应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于弹性板弯曲变形的Reissner理论*

苗天德　程昌钧（兰州大学数力系）

（1979年12月15日收到）

摘　　要

本文根据不完全广义余能原理重新推导了Reissner方程，使应力函数ψ以拉格朗日乘子的方式从变分中自然引出，同时明确了Reissner方程的解的结构。在此基础上提出了一个简化理论，它只需求解一个类似于经典薄板理论的四阶方程，即可得到计及剪力对弯曲变形影响的令人满意的结果。

一、引　　言

经典的弹性薄板弯曲理论，不计横向剪力对变形的影响。因此，当板的相对厚度较大时，以及在板的支撑边缘或开孔附近（当孔径与板厚同数量级时）引起相当大的误差。半个多世纪以来，人们不断寻求关于板弯曲理论的更合理的物理模型。其中，E. Reissner[1,2,3]于1944—47年间提出的一个理论（以下简称Reissner理论，并将按此理论导出的方程称做Reissner方程）受到了广泛的重视，至今还不时有人对Reissner理论进行讨论并应用这一理论计算各种实际问题。特别在断裂力学方面，根据Reissner理论分析薄板弯曲裂纹问题的文献日渐增多。

在Reissner理论中，引入两个变量w（板的挠度）和ψ(Reissner称之为应力函数)，它们分别满足一个四阶方程及一个二阶方程。总起来说问题是六阶的，可以在每一边界点给出三个边界条件，而不是经典理论的二个边界条件。但是，由于方程的复杂性带来的数学上的困难，更主要的由于没有弄清楚Reissner方程的解的结构，直到目前为止，只对矩形板的若干情形得到了级数解[4,5,6]，而源于Reissner理论提出的一些简化方案也是方向不甚清楚的。

本文的目的是：（1）根据钱伟长教授提出的不完全广义余能原理[7]的原则，重新推导了Reissner方程，使前述函数ψ以拉格朗日乘子的方式直接从变分原理中引出。以前，由于未能找到相应于Reissner方程的完整变分公式，使基于这个理论的板的有限元方法遇到了困难[8]。在推导中，我们还同时弄清了Reissner方程的解的结构，得到的结论与新近程埙[9]的结果不谋而合。（2）、在（1）的基础上提出了一个简化理论，它只需求解一个四阶方程。我们应用这个简化理论求得了一系列具体问题的解答。可以证明，其中一些解答就是Reissner方程的精确解，而另外一些解答与精确解比较，也有良好的近似度。（3）、类似于弹性力学平

* 叶开沅推荐

面问题，引入两个应力函数以代替原来的变量，这两个新变量所满足的连续性条件仍然归结为一个四阶方程和一个二阶方程。这样做对于处理诸如板的裂纹问题常常是方便的。

二、Reissner方程的导出与解的结构

Reissner[2]放弃了经典理论的kirchhoff直法线假定，而另外采用σ_x，σ_y，τ_{xy}沿板厚线性分布的假定。据此，他导出了如下的弹性板弯曲变形的余能表达式

$$
\begin{aligned}
\Pi= & \frac{12}{2Eh^3}\iint\Big\{(M_x+M_y)^2+2(1+\nu)(M_{xy}^2-M_xM_y) \\
& +\frac{1+\nu}{5}h^2(Q_x^2+Q_y^2)-\frac{\nu}{5}h^2q(M_x+M_y)\Big\}\,dxdy \\
& -\int(M_n\bar{\varphi}_n+M_{ns}\bar{\varphi}_s+Q_n\bar{w})ds
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

M_x，M_y，M_{xy}，Q_x，Q_y应满足与经典板理论同样的平衡方程

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{2y} \tag{2.2a}$$

$$Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{2.2b}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \tag{2.3}$$

我们采用的记号与Reissner[2]的稍有不同，这里

Π——系统的余能
h——板的厚度
E,ν——弹性常数
M_x,M_y,M_{xy}——板中弯矩与扭矩
Q_x,Q_y——板中横向剪力
φ_x,φ_y——板的中面变形的转角
w——板的挠度
φ_x,φ_y,w具有某种平均的意义（见[10]p. 168）
n,s——标记板的边界的法向与切向
$\bar{\varphi}_n,\bar{\varphi}_s,\bar{w}$——相应量的边界值
$q(x,y)$——板的横向载荷

我们来考虑余能Π的一阶变分，要求在变分过程中始终保证平衡方程(2.3)的满足。不同于Reissner的推导，我们在(1.3)之外，再加上一个限制，即要求

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y}-\frac{\partial Q_y}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

