of Fluid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: Topological structure of a slender crossflow was discussed with topological analysis. It is pointed that the development of slender vortices leads to the change of topological structure about cross flow, and a critical flow pattern will appear. There is a high_order singular point in this critical flow pattern. And the index of the high_order singular is $-3/2$. The topological structure of this singular point is instable, so bifurcation will occur and the topological structure of flowfield will be changed by little disturbance.

Key words: slender; high_order singular point; bifurcation; structure stability