

# 阻尼振动系统的强迫响应

张 文(上海复旦大学)

(江福汝推荐 1980年2月20日收到)

## 摘 要

本文讨论阻尼振动系统(离散或连续系统)在周期外激励作用下的强迫响应;系统的阻尼阵不能对角化,导出了强迫响应一般解的显式解析表达式.利用这些解式,本文对某些振动现象作了较普遍的解析讨论.如,从一般角度讨论了单阻尼振动系统特有的“固定振幅点”现象;讨论了同相位外激励作用下产生同相位响应的条件等等.本文导出的解式对一大类系统仅含很低阶的矩阵求逆运算,因而在计算机数值计算上,本方法比之于现有方法,具有程序简单、耗时少和精度高等优点.

本方法可平行应用于转子动力学的不平衡响应分析.

## 一、导 言

众所周知,  $n$ 自由度线性阻尼振动系统, 振动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

$\mathbf{q}$ 为广义坐标列阵,  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{N}$ 为广义质量、刚度和阻尼阵;  $\mathbf{f}$ 为广义外激励力列阵, 若  $\mathbf{f}$ 为频率  $\omega$ 的谐振力  $\mathbf{f} = \mathbf{F} e^{i\omega t}$ , 则  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} e^{i\omega t}$ ;  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{Q}$ 为复数列阵. 代入(1.1)得:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{N}) \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

求解(1.2), 大多采用主模态展开, 设系统自由振动

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

之解

$$\omega_i, \boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n]$$

满足正交关系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j = m_i \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_j = m_i \omega_i^2 \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.3)$$

于是, 将  $\mathbf{Q}$  依主模态展开:

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Y} \quad (1.4)$$

代入(1.2), 得:

$$(\overline{\mathbf{K}} - \omega^2 \overline{\mathbf{M}} + i\omega \overline{\mathbf{N}}) \mathbf{Y} = \overline{\mathbf{F}} \quad (1.5)$$

其中:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} m_1 \omega_1^2 \\ & & \\ & & \\ & & & m_n \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 \\ & & \\ & & \\ & & & m_n \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\Psi}, \quad \overline{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{F} \end{cases} \quad (1.6)$$

若  $\bar{N}$  是对角阵, 则 (1.5) 无耦合而可解. 但, 仅少数情况  $N$  能依上法对角化. 如 Rayleigh<sup>[1]</sup> 提出的“比例阻尼”  $N = \alpha M + \beta K$ .

近来已搞清<sup>[2-6]</sup>,  $N$  可对角化的充要条件是阵  $A = M^{-1}N$  和阵  $B = M^{-1}K$  可乘积交换:  $AB = BA$ , 或等价地,  $A$  可表为  $B$  的  $n-1$  次矩阵多项式  $A = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j B^j$ . 因此, 一般情况下, (1.5) 仍

为耦合型而无特殊意义.

Foss<sup>[7]</sup> 建议用状态座标  $Z^T = [q^T, \dot{q}^T]$  而将问题转化到核心为求解一个复广义特征值问题. 此虽为精确解法, 但因阶数扩大一倍又涉及复特征值运算而逊色不少. 故实用上常仍从

(1.5) 出发而走近似处理之路. 一般采用人为舍去  $\bar{N}$  的非对角元, 或稍费手续用当量办法把非对角元影响折算到对角元上去<sup>[8]</sup>, 或通过迭代计入非对角元影响<sup>[9]</sup>.

本文提出一个新的精确求解法. 通过一系列矩阵运算技巧, 直接解得 (1.2) 显式通解表达式. 它不扩大矩阵阶数, 不涉及复特征值计算, 不作近似处理, 而且还可降低求逆矩阵尺寸, 从而达到快速简便的目的.

## 二、强迫响应通解

$$\text{令 } L = (K - \omega^2 M)^{-1} \quad (2.1)$$

(1.2) 化为:

$$(I_n + i\omega LN) Q = LF \quad (2.2)$$

其中  $I_n$  为  $n \times n$  单位阵,  $L$  称动柔度阵, 又常称机械导纳, 其元素  $l_{ij}$  表示第  $j$  个单位广义谐振力引起的第  $i$  个广义位移值. 若已知结构固有特性  $\omega_i, \psi$ , 则:

$$L = \Psi \Lambda \Psi^T \quad (2.3)$$

$$\text{其中 } \Lambda = \left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \\ \diagup \end{array} \right] \quad (2.4)$$

由附录 I, 有如下复矩阵求逆公式:

$$(A + iB)^{-1} = (I + A^{-1}BA^{-1}B)^{-1} (I - iA^{-1}B) A^{-1} \quad (2.5)$$

$$(A + iB)^{-1} = (I + B^{-1}AB^{-1}A) (B^{-1}A - iI) B^{-1} \quad (2.6)$$

其中  $A, B$  为实数阵. 两式分别用于  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  存在时.