这样得到的Q_x,Q_y可以认为是(2.3)的一组特解，不妨记作Q_x'，Q_y'。至于这样做的原因以后就会明白。

为此，根据不完全广义余能原理[7]，利用(2.1)我们构造一个泛函

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\text{II}}= & \frac{12}{2Eh^3}\iint\Big\{(M_x+M_y)^2+2(1+\nu)(M_{xy}^2-M_xM_y) \\
& +\frac{1+\nu}{5}h^2(Q_x'^2+Q_y'^2)-\frac{\nu}{5}h^2q(M_x+M_y)\Big\}dxdy \\
& -\int(M_n\bar{\varphi}_n+M_{ns}\bar{\varphi}_s+Q_n\bar{w})ds
\end{aligned}
$$

$$+\iint\lambda\left[\frac{\partial Q'_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q\right]dxdy$$

$$+\iint\psi\left[\frac{\partial Q'_y}{\partial x}-\frac{\partial Q'_x}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.5}$$

式中，$\lambda=\lambda(x,y)$，$\psi=\psi(x,y)$为拉格朗日乘子。真实状态应使$\delta\Pi_R=0$。

对(2.5)具体作变分运算：

$$\frac{12}{Eh^3}\iint\left\{(M_x+M_y)(\delta M_x+\delta M_y)+(1+\nu)(2M_{xy}\delta M_{xy}-M_x\delta M_y-M_y\delta M_x)\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu}{5}h^2(Q'_x\delta Q'_x+Q'_y\delta Q'_y)-\frac{\nu}{10}h^2q(\delta M_x+\delta M_y)\right\}dxdy$$

$$-\int[\delta M_n\bar{\varphi}_n+\delta M_{ns}\bar{\varphi}_s+\delta Q_n\bar{w}]ds+\iint\delta\lambda\left[\frac{\partial Q'_x}{\partial x}+\frac{\partial Q'_y}{\partial y}+q\right]dxdy$$

$$+\iint\delta\psi\left[\frac{\partial Q'_y}{\partial x}-\frac{\partial Q'_x}{\partial y}\right]dxdy+\iint\lambda\left[\delta\left(\frac{\partial Q'_x}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial Q'_y}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$+\iint\psi\left[\delta\left(\frac{\partial Q'_y}{\partial x}\right)-\delta\left(\frac{\partial Q'_x}{\partial y}\right)\right]dxdy=0 \tag{2.6}$$

由分部积分，有

$$\iint\lambda\left[\delta\left(\frac{\partial Q'_x}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial Q'_y}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=-\iint\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta Q'_x+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta Q'_y\right]dxdy+\int\lambda\delta Q'_nds \tag{2.7a}$$

$$\iint\psi\left[\delta\left(\frac{\partial Q'_y}{\partial x}\right)-\delta\left(\frac{\partial Q'_x}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=-\iint\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta Q'_y-\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta Q'_x\right]dxdy+\int\psi\delta Q'_sds \tag{2.7b}$$

现在，我们再作以下两个假定

1） 任给$\delta Q'_s$，在板的边界我们总可以用作功（严格地说应是余功）相等的原则将$\delta Q'_s$转化为某个$\delta Q''_n$，即假定

$$\int\psi\delta Q'_sds=\int\lambda\delta Q''_nds \tag{2.8}$$

且
$$\delta Q_n=\delta Q'_n+\delta Q''_n \tag{2.9}$$

2） 将整个问题的解分解为两部分。与前述Q'_x，Q'_y相对应的为M'_x，M'_y，M'_{xy}，与剪力的其余部分（后面将会看到，这部分对应(2.3)式的齐次通解）Q''_x，Q''_y相对应的为M''_x，M''_y，M''_{xy}。我们假定Q''_x、Q''_y不引起板的弯曲变形。因此M''_x，M''_y，M''_{xy}是一种内部约束力，相应于它们的余功为零。因而在变分式(2.6)中，凡包含因子$\delta M''_x$，$\delta M''_y$，$\delta M''_{xy}$的项都应消去。

将(2.7a,b)代入(2.6)，利用假定1）的(2.8)，(2.9)式，由于$\delta Q_n=\delta Q'_n+\delta Q''_n$的任意性，可知应取

$$\bar{w}=\lambda(s) \tag{2.10}$$

因而乘子$\lambda(x,y)$就是板的挠度函数$w(x,y)$.

对(2.6)再进行一次分部积分，利用假定2），同时注意到$\delta Q'_x$，$\delta Q'_y$与$\delta M'_x$，$\delta M'_y$，$\delta M'_{xy}$之间应满足平衡方程(2.2)，则得到

