

连通管内理想液柱振动微分方程 两种推导的比较^{*}

刘先志(山东工学院)

(1980年2月20日收到)

摘 要

对于连通管内理想液柱振动的同一问题, 本文列举了两种求解方法: 一种是迄今曾在文献中沿用已久的, 另一种是本文提出的. 曾把两个结果作了比较. 本文认为, 沿用已久的推导是不够妥当. 本文推得的振动周期可以蜕出Isaac Newton、Johann Bernoulli和Danielis Bernoulli的相应振动周期公式.

一、前 言

众所熟知, 连通管内理想液柱的振动规律在力学基础理论中是一个有趣的问题. 最早注意这个问题的Isaac Newton^[1]、Johann Bernoulli^[2]和Danielis Bernoulli^{[3][4]}. 作者也曾讨论过这个问题^{[5][7][8]}. 主要的是Newton建立的等口径铅垂直臂连通管内理想液柱振动周期规律 $T=2\pi\sqrt{L/2g}$, Johann Bernoulli的等径具倾斜角 α_1 、 α_2 直臂连通管理想液柱振动周期方程 $T=2\pi\sqrt{L/g(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)}$ 以及Danielis Bernoulli的不等径铅垂直臂微幅振动周期规则 $T_{s_{10}\rightarrow 0}=2\pi\sqrt{L F_1 F_2/g F_c(F_1+F_2)}$, 其中 s_{10} 是最大振幅, F_i 表示管径截面面积, L 是液柱折合长度, g 是重力加速度, F_c 是中间接管的截面.

关于这个问题, 也有些推导不完全符合于上面列举的这些结果, 但这种欠妥的推导却已多年印在常用的水动力学资料之中. 本文的目的就是把作者在工作中曾发现的一种推导与我们的推导作一比较讨论. 此外, 自本文的推导可以看出, 连通管内理想液柱振动规律是能比Newton和Bernoullis的更概括一些的.

二、在力学资料中沿用已久的一种推导

为了便利, 我们先把迄今曾沿用已久的一种推导抄列如下.

在两截面不等的竖桶之间连以细管及一转动活塞, 两边的水深是 h_1 和 h_2 ; 当转动活塞使两桶连通之后, 水即发生振动. 试问, 在 F_1 的一边, 水能上升多高; 并问, 当液面经过平

^{*} 本文曾在1979年11月第二届全国流体力学学术会议上宣读.

衡位置时的速度。在分析中，略去任何摩擦的作用，安排细节如图 1 所示。

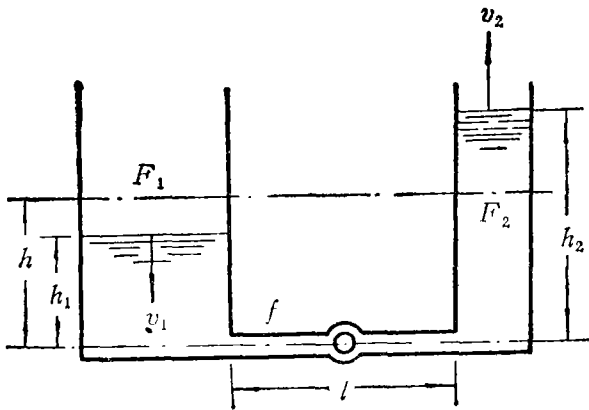


图 1 连通管的几何拟设

$m = \gamma f l / g$ ，其中 γ 代表液体的容重。在元素时间 dt 里的动能改变量自然是 $dL = M_1 v_1 dv_1 + M_2 v_2 dv_2 + m u du$ 。另外，元素功必是 $dA = \gamma (-F_1 dz_1)(z_1 + z_2)$ 。于是用缩代 $a = h + l F_1 / f (F_1 / F_2 + 1)$ ， $b = F_1 / F_2 - 1$ 并用关系 $dA = dL$ ，而从 $v_1 dv_1 = -g z_1 dz_1 / (a + b z_1)$ 解得

$$v_1^2 = -\frac{2g}{b} \left\{ \frac{a}{b} \ln(a + b z_1) - z_1 \right\} + C \quad (2.2)$$