取  $A = I_n, B = \omega LN$ , 代入 (2.5), 即解出 (2.2):

$$Q = (I_n + \omega^2 LNLN)^{-1} (I_n - i\omega LN) LF \quad (2.7)$$

(2.7) 为本文导出的强迫响应第一个通解式. 应用该式需先解特征值问题以求得  $L$ .

若想回避特征值问题, 取  $A = E = K - \omega^2 M, B = \omega N$ , 代入 (2.6) 解出 (1.2):

$$Q = (\omega^2 I_n + N^{-1}EN^{-1}E)^{-1} (N^{-1}E - i\omega I_n) N^{-1}F \quad (2.8)$$

(2.8) 为本文导得的强迫响应第二个通解式. 应用该式仅需计算  $N^{-1}$  而无须求解特征值问题. 但应注意,  $N$  并不总可求逆的. 此外, 上述二通解均需执行  $n$  阶矩阵求逆, 对大型结构带来不便. 下面寻找更简便的解式.

若不计材料内耗, 大多实际系统仅在有限部位上有外阻尼, 现设系统有  $t$  个外阻尼点, 第  $j$  点处引起阻尼的物理量为  $\tilde{x}_j$ , 阻尼力  $D_j = C_j \tilde{x}_j$ , 其中  $C_j$  为粘性阻尼系数, 记  $\tilde{X}^T = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t]$ , 它与  $q$  的转换关系为  $\tilde{X} = \tilde{\phi} q$ , 其中  $\tilde{\phi}$  为  $t \times n$  阵, 其元素  $\tilde{\phi}_{ij}$  为  $q_j$  单位值引

起的  $\tilde{x}$  值. 阻尼力阵  $D = -C\dot{\tilde{X}} = -C\tilde{\phi} \dot{q}$ , 其中  $C$  为  $t \times t$  对角阵  $\begin{bmatrix} C_1 & \\ & \ddots \\ & & C_t \end{bmatrix}$ . 于是, 对应于  $q$  的广义阻尼阵为:

$$N = \tilde{\phi}^T C \tilde{\phi} \quad (2.9)$$

(2.2) 化为

$$Q = (I_n + i\omega L \tilde{\phi}^T C \tilde{\phi})^{-1} L F \quad (2.10)$$

由附录 I, 有如下公式:

$$(I_n + aL \tilde{\phi}^T C \tilde{\phi})^{-1} = I_n - aL \tilde{\phi}^T C (I_t + a\tilde{\phi} L \tilde{\phi}^T C)^{-1} \tilde{\phi} \quad (2.11)$$

其中  $a$  为复数,  $I_t$  为  $t \times t$  单位阵.

取  $a = i\omega$ , 代入 (2.10), 得:

$$Q = (I_n - i\omega L \tilde{\phi}^T C (I_t + i\omega \tilde{\phi} L \tilde{\phi}^T C)^{-1} \tilde{\phi}) L F \quad (2.12)$$

令  $Q_0 = L F, Q_c = L \tilde{\phi}^T, \tilde{X}_0 = \tilde{\phi} Q_0, \tilde{X}_c = \tilde{\phi} Q_c$  (2.13)

其物理意义为:

$Q_0$ :  $F$  引起的  $Q$  无阻尼响应列阵.  $\tilde{X}_0$ :  $F$  引起的  $\tilde{X}$  无阻尼响应列阵.  $Q_c$ :  $n \times t$  阵, 阻尼点处配置单位力引起的  $Q$  无阻尼响应阵.  $\tilde{X}_c$ :  $t \times t$  阵, 阻尼点处配置单位力引起的  $\tilde{X}$  无阻尼响应阵.

(2.12) 化为

$$Q = Q_0 - i\omega Q_c C (I_t + i\omega \tilde{X}_c C)^{-1} \tilde{X}_0 \quad (2.14)$$

由 (2.5) 得:

$$Q = Q_0 - i\omega Q_c C (I_t + \omega^2 A^2)^{-1} (I_t - i\omega A) \tilde{X}_0 \quad (2.15)$$

其中  $A = \tilde{X}_c C$ , 为  $t \times t$  阵.