$$\begin{aligned}
&\iiint\Big\{\Big[\frac{12}{Eh^3}\Big(M_x-\nu M_y-\frac{1+\nu}{5}h^2\frac{\partial Q'_x}{\partial x}-\frac{\nu}{10}h^2q\Big)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\Big]\delta M'_x\\
&+\Big[\frac{12}{Eh^3}\Big(M_y-\nu M_x-\frac{1+\nu}{5}h^2\frac{\partial Q'_y}{\partial y}-\frac{\nu}{10}h^2q\Big)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\Big]\delta M'_y\\
&+\Big[\frac{12}{Eh^3}\Big(2(1+\nu)M_{xy}+\frac{1+\nu}{5}h^2\Big(\frac{\partial Q'_x}{\partial y}+\frac{\partial Q'_y}{\partial x}\Big)\Big)-2\frac{\partial w}{\partial x\partial y}\\
&+\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big)\Big]\delta M'_{xy}\Big\}dxdy+\iint\delta w\Big(\frac{\partial Q'_x}{\partial x}+\frac{\partial Q'_y}{\partial y}+q\Big)dxdy\\
&+\iint\delta\psi\Big(\frac{\partial Q'_y}{\partial x}-\frac{\partial Q'_x}{\partial y}\Big)dxdy-\int\Big\{\Big[\bar{\varphi}_n+\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{12(1+\nu)}{5hE}Q'_n-\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big]\delta M'_n\\
&+\Big[\bar{\varphi}_s+\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{12(1+\nu)}{5hE}Q'_s+\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big]\delta M'_s-[\bar{w}-w](\delta Q'_n+\delta Q''_n)\Big\}ds=0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

由于δQ_n，$\delta M'_s$，$\delta M'_y$，$\delta M'_{xy}$及δw，$\delta\psi$的变分任意性得到

在给定位移边界处

$$-\frac{\partial w}{\partial n}+\frac{12(1+\nu)}{5hE}Q'_n+\frac{\partial\psi}{\partial s}=\bar{\varphi}_n \tag{2.12a}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{12(1+\nu)}{5hE}Q'_s-\frac{\partial\psi}{\partial n}=\bar{\varphi}_s \tag{2.12b}$$

$$w=\bar{w} \tag{2.12c}$$

在板内

$$\frac{\partial Q'_x}{\partial x}+\frac{\partial Q'_y}{\partial y}+q=0 \tag{2.13a}$$

$$\frac{\partial Q'_y}{\partial x}-\frac{\partial Q'_x}{\partial y}=0 \tag{2.13b}$$

$$M_x-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-D\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)+\frac{h^2}{5}\frac{\partial Q'_x}{\partial x}-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.14a}$$

$$M_y+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-D\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+\frac{h^2}{5}\frac{\partial Q'_y}{\partial y}-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.14b}$$

$$M_{xy}-\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big)=(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{h^2}{10}\Big(\frac{\partial Q'_x}{\partial y}+\frac{\partial Q'_y}{\partial x}\Big) \tag{2.14c}$$

式中

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.15}$$

(2.14)式是由(2.11)中二重积分前三项的被积函数分别等于零给出的三个方程，经解出M_x，M_y，M_{xy}而得到的。

容易看出(2.14)式左边的弯矩和扭矩与特解Q'_x，Q'_y相对应，即

$$M'_x=M_x-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{2.16a}$$

$$M'_y=M_y+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{2.16b}$$

$$M'_{xy}=M_{xy}-\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \tag{2.16c}$$

因而

$$M''_x=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{2.17a}$$

$$M''_y=-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{2.17b}$$

$$M''_{xy}=\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \tag{2.17c}$$

$$M_x=M'_x+M''_x \tag{2.18a}$$

$$M_y=M'_y+M''_y \tag{2.18b}$$

$$M_{xy}=M'_{xy}+M''_{xy} \tag{2.18c}$$

另外，由(2.12)式不难看出，可令

$$Q''_x=\frac{5Eh}{12(1+\nu)}\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{2.19a}$$

$$Q''_y=-\frac{5Eh}{12(1+\nu)}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.19b}$$

及

$$\varphi_x=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{12(1+\nu)}{5Eh}(Q'_x+Q''_x) \tag{2.20a}$$

$$\varphi_y=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{12(1+\nu)}{5Eh}(Q'_y+Q''_y) \tag{2.20b}$$

将(2.19)式代入平衡方程(2.3)，显见Q''_x，Q''_y是方程(2.3)的齐次（$q=0$）通解。因而根据微分方程理论，

$$Q_x=Q'_x+Q''_x \tag{2.21a}$$

$$Q_y=Q'_y+Q''_y \tag{2.21b}$$

就是方程(2.3)的一般解。

这样一来，整个问题的内容清晰地分解为两部分：一部分与方程(2.3)的特解Q'_x，Q'_y相

对应，另一部分与方程(2 3)的齐次通解Q''_x，Q''_y相对应。

由方程(2.2)和(2.3)消去Q_x，Q_y，再以(2.14)代入，便导出方程

$$D\nabla^4 w=q-\frac{h^2}{10}\ \frac{2-\nu}{1-\nu}\nabla^2 q \tag{2.22}$$

式中 $\nabla^4(\quad)=\nabla^2\nabla^2(\quad)$，而 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$为调和算子。