对于初始值 $z_1 = h - h_1$ ，则 $v_1 = 0$ 。当 F_1 达到最高位置，则也必 $v_1 = 0$ ，于是自 (2.2) 式导出 $C = 2g \left\{ h - h_1 - \frac{a}{b} \ln[a + b(h - h_1)] \right\} / b$ ；从而，当液面在左臂中达到平衡位置时，可得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ga}{b^2} \ln \frac{a + b z_1}{a + b(h - h_1)} + \frac{2g}{b} (h - h_1 - z_1)} \quad (2.3)$$

由于 $v_1 dv_1 / dt = -g z_1 dz_1 / (a + b z_1) dt$ 并用 $\eta_2 = F_1 / F_2$ 和 $\lambda = \eta_2^2 - 1$ 而求得运动方程

$$\{h(1 + \eta_2) + F_1 l / f + \lambda z_1\} \dot{z}_1 + g(1 + \eta_2) z_1 = 0 \quad (2.4)$$

这是个非线性常微分方程。

自 (2.3) 式求得的

$$dt = \int dz_1 / \sqrt{\frac{2ga}{b^2} \ln \frac{a + b z_1}{a + b(h - h_1)} + \frac{2g}{b} (h - h_1 - z_1)} \quad (2.5)$$

不易求解。(2.4) 式可以用级数求解。

三、导致带速度平方项的运动方程的推导

在运动中， F_1 段里的液体部分地流入 f 段； f 段里的又部分地流进 F_2 段；这种移置会引起部分动能的改变，意即

$$dE = dE_1 + dE_2 = dM_1 \frac{v_2^2 - u^2}{2} + dM_1 \frac{u^2 - v_1^2}{2} = dM_1 \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad (3.1)$$

现在可用 $dM_1 = \gamma F_1 ds_1 / g$ ， $F_1 / F_2 = \eta_2$ ， $dE = \gamma (\eta_2^2 - 1) F_1 v_1^2 ds_1 / g$ 推得动量的变量

$$\begin{aligned} dL &= M_1 v_1 dv_1 + m u du + M_2 v_2 dv_2 + dE \\ &= \frac{\gamma}{g} F_1 (h - s_1) v_1 dv_1 + \frac{\gamma}{g} f l \frac{F_1}{f} v_1 \frac{F_1}{f} dv_1 \end{aligned}$$

$$+\frac{\gamma}{g}F_2(h+s_2)\frac{F_1}{F_2}v_1-\frac{F_1}{F_2}dv_1+\frac{\gamma}{g}(\eta_2^2-1)F_1v_1^2ds_1 \quad (3.2)$$

而功的变量是

$$dA=-\gamma F_1 ds_1(s_1+\eta_2 s_1)=-\gamma F_1 ds_1(s_1+s_2) \quad (3.3)$$

使上两式互等, 就给出

$$(L_0+\lambda s_1)\dot{s}_1+\frac{\lambda}{2}\dot{s}_1^2+g(1+\eta_2)s_1=0, \quad (\lambda=\eta_2^2-1) \quad (3.4)$$

其中 $L_0=(1+\eta_2)h+lF_1/f$. 若使 $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$, 就能自另一篇论述^[6]中的(7)式蜕化出(3.4)式. 用初始条件 $t=0, \dot{s}_1=0, s_1=s_{10}$, 就可得(3.4)式的解

$$(L_0+\lambda s_1)\dot{s}_1+g(1+\eta_2)s_1^2=g(1+\eta_2)s_{10}^2 \quad (3.5)$$

于是可自

$$\frac{ds_1}{dt}=\pm\sqrt{g(1+\eta_2)}\sqrt{\frac{s_{10}^2-s_1^2}{L_0+(\eta_2^2-1)s_1}} \quad (3.6)$$

