应用数学和力学，第1卷第2期（1980年8月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法

苏煜城　吴启光（南京大学数学系）

（1979年12月26日收到）

摘　要

本文讨论了含有小参数在高阶导数项的椭圆型方程奇异摄动问题的差分解法。当 $\varepsilon=0$ 时椭圆型方程退化为抛物型方程。作者根据此问题解的边界层性质，构造了特殊的差分格式，研究了它的收敛性和解的渐近性态。最后给出一个数值例题。

一、引　言

近十多年来出现了一些用差分方法研究奇异摄动问题的工作，例如C. E. Pearson[1]，[2]，F. W. Dorr[3]，H. O. Kreiss[4]，A. M. Ильин[5]，K. B. Емельянов[6]等人的工作，这些工作大都是对常微分方程和常微分方程组奇异摄动问题来进行讨论的。

用差分方法解奇异摄动问题需构造适应此问题性质的差分格式，如用一般差分格式将得到与问题不相符合的错误结果，例如，我们解下面的常微分方程第一边值问题：

$$\mathscr{L}_\varepsilon y_\varepsilon\equiv\varepsilon y_\varepsilon''+ay_\varepsilon'=0 \tag{1.1}$$

$$y_\varepsilon(0)=\alpha,\ y_\varepsilon(1)=\beta \tag{1.2}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数，a 是异于零的常数，这一问题的渐近解有如下形式：

$$y_\varepsilon(x)=\begin{cases}\beta+(\alpha-\beta)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}+O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}})\ a>0\\ \alpha+(\beta-\alpha)e^{\frac{a(1-x)}{\varepsilon}}+O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}})a<0\end{cases} \tag{1.3}$$

现用差分格式：

$$\varepsilon y^{(h)}_{x\bar{x}}+a\,y^{(h)}_{\hat{x}}=0 \tag{1.4}$$

$$y^{(h)}(0)=\alpha,\ y^{(h)}(Nh)=\beta \tag{1.5}$$

解问题(1.1)，(1.2)，其中 $y^{(h)}_{x\bar{x}}=(y^{(h)}(x+h)-2y^{(h)}(x)+y^{(h)}(x-h))/h^2$，

$$y^{(h)}_{\hat{x}}=[y^{(h)}(x+h)-y^{(h)}(x-h)]/2h,\ Nh=1.$$

我们知道，这是一个具有二阶精度的差分格式，方程(1.4)的解有如下形式：

$$y^{(h)}(ih)=C_1+C_2\left(\frac{2\varepsilon-ah}{2\varepsilon+ah}\right)^i \tag{1.6}$$

其中 C_1，C_2 是由边界条件(1.5)确定的常数。

当 $\varepsilon\ll h$ 时，$\frac{2\varepsilon-ah}{2\varepsilon+ah}\approx-1$，因此当 $\varepsilon\ll h$ 时差分方程问题解的表达式(1.6)与渐近解表达式(1.3)毫无共同之处，处理此问题的一般方法是根据系数 a 的符号以单边差商来代替方程(1.1)中的一阶导数；当 $a>0$ 时用前差代替；当 $a<0$ 时用后差代替，但差分格式只有一阶精度。

从渐近表达式(1.3)看出，对 $0<x<1$ 内(不包括边界层)任意一点，当 $\varepsilon\to0$ 时 $y_\varepsilon(x)\to\beta(a>0)$ 或 $y_\varepsilon(x)\to\alpha(a<0)$，而 β 和 α 正好是相应情况下退化方程($\varepsilon=0$)的解，易证，如用单边差商代替方程(1.1)中的一阶导数，则当 h 固定，$\varepsilon\to0$ 时，具有小参数 ε 的差分方程的解逼近于退化差分方程的解，也是 β 或 α，因此差分方程解的渐近性态与微分方程(1.1)，(1.2)解的渐近性态是一致的，关于以单边差商代替一阶导数的差分方程解的渐近性态在[3]中进行了详细的研究，如用中心差商代替一阶导数，则从解的表达式(1.6)看到，它的渐近性态与微分方程(1.1)，(1.2)解的渐近性态却有很大差别。

为了使逼近微分方程(1.1)的差分格式能具有二阶精度并且差分方程的解与微分方程的解当 $\varepsilon\to0$ 时有相同的渐近性态，A. M. Ильин[5]提出一个构造差分格式的特殊方法，本文利用他的方法讨论椭圆型偏微分方程的奇异摄动问题。