若关心系统的某  $m$  个物理量的响应 (位移、转角、应力等等), 设该  $m$  个量记为列阵  $Z$ , 在微振动中, 任何物理量在一级近似下均可视为广义座标的线性组合, 故  $Z$  与  $Q$  的关系为

$$Z = RQ \quad (2.16)$$

$R$  为  $m \times n$  阵, (2.15) 左乘  $R$ , 得:

$$Z = Z_0 - i\omega Z_c C (I_t + \omega^2 A^2)^{-1} (I_t - i\omega A) \tilde{X}_0 \quad (2.17)$$

其中,  $Z_0 = RQ_0 = RLF$ , 为  $F$  引起的  $Z$  的无阻尼响应,  $Z_c = RQ_c$ , 为  $m \times t$  阵, 是阻尼点配置单位力引起的  $Z$  无阻尼响应. (2.15)、(2.17) 即为本文导出的强迫响应第三个通解式. 该式仅需执行  $t$  阶矩阵求逆. 因大多结构  $t \ll n$ , 因而大大简化了运算.

### 三、连续系统

现考虑连续体系统, 系统的连续变化位置点记为  $y$ ,  $y$  的全体记  $V$ . 系统受分布或集中型外谐振力  $P(y) e^{i\omega t}$  和分布型 (或集中型) 外阻尼力  $-i\omega c(y)x(y)e^{i\omega t}$  作用, 强迫响应为  $x(y)e^{i\omega t}$ , 则  $x(y)$  满足如下积分方程:

$$x(y) + i\omega \int_V a(y, \eta) c(\eta) x(\eta) d\eta = x_0(y) \quad (3.1)$$

其中  $x_0(y) = \int_V a(y, \eta) p(\eta) d\eta$  (3.2)

$a(y, \eta)$  为系统在  $\eta$  处作用单位谐振力  $e^{i\omega t}$  而在  $y$  处产生的无阻尼响应幅值. 称为系统的动态

柔度函数或导纳<sup>[10]</sup>.  $x_0(y)$  为系统在  $p(y)$  作用下的无阻尼响应. 若已知系统固有特性 (主频率  $\omega_i$ , 主振型  $\varphi_i(y)$ , 主质量  $m_i$ ), 则:

$$\alpha(y, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(y)\varphi_i(\eta)}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \quad (3.3)$$

$$x_i(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(y)}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \int \varphi_i(\eta) p(\eta) d\eta \quad (3.4)$$

于是, 一旦给出系统的阻尼, 就可由 (3.1) 解出响应  $x(y)$ . 但除特例外, (3.1) 很难求解. 实用上就采用集聚模型等将连续系统有限自由度化, 这种处理对高频响应有很大误差. 但本文这里将指出, 对具有有限个阻尼点的连续系统, 可类似前节, 精确解出 (3.1). 方法如下:

设系统仅在  $t$  个点  $\eta_j$  ( $j=1, \dots, t$ ) 上配置阻尼, 阻尼系数  $c_j$ . 则 (3.1) 化为:

$$x(y) + i\omega \sum_{j=1}^t \alpha(y, \eta_j) c_j x(\eta_j) = x_0(y) \quad (3.5)$$

取  $y = \eta_k$  ( $k=1, \dots, t$ ), 得:

$$x(\eta_k) + i\omega \sum_{j=1}^t \alpha(\eta_k, \eta_j) c_j x(\eta_j) = x_0(\eta_k) \quad (k=1, \dots, t) \quad (3.6)$$

写成矩阵形式:

$$\tilde{X} + i\omega \tilde{X}_c \tilde{C} \tilde{X} = \tilde{X}_0 \quad (3.7)$$

其中  $\tilde{X}^T = [x(\eta_1), \dots, x(\eta_t)]$ ,  $\tilde{X}_0^T = [x_0(\eta_1), \dots, x_0(\eta_t)]$ ,  $\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_t \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{X}_c$  为  $t \times t$

阵, 其元素  $\tilde{x}_{c_{ij}} = \alpha(\eta_i, \eta_j)$ . 由 (3.7) 解出:

$$\tilde{X} = (\mathbf{I} + i\omega \tilde{X}_c \tilde{C})^{-1} \tilde{X}_0 \quad (3.8)$$