看出, 平衡位置两边的最大偏倚有相等的绝对值. s_1 出现在根号下的分母里, 从而肯定, 平衡位置两侧等距离处的两个速度的绝对值互不相等. 在图 2 里, 有似椭圆形样的曲线族 \dot{s}_1-s_1, \dot{s}_1 的最大值不落在轴 $s_1=0$ 上. 可以检正, 在 $s_1=-L_0/\lambda\pm\sqrt{(L_0/\lambda)^2-s_{10}^2}$ 处, 速度有其最大绝对值. 此外, 尚有

$$\left(\frac{ds_1}{dt}\right)_{\max}^2=\frac{2g(1+\eta_2)}{\lambda^2}\left(L_0\mp\sqrt{L_0^2-s_{10}^2}\right) \quad (3.7)$$

其中负号对 $\eta_2>1$, 正号对 $\eta_2<1$ 而言. 加速度式子

$$\frac{d^2s_1}{dt^2}=-g(1+\eta_2)\frac{\lambda s_{10}^2+2L_0s_1+\lambda s_1^2}{2(L_0+\lambda s_1)^2} \quad (3.8)$$

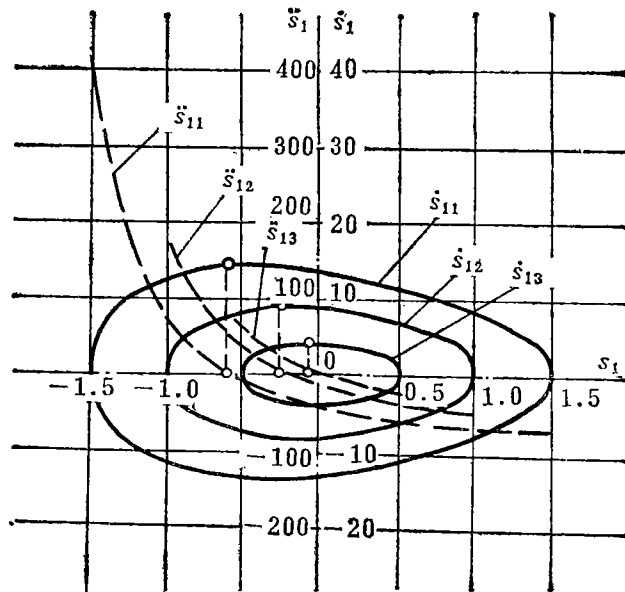


图 2 $\eta_2=7, \dot{s}_1=\dot{s}_1(s_1)$ 和 $\ddot{s}_1=\ddot{s}_1(s_1)$ 曲线族

对于平衡位置是非对称的.

用(3.6)至(3.8)诸式做个数例计算, 所得的特点和 s_1 、 \dot{s}_1 、 \ddot{s}_1 之间的相对关系都符合理论的要求. 突出的是, 最大速度不出现在液柱的平衡位置, 从而加速度不消失在平衡位置. 若果真有理想液体存在, 这种振动一发生后, 若无外部适当的制止作用, 就不会自动停止.

在平衡位置上, 则有

$$\ddot{s}_1|_{s_1=0} = -\frac{g(1+\eta_2)\lambda}{2} \left(\frac{s_{10}}{L_0}\right)^2 \quad (3.9)$$

最大加速度的式值是

$$(\ddot{s}_1)_{\max} = -\frac{g(1+\eta_2)s_{\max}}{L_0+(\eta_2^2-1)s_{\max}} \quad (3.10)$$

其值可参看图3.

利用关系 $s_1 = s_{10} \cos \varphi$, $\varphi = 2\psi$, $0 < k^2 = -\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}} < 1$, 就自(3.6)式导出

$$t - t_0 = 2 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (3.11)$$

公式(3.11)的右边有椭圆积分的第二种. 若用下指标“zu”(“ab”)表示液柱的折合长度(the reduced length)依偏倚 s_1 增长(减小)而加大(减小), 则当偏倚 s_1 自零增长到 s_{10} 再返回到零, 液柱振动用的时间是

$$T_{zu} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (3.12)$$

或引用第二种椭圆积分的惯用符号, 而写

$$T_{zu} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} E\left(\sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \sqrt{\frac{2}{g(1+\eta_2)}} \int_{s_{10}}^0 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_1}{s_{10}^2 - s_1^2}} ds_1 = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \\ &= 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \left\{ E - E\left(\sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