又将(2.17)、(2.19)式代入方程(2.2)，可导出另一微分方程

$$\nabla^2\psi-\frac{10}{h^2}\psi=0 \tag{2.23}$$

此式可以解得ψ。由余能原理及方程(2.23)的性质，不难理解乘子ψ是一种位移函数，Reissner称它为应力函数是不恰当的。

(2.22)，(2.23)就是弹性板弯曲问题的 Reissner 理论的基本方程组[10]。但是在这里，不同于Reissner 的作法，我们是通过变分原理将函数ψ自然引入的。同时第一次直接给出了ψ与M_x. M_y，M_{xy}的关系，揭示了解的结构及其物理意义。关于这一点后面再作说明。

现在我们证明，特解Q'_x，Q'_y可以由挠度w表出。事实上，若设

$$Q'_x=\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{2.24a}$$

$$Q_y=\frac{\partial\Psi}{\partial y} \tag{2.24b}$$

则加于这组特解的限制方程(2.13)自动满足。将(2.24)代入(2.3)，得

$$\nabla^2\Psi=-q \tag{2.25}$$

但是我们并不需要通过求解这个方程来决定Q'_x，Q'_y。事实上，以(2.24)代入(2.14)再代入(2.2)，同时注意到(2.19)，(2.21)，(2.23)，(2.25)等，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\nabla^2 w-\frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2 q-\Psi\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-D\nabla^2 w-\frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2 q-\Psi\right)=0$$

如果不计与剪力无关的积分常数，这便导出

$$\Psi=-D\nabla^2 w-\frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2 q \tag{2.26}$$

只要由(2.22)式解出w，则由此式立即可得到Ψ，再通过(2.24)式便得到Q'_x，Q'_y。

我们总结一下以上得到的结果。首先为方便起见，不妨取$\frac{5Eh}{12(1+\nu)}\psi$作为新未知函数，但仍采用原符号$\psi$。于是由(2.21)，(2.19)，(2.24)诸式得

$$Q_x=\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{2.27a}$$

$$Q_y=\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.27b}$$

其中Ψ对应一组特解，ψ对应齐次通解($q=0$)。由(2.14)式

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_x}{\partial x}-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.28a}$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.28b}$$

$$M_{xy}=(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right) \tag{2.28c}$$

又由(2.20)式

$$\varphi_x=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{12(1+\nu)}{5Eh}Q_x \tag{2.29a}$$

$$\varphi_y=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{12(1+\nu)}{5Eh}Q_y \tag{2.29b}$$

而w，ψ分别由方程(2.22)与(2.23)确定。Ψ则由w通过(2.26)式给出。

美籍华人程埙教授[9]最近从三维弹性力学的Navier方程出发，事先不用假定，系统地导出了弹性板弯曲的三个基本方程。其中第三个基本方程的解不给出横向剪力。在一般每一边界点不超出三个边界条件的板弯曲问题中可不予考虑。[9]中具体讨论了$q=0$的情形。其第一个基本方程称为双调和方程：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4 w=0\\&M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{8+\nu}{40}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2 w\right)\\&M_{xy}=-D\left((1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{8+\nu}{40}h^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2 w\right)\\&Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

这对应我们的特解Q'_x，Q'_y。事实上，由(2.22)，(2.14)，(2.16)，(2.24)，(2.26)等式，令$q=0$，即得

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4 w=0\\&M'_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{5}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2 w\right)\\&M'_{xy}=-D\left((1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{1}{5}h^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2 w\right)\\&Q'_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

可以看出，以上两种结果仅M_x，M_y，M_{xy}的最末一项的系数略有不同，绝对差值为$\frac{8+\nu}{40}-\frac{1}{5}=\frac{\nu}{40}$，当极限情况$\nu=\frac{1}{2}$时，也只有$\frac{1}{80}$。

与板的经典理论比较，这一组基本解中，多出了包含有h^2的附加项，它刻画了剪力对板弯曲变形的影响。

第二个基本方程称作剪切方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 S-\frac{\pi^2}{h^2}S=0\\
&M_x=-M_y=\frac{\partial h^2}{\pi^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}\\
&M_{xy}=\frac{h^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)\\
&Q_x=\frac{\partial S}{\partial y},\quad Q_y=-\frac{\partial S}{\partial x}
\end{aligned}\right\}\tag{2.32}
$$

这又与我们的齐次通解 Q''_x，Q''_y 相对应，由(2.23)，(2.17)，(2.19)(注意已用ψ代替了$\frac{5Eh}{12(1+\nu)}\psi$)有

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\psi-\frac{10}{h^2}\psi=0\\
&M''_x=-M''_y=\frac{h^2}{5}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\\
&M''_{xy}=\frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\\
&Q''_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad Q''_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}
\end{aligned}\right\}\tag{2.33}
$$