若计算该系统上某  $m$  个点  $y_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 处的强迫响应  $x(y_i)$ , 记  $X^T = [x(y_1), \dots, x(y_m)]$ ,  $X_0^T = [x_0(y_1), \dots, x_0(y_m)]$ , 代入 (3.5) 并用 (3.8) 得:

$$X = X_0 - i\omega X_c \tilde{C} (\mathbf{I} + i\omega \tilde{X}_c \tilde{C})^{-1} \tilde{X}_0 \quad (3.9)$$

其中  $X_c$  为  $m \times t$  阵, 其元素  $x_{c_{ij}} = \alpha(\eta_i, \eta_j)$ . 由附录 I, (3.9) 化为:

$$X = X_0 - i\omega X_c \tilde{C} (\mathbf{I} + \omega^2 \Lambda)^{-1} (\mathbf{I} - i\omega \Lambda) \tilde{X}_0 \quad (3.10)$$

其中  $\Lambda = \tilde{X}_c \tilde{C}$ . (3.10) 即为连续系统在有限个阻尼下强迫响应精确介表达式. 它与 (2.17) 相对应. 可见, 在有限阻尼下, 有限系统和连续系统的解可统一.

上述论证是对位移响应  $x(y)$  而作的, 亦可从一般的物理量响应及一般的阻尼来讨论, 仅需对  $\alpha(y, \eta)$  和  $x(y)$  的物理意义略作修改即可, 此处不再赘述.

#### 四、单 阻 尼 系 统

若系统仅有一个阻尼点  $d$ ,  $t=1$ , 阻尼系数  $c_d$ , 这时,  $\tilde{X}_c$ ,  $\tilde{X}_0$ ,  $\tilde{C}$  均为标量, 分别记为  $\tilde{x}_{dd}$ ,  $\tilde{x}_{0d}$ ,  $c_d$ . 物理意义同前,  $\tilde{x}_{dd}$  是  $d$  处作用单位力引起的  $\tilde{x}_d$  无阻尼响应.  $\tilde{x}_{0d}$  是外力  $F$  引起的  $\tilde{x}_d$  无阻尼响应. 此时 (2.14) 为:

$$\dot{Q} = Q_0 - \frac{i\omega c_d \tilde{x}_{od}}{1 + i\omega c_d \tilde{x}_{dd}} Q_0 \quad (4.1)$$

左乘R, 由(2.16)得:

$$Z = Z_0 - \frac{i\omega c_d \tilde{x}_{od}}{1 + i\omega c_d \tilde{x}_{dd}} Z_0 \quad (4.2)$$

取(4.2)中某个分量 $z_k$ :

$$z_k = z_{ok} - \frac{i\omega c_d \tilde{x}_{od}}{1 + i\omega c_d \tilde{x}_{dd}} z_{ok} = z_{ok} \frac{1 + i\omega c_d h_k}{1 + i\omega c_d \tilde{x}_{dd}} \quad (4.3)$$

其中 
$$h_k = \tilde{x}_{dd} - \frac{\tilde{x}_{od} z_{ck}}{z_{ok}} \quad (4.4)$$

若外力F同相位, F取为实阵, 于是 $z_{ok}$ ,  $\tilde{x}_{od}$ ,  $h_k$ 均为实数, 由(4.3)得:

$$|z_k| = |z_{ok}| \sqrt{\frac{1 + \omega^2 c_d^2 h_k^2}{1 + \omega^2 c_d^2 \tilde{x}_{dd}^2}} \quad (4.5)$$

于是, 凡满足 $h_k^2 = \tilde{x}_{dd}^2 - \omega$ 之 $\omega$ 值 $\omega^*$ , 有:

$$|z_k(\omega^*)| = z_k^* = |z_{ok}(\omega^*)| \quad (4.6)$$

而与 $c_d$ 无关. 这即“固定振幅点”现象. 它表示, 任意物理量 $z_k$ 不同 $c_d$ 值下频幅响应曲线均通过 $(\omega^*, z_k^*)$ 点. 亦即, 微振动中, 任何物理量均具有“固定振幅点”现象. 这一现象对许多特定振动问题的特定物理量, 已为不少文献阐述<sup>[(11)-(14)]</sup>, 本文此处给出了最一般证明.