一个完整的振动周期自然是

$$T^* = T_{zu} + T_{ab} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \cdot E \quad (3.15)$$

其中 E 代表第二种完全椭圆积分. 通过展成级数, 并逐项求积, 则得

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(1+\eta_2)}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{2n-1} \left(\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}}\right)^n \right\} \quad (3.16)$$

其中 $M = \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2.4.6 \cdots 2n}$. 用前面的这些关系, 可成立比例式

$$\frac{T^*}{T_{zu}} = \frac{E}{E(k, \pi/4)}, \quad \frac{T_{ab}}{T_{zu}} = \frac{E - E(k, \pi/4)}{E(k, \pi/4)}, \quad \frac{T^*}{T_{ab}} = \frac{E}{E - E(k, \pi/4)} \quad (3.17)$$

更由于 $E(k, \pi/4) < E < 2E(k, \pi/4)$, 而得

$$T_{ab} < T_{zu} (\eta_2 \neq 1) \quad (3.18)$$

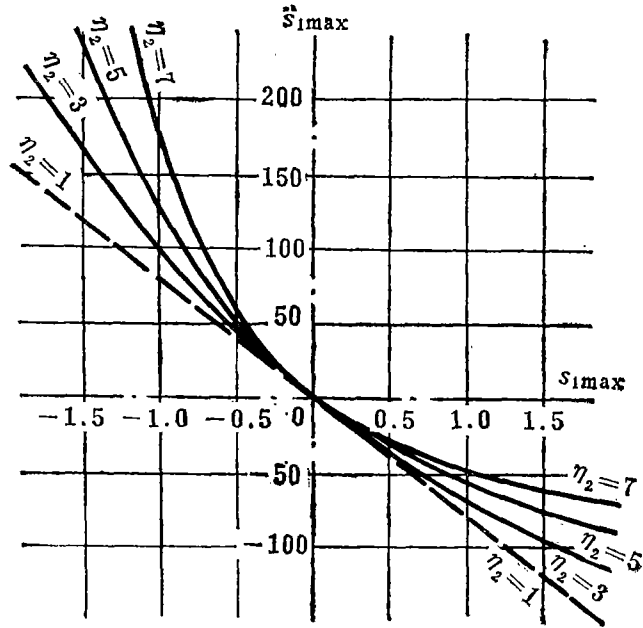


图3 最大加速度依最大偏倚的变化

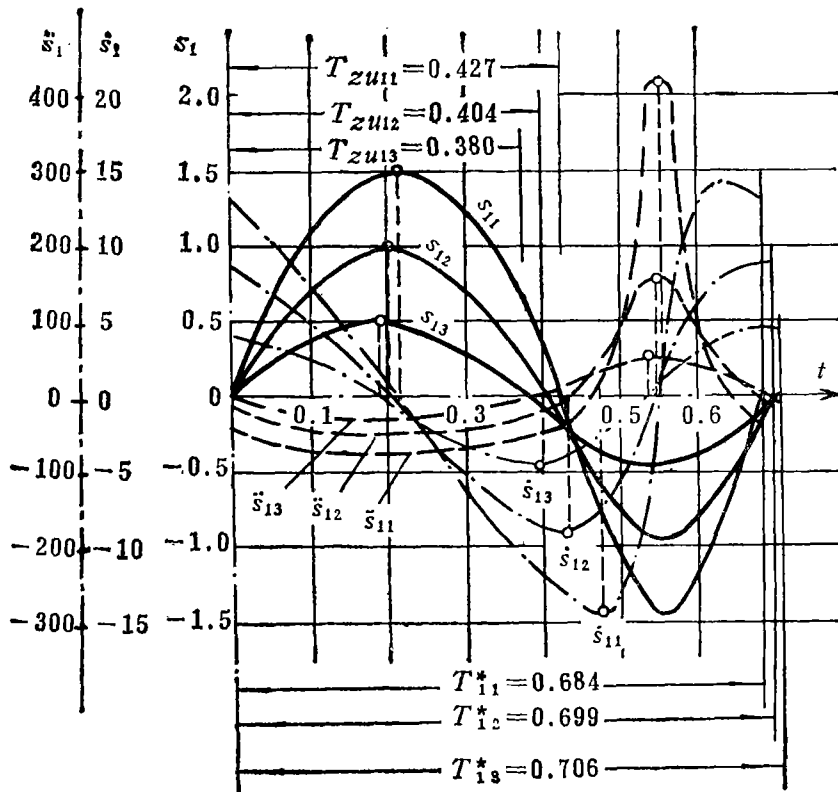


图4 以参数 $\eta_2=7$; s_{10} 更换三次; 位移、速度、加速度依时间 t 的变化

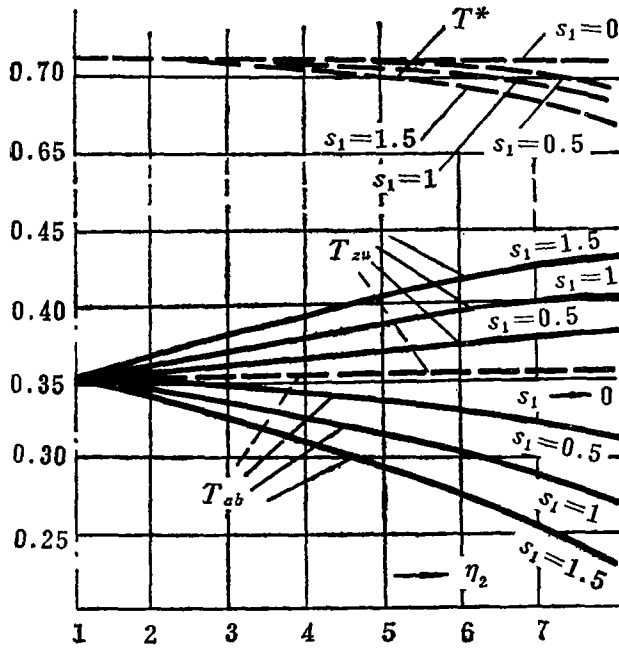


图5 s_{10} 作为参数, T^* , T_{zu} 和 T_{ab} 依 η_2 的变化

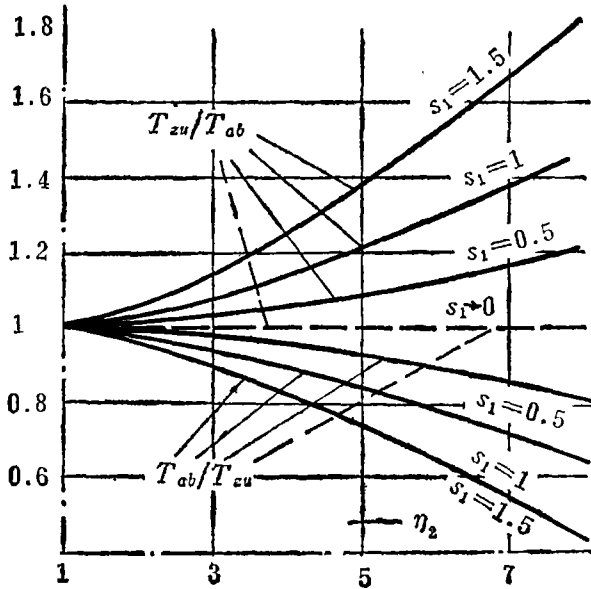


图6 s_{10} 作为参数, T_{zu}/T_{ab} 及其倒数值依 η_2 的变化

对于连通管内理想液柱的振动, 当 $\eta_2 \neq 1$ 时, 在平衡位置两侧所用的时间 $T_{zu} \neq T_{ab}$, 见图4; 而是, 折合长度增长的一侧用较长的时间来完成这半个行程的运动。

图4的完成须利用椭圆积分表, 图中显示了不少的 s_1 、 ξ_1 、 ξ_1 之间以及 T_{zu} 、 T_{ab} 和 T^* 之间的相对位置和级量。图5和图6示出了 T_{zu} 、 T_{ab} 、 T^* 、 T_{zu}/T_{ab} 、 T_{ab}/T_{zu} 依 s_{10} 和 η_2 变动的改变趋势。

在选取振幅时, s_{10} 须受下列关系的约束

$$s_{10} \leq s_{20}/\eta_2 \tag{3.19}$$

以免得出矛盾的结果.