解答(2.32)与(2.33)结构相同，仅在数值上略有偏差。根据前面在变分推导中所采用的假定2），这第二组基本解不引起板的弯曲变形，而只使板产生一种平行于未变形中面的剪切（平行于板中面的层与层之间的相对滑动），这一点也不难由前面导出的方程组直接给予证明。这与[9]的结论也是一致的。

对比[9]的结果与我们对Reissner方程分解的结果，可以说是异途同归。

三、一个简化的Reissner理论

我们试图给出Reissner理论的一个简化计算方案。在所有情况下，我们都把方程(2.3)的齐次解ψ略掉，即取

$$\psi(x,y)\equiv 0 \tag{3.1}$$

这时，若采用如下的新变量

$$w_1=w-\frac{12}{5}\frac{1+\nu}{Eh}\Psi \tag{3.2a}$$

$$\varphi_{x1}=\varphi_x=-\frac{\partial w_1}{\partial x},\quad \varphi_{y1}=\varphi_y=-\frac{\partial w_1}{\partial y} \tag{3.2b}$$

$$Q_{x1}=Q_x-\frac{h^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial q}{\partial x},\quad Q_{y1}=Q_y-\frac{h^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial q}{\partial y} \tag{3.2c}$$

$$M_{x1}=M_x-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu},\quad M_{y1}=M_y-\frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu},\quad M_{xy1}=M_{xy} \tag{3.2d}$$

$$q_1 = q + \frac{h^2}{10} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \nabla^2 q \tag{3.2e}$$

则方程(2.2)，(2.3)，(2.28)．(2.22)

$$\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial y} + q_1 = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy1}}{\partial y} - Q_{x1} = 0 \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial M_{y1}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy1}}{\partial x} - Q_{y1} = 0 \tag{3.4b}$$

$$M_{x1} = -D\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right) \tag{3.5a}$$

$$M_{y1} = -D\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) \tag{3.5b}$$

$$D\nabla^4 w_1 = q_1 \tag{3.6}$$

统观方程(3.3)—(3.6)，它们与薄板弯曲经典理论的方程组形式上一模一样。这样一来，我们也就明确了当略去齐次解 ψ 而只保留一个四阶方程(2.22)的情况下，边界条件的提法亦应该与经典理论一样来处理。还原到原来的变量，则简化理论的边界条件是在边界的每一点给出如下两个条件（对每一边界点，在(3.7a)，(3.7b)每组中只能提一个）：

$$w = \bar{w} \quad \text{或者} \quad Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \overline{Q}_n \tag{3.7a}$$

$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n \quad \text{或者} \quad M_n = \overline{M}_n \tag{3.7b}$$

这里$\overline{w}$，$\bar{\varphi}_n$，$\overline{Q}_n$，$\overline{M}_n$分别表示边界上给定的挠度、转角、剪力及弯矩。以上各式中右端出现的量当然应按前述带“′”的相应量的计算公式去计算。

由第二节易知，这个简化方案的物理实质是保留了剪力对弯曲变形的影响而略去了剪力所引起的板面各平行层之间的剪切。

可以指出，当条件 $\frac{\partial Q_x}{\partial y} = \frac{\partial Q_y}{\partial x}$ 成立的情况下（如下例中极座标下的圆板轴对称弯曲问题），简化理论的解其实就是Reissner理论的精确解。

Speare和Kemp[8]1977年提出了一个简化理论，他们导出了一个只包含一个未知量w(挠度）的六阶方程，并且声称他们的近似具有h^2（h为板厚）阶的精度，略去了 h^4 阶及其更高阶的小量。但是不难证明，他们只是对如本文指出的Reissner方程的相应于方程(2.3)的特解部分作了h^2阶的近似，并非对完全解的h^2阶近似。与本文提出的简化理论比较，他们那样简化似乎不大值得。

四、解　　例

运用第三节提出的简化理论，我们来解答一些具体问题。

1　圆板的轴对称弯曲

将前面得到的有关公式转换成极座标形式是极其容易的。这里只列出下面要用到的轴对称情况下的若干公式

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{4.1}$$

$$\nabla^4=\nabla^2(\nabla^2)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right]\right\} \tag{4.2}$$

$$Q_r=\frac{d\Psi}{dr},\qquad Q_\theta=0 \tag{4.3}$$

$$\varphi_r=-\frac{dw}{dr}+\frac{12}{5}\frac{1+\nu}{Eh}Q_r,\qquad \varphi_\theta=0 \tag{4.4}$$

$$M_r=-D\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\frac{12(1-\nu^2)}{5Eh}\frac{dQ_r}{dr}+\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh}q\right] \tag{4.5a}$$

$$M_\theta=-D\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\nu\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{12(1-\nu^2)}{5Eh}\frac{Q_r}{r}+\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh}q\right] \tag{4.5b}$$

$$M_{r\theta}=0 \tag{4.5c}$$

首先给出均布载荷下简支圆板的解答。设圆板半径为a，板厚为h，载荷 $q=\text{const}$. 边界条件是

$$w=0,\ M_r=0 \qquad 当r=a时 \tag{4.6a}$$

$$w,\ \varphi_r有限 \qquad 当r=0时 \tag{4.6b}$$

众所周知现在情况下方程(2.22)的通解是

$$Dw=\frac{1}{64}qr^4+B_1\ln r+B_2r^2\ln r+B_3r^2+B_4$$

又通过(2.26)式得

$$\Psi=-\left[\frac{1}{4}qr^2+4B_2(1+\ln r)+4B_3\right]-\frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2q$$