一般, 可以有好几个 $\omega^*$ , 现分析其分布规律. 记:

$$z_{dk} = z_{ok} h_k / \tilde{x}_{dd} = z_{ok} - \tilde{x}_{od} z_{ck} / \tilde{x}_{dd} \quad (4.7)$$

(4.3) 化为:

$$z_k = \frac{z_{ok} + i\omega c_d \tilde{x}_{dd} z_{dk}}{1 + i\omega c_d \tilde{x}_{dd}} \quad (4.8)$$

可见,  $z_{ok}$ 为 $c_d=0$ 时 $z_k$ 无阻尼响应,  $z_{dk}$ 为 $c_d \rightarrow \infty$ 亦即 $\tilde{x}_d$ 被拘束住新系统 $z_k$ 无阻尼响应. 两曲线 $|z_{ok}|$ 和 $|z_{dk}|$ 的一系列交点即为 $(\omega^*, z_k^*)$ .

设原系统固有频率 $\omega_k$  ( $k=1, \dots, n$ ).  $\tilde{x}_d$ 被拘束住新系统固有频率 $\tilde{\omega}_k$  ( $k=1, \dots, n-1$ ), (它由 $\tilde{x}_{dd}=0$ 解出<sup>[(10)]</sup>). 于是 $\omega=\omega_k$ 时 $z_{ok}$ 值无穷大,  $\omega=\tilde{\omega}_k$ 时 $z_{dk}$ 值无穷大. (除非对应振型不激发). 由微振动理论<sup>[(10)]</sup>知, 该两系统特征值分布互错, 即:

$$\omega_1 < \tilde{\omega}_1 < \omega_2 < \tilde{\omega}_2 < \dots < \tilde{\omega}_{n-1} < \omega_n$$

故 $z_{ok}$ 和 $z_{dk}$ 两曲线如图一所示. 可见, 每相邻 $\omega_i$ 与 $\tilde{\omega}_i$ 或 $\tilde{\omega}_i$ 与 $\omega_{i+1}$ 之间有一个 $\omega^*$ , 或者, 每相邻 $\omega_i$ 和 $\omega_{i+1}$ 或 $\tilde{\omega}_i$ 和 $\tilde{\omega}_{i+1}$ 之间有两个 $\omega^*$ .

可按Brock<sup>[(10)]</sup>的方法求最佳阻尼 $C_d^*$ . 先找到关心频段中全体 $(\omega^*, z_k^*)_i$ , 再找 $\max$

$(z_k^*)$ 及对应的 $\omega_m^*$ , 再选 $C_d^*$ 使 $|z_k|$ 曲线在 $\omega_m^*$ 处取极值. 由(4.8)得:

$$|z_k|^2 = \frac{z_{ok}^2 + \omega^2 c_d^2 \tilde{x}_{dd}^2 z_{dk}^2}{1 + \omega^2 c_d^2 \tilde{x}_{dd}^2} \quad (4.9)$$

取对数导数并取 $\omega=\omega_m^*$ 时该值为零, 注意到此时 $z_{ok}^2 = z_{dk}^2$ 得:

$$c_d^{*2} = \frac{1}{\omega_m^{*2} \tilde{x}_{dd}^2} \left| \frac{dz_{ok}}{d\omega^2} / \frac{dz_{dk}}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_m^*} \quad (4.10)$$

(4.10) 为本文导出的控制 $z_k$ 幅值最佳阻尼普遍计算公式.

若外激励非同相, 虽为单阻尼系统, 一般无固定振幅点. 多阻尼系统即使  $F$  同相, 亦无固定振幅点特性.