保留符号 L_0 , 在(3.15)式里使 $\eta_2=1$, 就蜕化出Newton当年建立的关系 $T=2\pi\sqrt{L_0/2g}$.

对于很微小的偏倚, 可得 $T^* \approx 2\pi\sqrt{F_2 L_0/g(F_1+F_2)}$. 若再设 $L_0 = \int_0^{s_{20}} (F_1/F) ds = F_1 L / F_c$, 则导得Danielis Bernoulli当年建立的一个结果 $T^* = 2\pi\sqrt{F_1 F_2 L/g F_c (F_1+F_2)}$. 再者, 自(3.13)和(3.14)两式可得 $(T_{zu})_{s_{10} \rightarrow 0} = (T_{ab})_{s_{10} \rightarrow 0} = \pi\sqrt{F_2 L_0/g(F_1+F_2)}$. $(T_{zu} + T_{ab})_{s_{10} \rightarrow 0} = 2\pi\sqrt{[F_1 F_2 + h F_c (F_1+F_2)]/g F_c (F_1+F_2)}$, 此式跟在资料中已经存在的一个结果^[9]完全符合, 其中 $L_0 = \int_0^{s_{20}} (F_1/F) ds = h + F_1 h / F_2 + F_1 l / f$, $f \equiv F_c$.

四、T、T*、T_{zu}和T_{ab}的另一些性质和关系

以T代表等径连通管内理想液的振动周期, 这个液柱的长度为 L_0 ; 我们把这个连通管跟一个具有不等臂径的连通管作一比较. 在平衡位置, 设第二个管的液柱长度也是 L_0 , 于是有

$$\left(\frac{T^*}{T}\right)_{s_{10} \rightarrow 0} = \lim_{s_{10} \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L_0 + (\eta_2^2 - 1)s_{10}}{L_0} \cdot \frac{2}{1 + \eta_2} \cdot \frac{2E}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \eta_2}}$$

于是可断言, 当 $\eta_2 > 1$ 时, 则有

$$T^*_{s_{10} \rightarrow 0} < T \tag{4.1}$$

条件 $\partial T^*/\partial s_{10} = 0$ 给出 $s_{10} = 0$ 是

$$\frac{L_0}{L_0 + \lambda s_{10}} \left[1 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2n-1} M^2 \left(\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}} \right)^{n-1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{2n-1} \left(\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}} \right)^n = 1$$

的解答. 当 $s_{10} = 0$, 可以验证有

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial s_{10}^2}\right)_{s_{10}=0} = \frac{\pi}{\sqrt{g(1+\eta_2)}} \cdot \frac{(\eta_2^2 - 1)^2}{4L_0^{3/2}} > 0 \quad (\eta_2 \neq 1)$$

根据这项分析, 当 $s_{10} = 0$ 时, T^* 有其最小值, 从而断定, 永远是

$$T^* < T \quad (\eta_2 \neq 1) \tag{4.2}$$

在 $s_{10} = 0$ 处, 曲线族 (T^*, s_{10}) 都有水平切线. 当 s_{10} 增长, 这族曲线都单调地远离轴线 $s_{10} = 0$.

自关系 $(\partial T_{zu}/\partial s_{10})_{s_{10}=0} = (\eta_2^2 - 1)/\sqrt{g(1+\eta_2)L_0}$ 可以看出, 只能 $\eta_2 = 1$ 时, 在 $s_{10} = 0$ 处曲线族 (T_{zu}, s_{10}) 才能有水平切线. 当 $\eta_2 > 1$ 时, 曲线依增长的 s_{10} 而一同增长; 当 $\eta_2 < 1$, 它们则单调地下降.