由于(4.6b)的要求，应取 $B_1=B_2=0$。因此

$$Dw=\frac{1}{64}qr^4+B_3r^2+B_4 \tag{4.7a}$$

$$\Psi=-\left(\frac{1}{4}qr^2+4B_3\right)-\frac{2-\nu}{10(1-\nu)}h^2q \tag{4.7b}$$

代入边界条件(4.6a)，有

$$\frac{1}{64}qa^4+B_3a^2+B_4=0$$

$$\frac{q}{16}(3+\nu)a^2+2(1+\nu)B_3+\frac{h^2q}{10(1-\nu)}=0$$

以上两式解得

$$B_3=-\left[\frac{1}{32}\frac{3+\nu}{1+\nu}a^2+\frac{1}{20(1-\nu^2)}h^2\right]q$$

$$B_4=-\frac{1}{64}qa^4+\left[\frac{1}{32}\frac{3+\nu}{1+\nu}a^4+\frac{h^2a^2}{20(1-\nu^2)}\right]q$$

代入(4.7a)，便得到最后解答

$$w=\frac{q(a^2-r^2)}{64D}\left\{\left[\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right]+\frac{16h^2}{5(1-\nu^2)}\right\} \tag{4.8}$$

仿此，容易求得其他支撑条件下的解答，我们不打算一一赘述，仅将结果列于表 1 。

表 1　　简支圆板（环板）的 Reissner 解

	简支圆板(均布载荷 q)	固支圆板(均布载荷 q)	简 支 环 板 ($q=0$)
边界条件	$r=a$: $w=0$, $M_r=0$ $r=0$: w, φ_r有限	$r=a$: $w=0$, $\varphi_r=0$ $r=0$: w, φ_r 有限	$r=a$: $w=0$, $M_r=M_2$ $r=b$: $Q_r=\frac{-(P)}{2\pi b}$, $M_r=M_1$
解　答	$w=\frac{q(a^2-r^2)}{64D}$ $\cdot\left\{\left[\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right]\right.$ $\left.+h^2\frac{16}{5(1-\nu^2)}\right\}$	$w=\frac{q(a^2-r^2)}{64D}$ $\cdot\left\{(a^2-r^2)\right.$ $\left.+h^2\frac{16}{5(1-\nu)}\right\}$	$w=\frac{a^2M_2-b^2M_1}{2(1+\nu)D(a^2-b^2)}(a^2-r^2)$ $+\frac{a^2b^2(M_1-M_2)}{(1-\nu)D(a^2-b^2)}\ln\frac{r}{a}$ $+\frac{P}{8\pi D}\left\{\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2-r^2)\right.$ $+r^2\ln\frac{r}{a}$ $-\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\left[(a^2-r^2)\right.$ $\left.-\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}a^2\ln\frac{r}{a}\right]$ $\left.-h^2\frac{4}{5}\frac{1}{(1-\nu)}\ln\frac{r}{a}\right\}$

这里有两点需要强调指出。第一，虽然是由简化理论得出的结果，但因轴对称弯曲情况下总有$\frac{1}{r}\frac{\partial Q_r}{\partial\theta}=\frac{\partial Q_\theta}{\partial r}+\frac{Q_\theta}{r}$成立，这些解答就是 Reissner 理论的精确解。第二，表 1 列出的解答明显地分成两部分，其中不含h^2的部分就是经典板理论的解（见[10]），而后面含因子h^2的项反映了Reissner理论对经典理论的修正。

2. 矩形板的弯曲

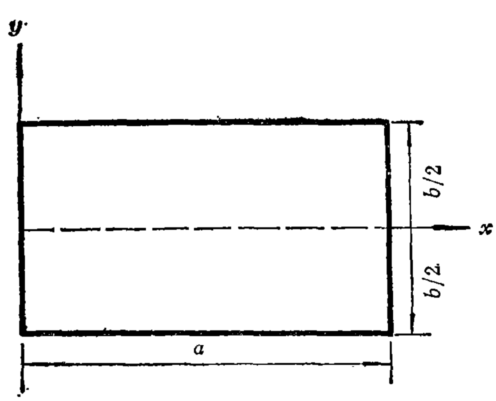

图 1　矩形板

考虑均布载荷作用下的矩形板，尺寸及座标如图 1 。

参照文献[4]，方程(2.22)的一般解给出如下：

$$w=\frac{4q}{aD}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu^5}(1+c_{1m}\operatorname{ch}\mu y+c_{2m}\mu y\operatorname{sh}\mu y)+\frac{kh^2}{10\mu^3}\right]\sin\mu x \tag{4.9}$$