二、微 分 方 程 问 题

在区域 R：$(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T)$ 内解椭圆型方程第一边值问题：

$$\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}=f(x,y) \tag{2.1}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma=0 \tag{2.2}$$

其中 Γ 是 R 的边界，$\varepsilon>0$ 是小参数。

假定系数 $a(x,y)$ 在 R 内满足下面条件：

$$a(x,y)\geqslant\alpha>0 \tag{2.3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，方程(2.1)退化为抛物型方程

$$\mathscr{L}_0W\equiv\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial W}{\partial y}=f(x,y) \tag{2.4}$$

相应的定解条件为

$$W|_{y=0}=0,\ W(0,y)=W(l,y)=0 \tag{2.5}$$

其中 y 表示时间变量。

由于方程(2.1)当 $\varepsilon=0$ 时退化为抛物型方程(2.4)，因此我们称它为椭圆-抛物偏微分方程，此时椭圆型方程(2.1)的边值问题退化为抛物型方程(2.4)的初值、边值混合问题。这是一个由二阶偏微分方程退化为同阶偏微分方程的情形，在 $y=T$ 这条边上失去一个定解条件，此时在 $y=T$ 附近问题(2.1)，(2.2)的解 $u_\varepsilon(x,y)$ 当 $\varepsilon\to0$ 时不能一致逼近退化问题

(2.4), (2.5) 的解 $W(x,y)$，将产生边界层现象。

按Л. А. Люстерник, В. И. Вишик[7]渐近方法的分析，当系数 $a(x,y)$ 和右端函数 $f(x,y)$ 满足一定的光滑条件并且 $a(x,y)$ 满足条件(2.3)时，退化是正则的，即存在边界层函数使得退化问题的解加上边界层校正项以后能补足所失去的定解条件，并使如此得到的问题 (2.1), (2.2) 的渐近式在 R 内一致成立。

三、构 造 差 分 格 式

根据渐近方法的分析，摄动问题 (2.1),(2.2) 在$y=T$附近有边界层函数

$$v=\exp\left\{-a(x,T)\frac{T-y}{\varepsilon}\right\},$$

这一函数是指数型函数，只在 $y=T$ 附近产生影响，远离 $y=T$ 是一个微小的量，我们构造方程 (2.1) 以下形式的差分格式

$$\gamma u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)+u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)u_{\hat{y}}^{(h,\tau)}=f(x,y) \tag{3.1}$$

其中 h, τ 分别是 x 方向和 y 方向的步长，$N_1h=l, N_2\tau=T$ γ是待定的系数，

$$u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)},\ u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)},\ u_{\hat{y}}^{(h,\tau)}$$

分别是 $u(x,y)$ 关于 x,y 的二阶中心差商和关于 y 的一阶中心差商。假设以

$$\{x_i=ih, y_j=j\tau,\ i=1,2,\cdots,N_1-1, j=1,2,\cdots,N_2-1\}$$

所构成的网格区域为 $R_{h,\tau}$, $\Gamma_{h,\tau}$ 是其边界。

为了确定参数 γ，我们要求当系数 a 为常数时边界层函数 v 满足常系数的齐次差分方程

$$\gamma u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}+u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}-au_{\hat{y}}^{(h,\tau)}=0 \tag{3.2}$$

将 v 代入方程 (3.2)，得到

$$\gamma=\frac{a\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a\tau}{2\varepsilon} \tag{3.3}$$

对于变系数非齐次差分方程 (3.1) 来说，我们自然取γ为以下形式

$$\gamma(x,y)=\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon} \tag{3.4}$$

从而得到摄动问题 (2.1),(2.2) 的相应的差分方程问题

$$\mathscr{L}_{\varepsilon}^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}(x,y)\equiv\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)$$

$$+u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)u_{\hat{y}}^{(h,\tau)}\ f(x,y) \tag{3.5}$$

$$u^{(h,\tau)}\Big|_{\Gamma_{h,\tau}}=0 \tag{3.6}$$

其中 $\Gamma_{h,\tau}$ 是网格区域的边界。

当 h,τ 固定时，函数 $\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}$ 随 ε 趋近于零而趋近于 1，因此当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们得到差分方程 (3.5) 的退化差分方程为：

$$\mathscr{L}_0^{(h,\tau)}W^{(h,\tau)}(x,y)\equiv W_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)W_{\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{3.7}$$

相应的初始条件和边界条件为：

$$W^{(h,\tau)}(x,0)=0,\quad W^{(h,\tau)}(0,y)=0,\quad W^{(h,\tau)}(N_1h,y)=0 \tag{3.8}$$