部分周期 T_{ab} 的性质可自 $T^* - T_{zu}$ 推得. 自(3.13)式可得 $(T_{zu})_{s_{10} \rightarrow 0} = \pi\sqrt{L_0/g(1+\eta_2)}$

及 $T/2 = \pi\sqrt{L_0/2g}$, 于是可以断言

$$(T_{zu})_{s_{10} \rightarrow 0} < T/2 \tag{4.3}$$

当 s_{10} 增大时, $T_{zu} > T/2$ 是可能的, 但未深入探讨.

五、蜕化出跟水电站有关的一种极端情况

如图 7 所示, 这是近似水电站中水库和缓压水洞形成的一个特殊振动系统, 假设视流往水轮机的流量瞬时完全中断. 以 $\lambda = \eta_1^2 - 1$, $\eta_1 = F_2/F_1$, 试把微分方程

$$(L_0 + \lambda s_2) \ddot{s}_2 + \frac{1}{2} \lambda \dot{s}_2^2 + g(1 + \eta_1) s_2 = 0 \quad (5.1)$$

应用到图 7 所示的振动系统上, 为此则有 $\eta_1 = F_2/F_1 = 0$, $\lambda = \eta_1^2 - 1 = -1$, $L_0 = \int_0^{s_{10}} \frac{F_2}{F_1} ds$

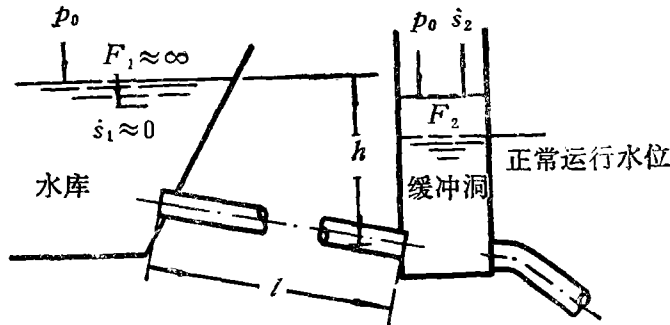


图 7 当 $F_1 \approx \infty$ 的一种蜕化系统.

$= \text{const}$, 从而(5.1)式简化成 $(L_0 - s_2) \ddot{s}_2 - \frac{1}{2} \dot{s}_2^2 + g s_2 = 0$, 并自积解 $L_0 \dot{s}_2^2 - s_2 \dot{s}_2^2 + g s_2^2 = g s_{20}^2$ 导得

$$\dot{s}_2 = \pm \sqrt{g} \sqrt{\frac{s_{20}^2 - s_2^2}{L_0 - s_2}} \quad (5.2)$$

若用 $\eta_2 = 0$, 则也可由 $\dot{s}_2 = \pm \sqrt{g(1 + \eta_2)} \cdot \sqrt{(s_{20}^2 - s_2^2) / [L_0 + (\eta_2^2 - 1)s_2]}$ 蜕化出(5.2)式. 用 $s_2 = -s_{20} \cos \varphi$, $\varphi = 2\psi$, 则自上式变换出

$$\left. \begin{aligned} T_{ob} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{s_{20}} \sqrt{\frac{L_0 - s_2}{s_{20}^2 - s_2^2}} ds_2 = 2\sqrt{\frac{L_0 + s_{20}}{g}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi} d\psi \\ T_{zu} &= 2\sqrt{\frac{L_0 + s_{20}}{g}} \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad K^2 = 2s_{20} / (L_0 + s_{20}) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

六、两种推导的主要区别

细节的区别无法肯定, 因为我们认为, 略去动量改变量是不合乎力学逻辑的, 从而也就未去求解(2.4)式. 所以本节只能限于谈几点基本区别.

(1) 在推导中, 基本概念的区别 那种曾沿用已久的推导完全忽略了不等径管段之间部分液体移流的能量改变量

$$dE = \frac{\gamma}{g} \left[\left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 1 \right] F_1 v_1^2 ds_1$$

此外, 别无区别.