式中

$$k=\frac{2-\nu}{1-\nu} \tag{4.10a}$$

$$\mu=\frac{m\pi}{a};\ m=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \tag{4.10b}$$

c_{1m}，c_{2m}为待定常数。这里已经利用了w关于x轴的对称性质。

将(4.9)代入(2.26)式得到

$$\Psi=-\frac{4q}{a}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}(2c_{2m}\operatorname{ch}\mu y-1)\sin\mu x \tag{4.11}$$

注意，此处利用了展式

$$q=\frac{4q}{\pi}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\mu x \tag{4.12}$$

将(4.9)、(4.11)代入(2.28)，得

$$M_x=\frac{4q}{a}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}\Big[1+(1-\nu)c_{1m}\operatorname{ch}\mu y+(1-\nu)c_{2m}\mu y\operatorname{sh}\mu y$$

$$-\left(\nu-\frac{h^2}{5}\mu^2\right)2c_{2m}\operatorname{ch}\mu y\Big]\sin\mu x \tag{4.13a}$$

$$M_y=-\frac{4q}{a}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}\Big[-\nu+(1-\nu)c_{1m}\operatorname{ch}\mu y+(1-\nu)c_{2m}\mu y\operatorname{sh}\mu y$$

$$+\left(1+\frac{h^2}{5}\mu^2\right)2c_{2m}\operatorname{ch}\mu y-\frac{\nu h^2}{10}\mu^2\Big]\sin\mu x \tag{4.13b}$$

$$M_{xy}=(1-\nu)\frac{4q}{a}\sum_{1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}\Big[c_{1m}\operatorname{sh}\mu y+\left(1+\frac{2h^2}{5(1-\nu)}\mu^2\right)c_{2m}\operatorname{sh}\mu y$$

$$+c_{2m}\mu y\operatorname{ch}\mu y\Big]\cos\mu x \tag{4.13c}$$

下面分别讨论两种不同的支撑情况

a) 四边简支矩形板

边界条件

$$w=0,\ M_x=0 \quad 当\ x=0, a时 \tag{4.14a}$$

$$w=0,\ M_y=0 \quad 当\ y=\pm\frac{b}{2}时 \tag{4.14b}$$

以(4.9)，(4.11)，(4.13)代入(4.14)，可解得

$$c_{1m}=-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_m}\left[1+\frac{kh^2\mu^2}{10}+\frac{\alpha_m\operatorname{th}\alpha_m}{2}\right] \tag{4.15a}$$

$$c_{2m}=\frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_m} \tag{4.15b}$$

式中

$$\alpha_m=\frac{\mu b}{2}=\frac{m\pi}{2}\frac{b}{a} \tag{4.16}$$

用(4.15)代换(4.9)式中的 c_{1m}，c_{2m}，就得到这种情况下的解答。它们与文献[4]按Reissner理论给出的精确解完全一样。这是我们由简化理论得到精确解的又一例。如Reissner所指出的，按照这个解答，不存在如经典板理论那样在四个角点出现集中反力的问题。

b) 两边简支、两边自由矩形板

边界条件

$$w=0,\qquad M_x=0 \quad 当\ x=0, a时 \tag{4.17a}$$

$$Q_y-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=0,\qquad M_y=0 \quad 当\ y=\pm\frac{b}{2}时 \tag{4.17b}$$

以(4.9)、(4.11)、(4.13)代入上式，(4.17a)自动满足。(4.17b)的满足给出以下两式

$$-(1-\nu)c_{1m}\,\mathrm{sh}\,\alpha_m+\left[\left(1+\nu-\frac{2h^2\mu^2}{5}\right)\mathrm{sh}\,\alpha_m-(1-\nu)\alpha_m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m\right]c_{2m}=0$$

$$-\nu+(1-\nu)c_{1m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m+(1-\nu)c_{2m}\alpha_m\,\mathrm{sh}\,\alpha_m$$
$$+\left(1+\frac{h^2}{5}\mu^2\right)2c_{2m}\,\mathrm{ch}\,\alpha_m-\frac{\nu h^2}{10}\mu^2=0$$

由此可以解得

$$c_{1m}=\frac{\left[1+\nu-\frac{2h^2\mu^2}{5}-(1-\nu)\alpha_m\,\mathrm{cth}\ \alpha_m\right]}{1-\nu}c_{2m} \tag{4.18a}$$

$$c_{2m}=\frac{\nu h^2}{10k_m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m}\left(\frac{10}{h^2}+\mu^2\right) \tag{4.18b}$$