其中 $W_{\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)$ 是 $W(x,y)$ 的向后差商。差分方程 (3.5) 与摄动方程 (2.1) 是相容的，其截断误差是 $O(\tau^2+h^2)$，而差分方程 (3.7) 正好是退化方程 (2.4) 的隐式差分格式，它是无条件稳定的差分格式。

四、差分格式的收敛性和误差估计

差分格式 (3.5) 是正型差分格式，即

$$u^{(h,\tau)}(x+h,y),\ u^{(h,\tau)}(x-h,y),\ u^{(h,\tau)}(x,y+\tau),\ u^{(h,\tau)}(x,y-\tau)$$

的系数，当 h,τ 适当小时都是正的并且这些系数与 $u^{(h,\tau)}(x,y)$ 的系数之和是非正的，因此，对此差分格式来说最大值原理成立，

我们先证明下面一个引理。

引理：设 $v^{(h,\tau)}(x,y)$ 是给定在 $\bar{R}_{h,\tau}$ 上的函数，则

$$\left|v^{(h,\tau)}(x,y)\right|\leqslant\max_{\Gamma_{h,\tau}}\left|v^{(h,\tau)}(x,y)\right|+\frac{M}{2}\max_{R_{h,\tau}}\left|\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v^{(h,\tau)}(x,y)\right| \tag{4.1}$$

其中 M 是一个与 x,y,ε 无关的常数。

证明：设不等式 (4.1) 右端的第一项为 m_1，第二项为 m_2，作辅助函数

$$W(x,y)=\frac{1}{M}\left[(l-x)x+\left(T-\frac{1}{2}y\right)y\right],$$

$$M=\max_{(x,t)}\left[(l-x)x+\left(T-\frac{1}{2}y\right)y\right] \tag{4.2}$$

显然

$$0\leqslant W(x,y)\leqslant 1$$

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}W(x,y)=\mathscr{L}_\varepsilon W(x,y)<-\frac{2}{M}, \tag{4.3}$$

再考虑函数

$$Z^{(h,\tau)}(x,y)=m_1+m_2W(x,y)\pm v^{(h,\tau)}(x,y) \tag{4.4}$$

那末

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}Z^{(h,\tau)}(x,y)\leqslant-\max\left|\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v^{(h,\tau)}(x,y)\right|\pm\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v^{(h,\tau)}(x,y)\leqslant 0 \tag{4.5}$$

而函数 $Z^{(h,\tau)}(x,y)$ 在 $\Gamma_{h,\tau}$ 上是非负的、由最大值原理，在 $\overline{R}_{h,\tau}$ 上 $Z^{(h,\tau)}(x,y)\geqslant 0$，从而证得引理的结论。

定理 1，假设系数 $a(x,y)$ 和右端函数 $f(x,y)$ 有直到二阶为止的连续偏导数，

$\|a(x,y)\|_{C^2}\leqslant m$, $\|f(x,y)\|_{C^2}\leqslant m$, 并且 $\alpha\leqslant a(x,y)\leqslant m$, 则对于固定的 $\varepsilon>0$, 在$R_{h,\tau}$上差分方程问题(3.5), (3.6)的解 $u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)$ 与微分方程问题(2.1), (2.2)的解 $u_\varepsilon(x,y)$ 有下面的估计式

$$\left|u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)-u_\varepsilon(x,y)\right|\leqslant C(\varepsilon,\alpha,m)h^2 \tag{4.6}$$

其中m是与 x,y 无关的常数。

证：假设 $v_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)=u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)-u_\varepsilon(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)&=\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}[u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)-u_\varepsilon(x,y)]\\&=f(x,y)-\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}u_{y\bar{y}}-u_{x\bar{x}}+a(x,y)u_{\hat{y}}\\&=\varepsilon\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-u_{y\bar{y}}\right)+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-u_{x\bar{x}}\right)-a(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-u_{\hat{y}}\right)\\&\quad+\left(\varepsilon-\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}\right)u_{y\bar{y}}\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)\right|&\leqslant\frac{\varepsilon\tau^2}{12}\max\left|\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\right|+\frac{h^2}{12}\max\left|\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\right|\\&\quad+\frac{1}{6}m\tau^2\max\left|\frac{\partial^3u}{\partial y^3}\right|+\left|\varepsilon-\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}\right|\left|u_{y\bar{y}}\right|\end{aligned}$$

根据定理的条件，设 $\|u_\varepsilon\|_{C^4}\leqslant C_1(\varepsilon,\alpha,m)$, $\tau/h=r=\text{const}$.则