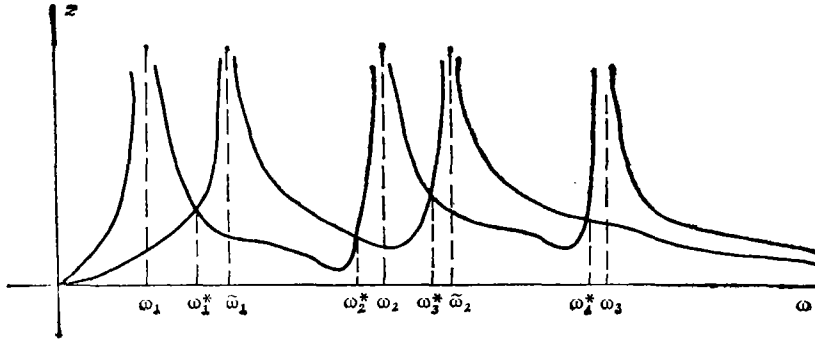


图 1

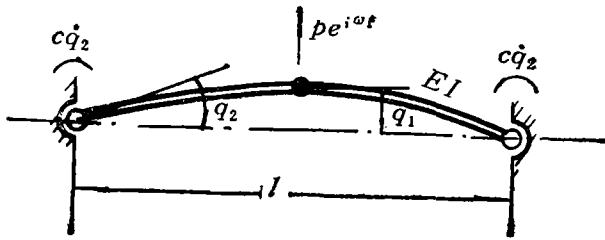


图 2

例: 长  $l$  刚度  $EI$  无质量弹性轴, 中央附质量  $m$ , 其上作用外力  $pe^{i\omega t}$ , 轴两端配以阻尼球铰, 能产生与球铰的角位移速度成正比的阻尼力矩, 阻尼系数  $c$ . 求质量  $m$  位移响应. 视图二.

由对称性知, 它为二自由度单阻尼系统. 取  $m$  的横向位移和球铰转角为广义坐标  $q_1, q_2$ , 于是:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{192EI}{l^3} & -\frac{48EI}{l^2} \\ -\frac{48EI}{l^2} & \frac{16EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 3/ml \\ 3/ml & \frac{l(\tilde{\omega}_1^2 - \omega^2)}{16EI} \end{bmatrix}$$

其中  $\omega_1^2 = \frac{48EI}{ml^3}$ ,  $\tilde{\omega}_1^2 = \frac{192EI}{ml^3}$  为原系统及球铰被拘束住后新系统固有频率. 此外,  $\tilde{\phi} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{0}_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $c_d = 2c$ ,  $\mathbf{N} = 2c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 于是,  $q_1$  的强迫响应算得为:

$$q_1 = \frac{p}{m} \frac{1 + i\omega \frac{lc}{8EI}}{(\omega_1^2 - \omega^2) + i\omega \frac{lc}{8EI} - (\tilde{\omega}_1^2 - \omega^2)}$$

固定振幅点为  $\omega^{*2} = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \tilde{\omega}_1^2) = \frac{120EI}{ml^3}$ ,  $q_1^* = \frac{pl^3}{72EI}$ , 最佳阻尼  $c^* = \frac{8}{15} EIlm$ .

### 五、同 相 位 响 应

仍考虑多阻尼系统. 现讨论如下问题: 当外力  $F$  各分量同相位, 响应  $Q$  各分量之间一般不呈现同相位, 在什么条件下,  $Q$  也呈现同相位? 这问题极少文献讨论, 但对某些应用却有重要意义. 应用本文结果不难回答.

**定理1.** 阻尼振动系统, 受频率  $\omega$  的同相位外激励  $F$ , 产生同相位响应  $Q$  的充要条件是特征值问题

$$(E - \lambda N) X = 0 \tag{5.1}$$

有实解  $\lambda_0, X_0$ , 而对应的  $F$  为  $F_0 = EX_0$ , 其中  $E = K - \omega^2 M = L^{-1}$ .

证: 记  $D = (I_n + \omega^2 LNLN)^{-1}$ ,  $D$  为满秩实阵. 若  $F$  为同相位外激励  $F_0$ , 取  $F_0$  为实阵, 由 (2.7) 得:

$$ReQ = DLF_0, \quad ImQ = -\omega DLNLF_0. \tag{5.2}$$

若响应  $Q$  同相位, 则  $ReQ = \alpha ImQ$ ,  $\alpha$  为实数. (5.2)

代入得  $DL(I_n + \alpha\omega NL)F_0 = 0$  或  $DL(L^{-1} + \alpha\omega N)LF_0 = 0$ . 左乘  $L^{-1}D^{-1}$  得:  $(E + \alpha\omega N)LF_0 = 0$ , 对照 (5.1) 知,  $\lambda_0 = -\alpha\omega$ ,  $X_0 = LF_0$  为其实解. 反之, 若 (5.1) 有实解  $\lambda_0, X_0$ , 逆推可得  $ReQ = -\frac{\lambda_0}{\omega} ImQ$ , 且对应的  $F_0 = EX_0$ .