(2) 运动微分方程的区别

忽视了 dE 的微分方程是

$$(L_0 + \lambda z_1) \ddot{z}_1 + g(1 + \eta_2) z_1 = 0$$

在考虑上 dE 时的微分方程是

$$(L_0 + \lambda s_1) \ddot{s}_1 + \frac{1}{2} \lambda \dot{s}_1^2 + g(1 + \eta_2) s_1 = 0$$

两式虽然都是非线性的，但前式限于第一项，后者则有两项。

(3) 在平衡位置上，理想液柱速度的区别

在考虑上 dE 时，我们有

$$\left. \begin{aligned} (\dot{s}_1)_{s_1 \rightarrow 0} &= \pm \sqrt{g(1 + \eta_2)} \frac{s_{10}}{\sqrt{L_0}} \\ L_0 &= \int_0^{s_{20}} \frac{F_1}{F_2} ds = h + \frac{F_1}{F_2} h + \frac{F_1}{f} l \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

当忽略 dE 时，其结果是

$$\left. \begin{aligned} (v_1)_{z \rightarrow 0} &= \pm \sqrt{\frac{2ga}{b^2} \ln \frac{a}{a + b(h - h_1)} + \frac{2g}{b} (h - h_1)} \\ &= \pm \sqrt{2g} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{n-2} (h - h_1)^n}{na^{n-1}}} \\ a &= h + l F_1 / f \left(\frac{F_1}{F_2} + 1 \right), \quad b = \frac{F_1}{F_2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

这两个值有很大的区别；按前边进行过的论辩，自然 (6.2) 式是有缺点的一个结果。

参 考 文 献

1. Newton, Isaac, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 1687.
2. Bernoulli, Johann, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 1727.
3. de Lagrené, H., *Cours de Navigation intérieure*, Paris, 1869.
4. Bernoulli, Danielis, *Hydrodynamica* (Argentorati, 1738).
5. Liu Hsien-Chih (刘先志), Beitrag zur Kenntnis der Eigenschwingung einer idealen Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren, *ZAMP*, IV, 1953.
6. Wittenbauer, F., *Aufgaben aus der Technischen Mechanik*, III. Band, Julius Springer, Berlin 1921.
7. Liu Hsien-Chih (刘先志) Eigenschwingungen einer idealen Flüssigkeit in Rohrleitungen mit verschiedenen Endquerschnitten, *Ing.-Archiv*, 1952.
8. Liu Hsien-Chih (刘先志), Über schwingungen einer idealen Flüssigkeit in ellipsen- und kreisbogenförmigen, kommunizierenden Röhren, *Ing.-Archiv*, 1952.
9. *A Handbook on Torsional Vibration*, B. I. C. E. R. A., Cambridge University Press, 1958.

A Comparison of Two Methods for Deriving the Differential Equation of Oscillation of an Ideal Liquid in Communication Tube with Different End Cross Sections

Liu Hsien-chih

(Shantung Institute of Technology)

Abstract

Possibly not shorter than a half century, there has been existing a method for deriving the differential equation for the oscillation of an ideal liquid in communication tube with different end cross sections in the scientific literature, which, according to our opinion, is somewhat defective. With this paper we present another derivation in aiming to make possibly a convincing comparison. Our method leads to results from which the three different laws for vibration period setting up in the antiquity by Isaac Newton, Johann Bernoulli and Danielis Bernoulli can be degenerated outcomes.

The correct differential equation is non-linear, in which the coefficient of the second derivative is a linear function of the displacement and a quadratic term in the first derivative also appears.

Nevertheless, it has been successful to have acquired a general solution of this non-linear equation. Some outstanding features of the oscillation have also been advisedly explored.

The kernel differential equations are

$$(L_0 + \lambda z_1) \ddot{z}_1 + g(1 + \eta_2) z_1 = 0 \quad (2.4)$$

and
$$(L_0 + \lambda s_1) \ddot{s}_1 + \frac{1}{2} \lambda \dot{s}_1^2 + g(1 + \eta_2) s_1 = 0 \quad (3.4)$$

in which $L_0 = (1 + \eta_2)h + lF_1/f$, $\eta_2 = F_1/F_2$, $\lambda = \eta_2^2 - 1$, and noticeably z_1 and s_1 are synonymous dependent variables.