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)\right|&\leqslant\left(\frac{\varepsilon r^2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{mr^2}{6}+\frac{m^2}{12\varepsilon}\right)C_1(\varepsilon,\alpha,m)h^2\\&=C(\varepsilon,\alpha,m)h^2\end{aligned}$$

因为 $\max\limits_{\Gamma_{h,\tau}}\left|v_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)\right|=0$, 故由引理得到定理 1 的结论。

五、差分方程解的渐近性态

我们在(一)中曾以问题(1.1), (1.2)为例讨论过以单边差商和中心差商逼近方程(1.1)的一阶导数时所得差分方程解的渐近性态，发现用单边差商时差分方程解的渐近性态与微分方程解的渐近性态是一致的，如用中心差商则不然，不过，如用A. M. Ильин方法解例题(1.1), (1.2)可与单边差商一样得到同样的结果。

在这一部份我们将证明，当 h, τ固定，$\varepsilon\to0$ 时差分方程(3.5), (3.6)解的渐近性态与微分方程(2.1), (2.2)解的渐近性态是一致的。

根据条件(2.3), 方程(2.1)退化为方程(2.4)是正则的、在$\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y<T\}$内当 $\varepsilon\to0$ 时摄动问题(2.1), (2.2)的解 $u_\varepsilon(x,y)$逼近于退化问题(2.4), (2.5)的解 $W(x,y)$, (参看[8], [9])

由(四)中引理，差分方程(3.5), (3.6)的解满足不等式

$$\left|u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)\right|\leqslant\frac{M}{2}m_2=M_1 \tag{5.1}$$

其中M_1是与ε,x,y无关的常数，因此$\{u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)\}$是一致有界的，按 Bolzano-Weierstrass定理，存在序列$\varepsilon_n\to 0$及网格函数$U^{(h,\tau)}(x,y)$使得

$$\lim_{n\to\infty} u_{\varepsilon_n}^{(h,\tau)}(x,y)=U^{(h,\tau)}(x,y),$$（对于固定的h,τ），而且此收敛性在区域R：$\{0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T\}$上是一致的。不难证得此极限是唯一的，因此有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon^{(h,\tau)}(x,y)=U^{(h,\tau)}(x,y)$$

由差分方程(3.5)，我们知道，$U^{(h,\tau)}(x,y)$满足方程(3.7)，
即

$$U^{(h,\tau)}(x,y)=W^{(h,\tau)}(x,y)$$

同样，$U^{(h,\tau)}(x,y)$满足相应的初，边值条件，因此差分方程(3.5)，(3.6)的解对于固定的h,τ，在$\{0\leqslant x_i\leqslant l,\ 0\leqslant y_j<T\}$内逼近于退化差分方程的解，这与微分方程(2.1)，(2.2)的解的渐近性态是一致的，故有

定理 2，在$\{0\leqslant x_i\leqslant l,\ 0\leqslant y_j<T\}$内，让$h$，$\tau$固定，当$\varepsilon\to 0$时差分方程(3.5)，(3.6)的解逼近于退化差分方程(3.7)，(3.8)的解。

注：如果我们对方程(2.1)不用差分格式(3.5)，而用通常的差分格式

$$\mathscr{L}_{\varepsilon 1}^{(h,\tau)} u^{(h,\tau)}(x,y)\equiv \varepsilon u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)+u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)\,u_{\hat{y}}^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{5.2}$$

则当$\varepsilon=0$时方程(27)退化为方程

$$\mathscr{L}_{01}^{(h,\tau)} W^{(h,\tau)}(x,y)\equiv W_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)W_{\hat{y}}^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{5.3}$$

众所周知方程(5.3)与方程(2.4)是相容的，但它是一个完全不稳定的差分格式。

六、数　值　例　子

在正方形区域R：$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$内考虑椭圆型方程第一边值问题：

$$\begin{cases} \mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon\equiv \varepsilon\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}=x(1-x^2), & (0<x<1,\ 0<y<1) \\ u_\varepsilon|_\Gamma=0 \end{cases} \tag{6.1}$$

相应的退化问题为

$$\begin{cases} \mathscr{L}_0 W\equiv\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\dfrac{\partial W}{\partial y}=x(1-x^2) \\ W(x,0)=0,\ W(0,y)=W(1,y)=0 \end{cases} \tag{6.2}$$

用分离变量法求得退化问题(6.2)的解为：

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cos n\pi\sin n\pi x}{(n\pi)^5}\left(1-e^{-n^2\pi^2 y}\right) \tag{6.3}$$