从证明知,  $F_0$  与  $Q$  之间不同相,  $Q$  比  $F_0$  落后  $\text{tg}^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\omega}\right)$  相位. 同一  $\omega$  下, (5.1) 可有多个实解, 即有多个同频率的  $F_0$  激发同相位响应, 但不能彼此迭加. 若 (5.1) 无实解, 则可断言系统产生不了同相位响应. 但应注意, 定理 1 的要求是不高的. 事实上, 有如下三个定理:

**定理2.** 单阻尼和双阻尼系统必能激发同相位响应.

证: (5.1) 可改写为

$$(I_n - \lambda NL) X = 0 \tag{5.3}$$

为证明方便, 不妨把阻尼点处产生阻尼的物理量取为独立广义坐标, 于是:

$$N = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{又记 } L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

代入 (5.3) 得:

$$\begin{cases} (1 - \lambda c_1 l_{11}) x_1 - \lambda c_1 l_{12} x_2 = 0 \\ -\lambda c_2 l_{21} x_1 + (1 - \lambda c_2 l_{22}) x_2 = 0 \\ x_i = 0 \quad (i=3, \dots, n) \end{cases}$$

特征方程  $(1 - \lambda c_1 l_{11})(1 - \lambda c_2 l_{22}) - \lambda^2 c_1 c_2 l_{21} l_{12} = 0$

解出

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 l_{11} + c_2 l_{22} \pm \sqrt{(c_1 l_{11} - c_2 l_{22})^2 + 4c_1 c_2 l_{12}^2}}{2c_1 c_2 (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)}$$

当  $c_2 = 0$  即单阻尼时,  $\lambda_1 = 1/c_1 l_{11}$ . 可见, 均为实特征值.

**定理3.** 外激频率  $\omega$  小于系统基频  $\omega_1$  或大于最大固有频率  $\omega_n$  时, 必有能激发同相位响应者  $F$ .

证: 设系统的固有频率和振型满足 (1.3), 依 (1.4), 任意向量  $Q = \Psi Y$ , 二次型  $Q^T E Q =$

$$Y^T \Psi^T E \Psi Y = Y^T \left[ \begin{array}{c} m_i (\omega_i^2 - \omega^2) \\ \vdots \end{array} \right] Y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2)}, \text{ 可见当 } \omega < \omega_1 \text{ 时, } E \text{ 为正定对称}$$

阵而当  $\omega > \omega_n$  时,  $E$  为负定对称阵, 而阻尼阵  $N$  总是正定的, 故 (5.1) 必有实特征根.

**定理4.** 若  $(E - \mu I) X = 0$  有实解  $\mu_0, X_0$ , 且  $NE = EN$ , 则 (5.1) 亦有实解.

证: 此时  $EX_0 = \mu_0 X_0$  (5.4)

两边左乘  $N$ , 因  $NE = EN$ , 得:

$$E(NX_0) = \mu_0(NX_0) \quad (5.5)$$

可见  $X_0$  与  $NX_0$  同为特征值  $\mu_0$  对应的特征向量, 若不考虑重根可能, 则必  $NX_0 = \nu_0 X_0$ ,  $\nu_0$  为实数. 代入 (5.4) 得:

$$\left( E - \frac{\mu_0}{\nu_0} N \right) X_0 = 0$$

即为 (5.1) 式.

## 六、应 用

作为这一普遍方法的具体应用实例, 可参看专文<sup>[17]</sup>. 该文详述了将该法具体应用于带阻尼器复杂转子系统不平衡响应分析. 这时,  $M$  阵需计入陀螺效应, 周期外激励为转子的偏心离心力. 该文还有计算结果与实验的比较. 计算实践表明, 本方法比之现有方法, 具有程序编制简单、耗时少和精度高等优点.

### 附 录 I

证明复矩阵求逆公式

$$(A + iB)^{-1} = (I + A^{-1}BA^{-1}B)^{-1}(I - iA^{-1}B)A^{-1} \quad (1)$$

$$(A + iB)^{-1} = (I + B^{-1}AB^{-1}A)^{-1}(B^{-1}A - iI)B^{-1} \quad (2)$$

证: 设  $(A + iB)(C + iD) = I$ . 打开得:

$$AC - BD = I \quad (3)$$

$$AD + BC = 0 \quad (4)$$

设  $A$  可求逆, 由 (4) 得:

$$D = -A^{-1}BC \quad (5)$$

代入 (3) 得:  $C = (A + BA^{-1}B)^{-1} \quad (6)$

代入 (5) 得

$$D = -A^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1} = -(A + BA^{-1}B)^{-1}BA^{-1} \quad (7)$$



合并(6)、(7)得:

$$(A+iB)^{-1}C+iD=(A+BA^{-1}B)^{-1}(I-iBA^{-1})=(I+A^{-1}BA^{-1}B)^{-1}(I-iA^{-1}B)A^{-1}$$

即证明了(1)式.