式中

$$k_m=3+\nu-\frac{2(1-\nu)\alpha_m}{\mathrm{sh}\,2\alpha_m} \tag{4.18c}$$

这个解答不是精确解。[4]获得的关于这个问题的Reissner理论精确解是

$$c_{1m}=\frac{1+\nu-(1-\nu)\alpha_m\ \mathrm{cth}\,\alpha_m}{1-\nu}c_{2m} \tag{4.19a}$$

$$c_{2m}=\frac{\nu h^2}{10k_m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m}\left(\frac{10}{h^2}+\mu^2\right) \tag{4.19b}$$

$$k_m=\frac{2\mu^2h^2}{5}\left[1-\frac{\left(\frac{10}{h^2}+\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{th}\,\alpha_m}{\mu\,\mathrm{th}\left(\frac{(10/h^2+\mu^2)^{1/2}b}{2}\right)}\right]+3+\nu-\frac{2(1-\nu)\alpha_m}{\mathrm{sh}\,2\alpha_m} \tag{4.19c}$$

但是简化解(4.18)与精确解相差甚微。我们取方板($a=b$)为例，将两种解答给出的中心挠度随 h 变化的曲线画在图2中。

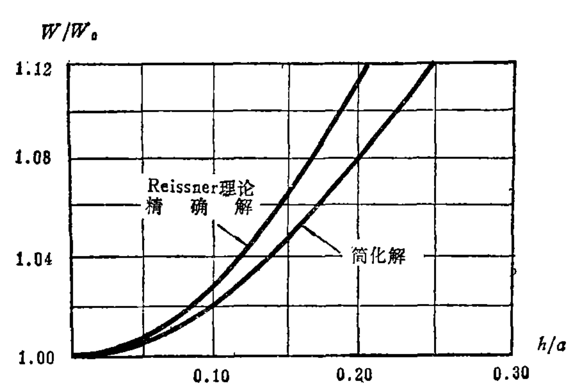

图2 方板中心挠度比随 h/a 的变化（两边简支、两边自由，均布载荷）

$\nu=0.3$； $w_0=0.0131\frac{qa^4}{D}$

（按经典理论计算）

五、应 力 函 数

受第二节结果的启发，除位移函数ψ之外，再引入应力函数Ψ和Φ，它们与板中内力的关系如下

$$Q_x=\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad Q_y=\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{5.1a}$$

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\Psi+\frac{h^2}{5}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\quad M_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\Psi-\frac{h^2}{5}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\\ M_{xy}&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.1b}$$

ψ满足的方程仍为(2.23)式，即

$$\nabla^2\psi-\frac{10}{h^2}\psi=0 \tag{2.23}$$

Φ及Ψ满足的基本方程可由板的挠度和转角的连续性要求得出，结果是

$$\nabla^4\Phi-(1-\nu)q-\frac{\nu h^2}{10}\nabla^2 q=0 \tag{5.2a}$$

$$\Psi=\frac{1}{1-\nu}\left[-\nabla^2\Phi+\frac{\nu h^2}{10}q\right] \tag{5.2b}$$

参 考 文 献

1. Reissner, E., On the theory of bending of elastic plates, *J. Math. Phys.* 23, 184 (1944).
2. Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.* 12, A69(1945).
3. Reissner, E.,On bending of elastic plates, *Quart. Appl. Math.* 5, 55(1947).
4. Salerno V. L., and Goldberg,M. A., Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates, *J. Appl. Mech.* 27, 54(1960).
5. Koeller, R. C. and Essenburg, F., Shear deformation in rectangular plates. proc. 4th U. S. Nat. Cong. *Appl. Mech* 1, 555(1962).
6. Frederick, D., Thick rectangular plates On an elastic foundation, Trans. A. S. C. E. 122 1067(1957).
7. 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用。力学与实践，第1卷，第1－2期(1979)。
8. Speare, P. R. S. and Kemp,K. O.,A simplified Reissner theory for plate bending, *Int. J.* Solids Structures, 13, 1073(1977).
9. 程壎(Shun cheng)，板的弹性理论及其改进理论，待发表。
10. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger,S., *Theo y of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, (1959).

On the Reissner Theory of Bending of an Elastic Plate

Miao Tian-de Cheng Chang-jun

(Mathematics Department, The Langchow University)

Abstract

Reissner equations of elastic plate are derived on the bases of incomplete generalized variational principle of complementary energy. The stress function ψ is obtained from the variational calculation in the form of Lagrange multiplier. The structure of solution of Reissner equations is thus determined. On the bases of these discussions, we obtained a simplified theory, in which the equations of equilibrium involving the shearing influence can be reduced into a fourth order differential equation similar to those of classic plate theory.