摄动问题(6.1)的渐近解为：

$$u_\varepsilon(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cos n\pi\sin n\pi x}{(n\pi)^5}\left\{\left(1-e^{-n^2\pi^2 y}\right)+\left(e^{-n^2\pi^2}-1\right)e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}}\right\}$$

$$+O(\varepsilon) \tag{6.4}$$

根据本文提出的差分格式，构造方程(6.1)的差分方程为：

$$\frac{\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{\tau}{2\varepsilon}\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$-\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\tau}=ih(1-i^2h^2) \tag{6.5}$$

我们称它为格式(Ⅰ)，为简单起见，选取正方形网格，即$h=\tau$，用$2h$乘方程(6.5)两端得到下面的差分方程：

$$u_{i,j}=Au_{i,j+1}+Bu_{i,j-1}+C(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+D \tag{6.6}$$

其中

$$A=\frac{\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}-1}{2\left(\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}+\frac{2}{h}\right)},\qquad B=\frac{\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}+1}{2\left(\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}+\frac{2}{h}\right)}$$

$$C=\frac{1}{h\left(\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}+\frac{2}{h}\right)},\qquad D=\frac{ih^2(i^2h^2-1)}{\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}+\frac{2}{h}}, \tag{6.7}$$

$$\operatorname{cth}\frac{h}{2\varepsilon}=\frac{1+\exp\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right)}{1-\exp\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right)}$$

当$\varepsilon\to 0$时差分方程(6.5)退化为抛物型方程(6.2)的隐式差分方程：

$$W_{i+1,j}-(2+h)W_{i,j}+W_{i-1,j}=-hW_{i,j-1}+ih^3(1-i^2h^2) \tag{6.8}$$

在计算中我们选取常用的只有一阶精度的差分格式(简称为格式(Ⅱ))

$$\varepsilon\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$-\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h}=ih(1-i^2h^2) \tag{6.9}$$

与格式(Ⅰ)进行比较

用h^2乘方程(6.9)两端则有

$$u_{i,j}=A_1u_{i,j+1}+B_1u_{i,j-1}+C_1(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+D_1 \tag{6.10}$$

其中

$$A_1=\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+2+h},\qquad B_1=\frac{\varepsilon+h}{2\varepsilon+2+h}$$

$$C_1=\frac{1}{2\varepsilon+2+h},\qquad D_1=\frac{(i^2h^2-1)ih^3}{2\varepsilon+2+h} \tag{6.11}$$

按给定的边界条件，我们用逐次超松弛(SOR)方法解上述两种差分方程，其迭代公式分别为：

$$u_{i,j}^{(k+1)}=\omega_{\text{opt}}\left\{Bu_{i,j-1}^{(k+1)}+Cu_{i-1,j}^{(k+1)}+Au_{i,j+1}^{(k)}+Cu_{i+1,j}^{(k)}\right\}$$

$$+(1-\omega_{\text{opt}})u_{i,j}^{(k)}+\omega_{\text{opt}}D \tag{6.12}$$

$$u_{i,j}^{(k+1)}=\omega_{\mathrm{opt}}\left\{B_1u_{i,j-1}^{(k+1)}+C_1u_{i-1,j}^{(k+1)}+A_1u_{i,j+1}^{(k)}+C_1u_{i+1,j}^{(k)}\right\}$$

$$+(1-\omega_{\mathrm{opt}})\,u_{i,j}^{(k)}+\omega_{\mathrm{opt}}\cdot D_1 \tag{6.13}$$

其中ω_{opt}为松弛因子，它由公式

$$\omega_{\mathrm{opt}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}},\qquad \lambda=\cos\frac{\pi}{n}$$

确定。

下面首先就$\varepsilon=0.01$的情形，用逐次减小的步长分别对渐近解和两种差分方程的解进行了计算，在计算结果中我们选取若干个点列表比较如下：

$\varepsilon=0.01$，$h=1/10$，

点坐标	$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{9}{10}\right)$
渐近解	−0.036412	−0.037788	−0.024322	−0.011498	−0.022012	−0.030616
格式（Ⅰ）	−0.036155	−0.037576	−0.024236	−0.011561	−0.022130	−0.030782
格式（Ⅱ）	−0.036067	−0.037486	−0.024179	−0.010994	−0.021048	−0.029237