若B可求逆, 则  $(A+iB)^{-1}=\frac{1}{i}(B-iA)^{-1}$

$$=\frac{1}{i}(I+B^{-1}AB^{-1}A)^{-1}(I+iB^{-1}A)B^{-1}=(I+B^{-1}AB^{-1}A)^{-1}(B^{-1}A-iI)B^{-1}$$

即为(2)式.

### 附 录 I

证明公式:  $(I_n+aL\tilde{\phi}^T C \tilde{\phi})^{-1}=I_n-aL\tilde{\phi}^T C(I_n+a\tilde{\phi}L\tilde{\phi}^T C)^{-1}\tilde{\phi}$

证: 上式左端括号项记为A, 右端记为B, 则

$$BA=I_n+a\tilde{L}\tilde{\phi}^T C \tilde{\phi}-aL\tilde{\phi}^T C(I_n+a\tilde{\phi}L\tilde{\phi}^T C)^{-1}\tilde{\phi}-aL\tilde{\phi}^T C(I_n+a\tilde{\phi}L\tilde{\phi}^T C)^{-1}\tilde{\phi}\cdot aL\tilde{\phi}^T C$$

$$=I_n+aL\tilde{\phi}^T C \tilde{\phi}-aL\tilde{\phi}^T C \tilde{\phi}=I_n$$

$\tilde{\phi}$ 故A、B互逆.

### 参 考 文 献

1. Rayleigh, L., *Theory of Sound*, 1; Dever publications, New York, 131—132, (1945)
2. Cauchy, T. K., O'Kelly, M. E. J., Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *J. Appl. Mech*, 32; (3), 583—588, (1965)
3. Lin, Y. K., Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *J. Appl. Mech*, 33; (2), 471—472, (1966)
4. Wilson, E. L., Penzien, J., Evaluation of orthogonal damping matrices, *Int. Num. Meth. Engng*, 4; (1), 5—10, (1972)
5. Fawzy, I., A theorem on the free vibration of damped systems, *J. Appl. Mech*, 44; (1), 132—134, (1977)
6. Bahar, L. Y., Mallett, R. L., A theorem on the free vibration of damped systems, *J. Appl. Mech*, 45; (1), 225—226, (1978)
7. Foss, K. A., Co-ordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems, *J. Appl. Mech*, 25; 361—364, (1958)
8. Thomson, W. T., Calkins, T., Caravani, P., A numerical study of damping, *Earthg. Eng. Struc. Dynamics*, 3; (1), 97—103, (1974)
9. Cronin, D. L., Approximation for determining harmonically excited response of nonclassically damped systems, *Journal of Engineering for Industry*, 98; (1), 43—47, (1976)
10. Dowell, E. H., Free vibrations of an arbitrary structure in term of component modes, *J. Appl. Mech*, 39; (3), 727—732, (1972)
11. Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, Company, 106—107, (1965)
12. Balda, M., Dynamic properties of turboset rotors, *Dynamic of Rotors*, Iutam Symposium, 27—55, (1974)
13. Timoshenko, S., Young, D. H., Wearev, W., Jr, *Vibration Problems in Engineering*, Fouth Edition, 272—278, (1974)
14. Dostal, M., Roberts, J. B., Holmes, R., The effect of external damping on the vibration of flexible shafts supported on oil-film bearings, *J. Sound. Vib*, 51; (1), 69—87, (1977)
15. Гантмахер, Ф. Р., Лекции по Аналитической Механике, (1960)

16. Brock, J. E., A note on the damped vibration absorber, *J. Appl. Mech.*, **13**: (4), A-284, (1946)
17. 张文, 柔性转子系统的不平衡响应, 复旦学报, (待发表)

## The Forced Response of the Damping Dynamic Systems

Chang Wen (*Fudan University, Shanghai*)

### Abstract

This paper deals with the forced harmonic responses of the discrete or continuous damped systems to harmonic excitation, where the viscous damping matrix cannot be diagonalized. The general explicit expressions of the response solutions are given. Hence, general and analytical study of some phenomena in vibration is made with these expressions. For example, the "fixed amplitude point" phenomena in the single damping systems have been demonstrated generally; the condition, under which all forces that exert on the system and have the same phase, will excite same phase responses, is also discussed.

The solution deduced have only involves the inverse matrices of lower-order; thus, in the numerical computation for digital computers, the method is more simple, economical and accurate than others.

The method described here can be used in the analysis of unbalance responses of the rotor systems.