$\varepsilon=0.01$，$h=1/20$

点坐标	$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{10},\frac{19}{20}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{19}{20}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{19}{20}\right)$
渐近解	−0.036412	−0.037788	−0.024322	−0.016825	−0.026429	−0.033718
格式（Ⅰ）	−0.036299	−0.037678	−0.024257	−0.016883	−0.026520	−0.033835
格式（Ⅱ）	−0.036202	−0.037594	−0.024211	−0.014987	−0.023550	−0.030064

$\varepsilon=0.01$，$h=1/40$

点坐标	$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{10},\frac{39}{40}\right)$	$\left(\frac{2}{10},\frac{39}{40}\right)$	$\left(\frac{3}{10},\frac{39}{40}\right)$
渐近解	−0.036412	−0.037788	−0.024322	−0.017927	−0.026338	−0.032429
格式（Ⅰ）	−0.036378	−0.037619	−0.024120	−0.018227	−0.026783	−0.032986
格式（Ⅱ）	−0.036660	−0.037993	−0.024422	−0.014980	−0.022033	−0.027157

根据上表数据分析，我们看到，对于固定的ε，当h变小时，格式（Ⅰ）和格式（Ⅱ）的解接近于渐近解，而格式（Ⅰ）比格式（Ⅱ）的精度高，特别在边界层附近的点子上（即表的最后三个点子上）。

其次，对于固定的 h、选取不同的 ε，将格式(Ⅰ)的解和退化问题(6 8)的解进行比较。取 $h=1/20$。

点坐标		$\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{10},\frac{19}{20}\right)$	$\left(\frac{8}{10},\frac{19}{20}\right)$	$\left(\frac{9}{10},\frac{19}{20}\right)$
退化问题的解		−0.036501	−0.037869	−0.024382	−0.029056	−0.018997	−0.006617
格式(Ⅰ)的解	$\varepsilon=10^{-2}$	−0.036198	−0.037893	−0.024402	−0.028971	−0.018950	−0.006612
	$\varepsilon=10^{-3}$	−0.036502	−0.037898	−0.024407	−0.029100	−0.019034	−0.006641
	$\varepsilon=10^{-4}$(*)	−0.036502	−0.037898	−0.024407	−0.029100	−0.019034	−0.006641

从表上看到，当 ε 逐渐减小时，格式(Ⅰ)的解接近于退化问题的解，这与理论上的渐近分析是一致的。

(*) $\varepsilon=10^{-3}$以后格式(Ⅰ)的解在各点的近似值基本上是一致的，故未列出。

参 考 文 献

1. Pearson, C. E., On the Differential Equation of Boundary Layer Type, *J. Math. Phys.*, 47, 2, 134—154, (1968).
2. Pearson, C. E., On Non-Linear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type, *J. Math. Phys.*, 47, 4, 350—358, (1968).
3. Dorr, F. W., The Numerical Solution of Singular Perturbations of Boundary Value Problems, *SIAM, J. Numer. Anal.* 1, 2, (1970).
4. Kreiss, H. O., Numerical Methods for Singular Perturbation Problems, *SIAM—AMS* Proceedings 10, (1976), 73—86.
5. Ильин, А. М., Разностная Схема для Дифференциальных Уравнений с Малым Параметром, Матем. Заметки, (1969), 2, 237—248.
6. Емельянов, К. В., О разностной схеме для Обыкновенного Дифференциального Уравнения с Малым Параметром, Ж. Вычисл Матем. Матем. Физ. Т. 18, 5, (1978).
7. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А., Регулярно Вырождение и Пограничный слой для Линейных Дифференциальных Уравнений с Малым Параметром, УМН, 12:5 (77), (1957), 3—122.
8. Су Юй-чэн, Асимптотика Решений Некоторых Вырождающихся Квазилинейных Гиперболических Уравнений с Малым Параметром, ДАН, 138, 1, (1961)
9. Zlamal, M., The Parabolic Equation as A Limiting Case of A Certain Elliptic Equation, *Ann. Math. Pure Appl.* 57, (1962).

The Difference Method for the Solution of Singular -Perturbation Problems for the Elliptic-Parabolic Partial Differential Equation

Su Yu-cheng Wu Chi-kuang

(Nanking University)

Abstract

In this paper is discussed the difference method for the solution of singular perturbation problems for the elliptic equations, involving small parameter in the higher derivatives. As $\varepsilon=0$, the original equations are degenerated into the parabalic equations.

Authors constructed special difference scheme by means of the boundary layer properties of the solutions of these problems and investigated the convergence of this scheme and asymptotic behaviour of the solutions. Finally, a numerical example is given.