应用数学和力学，第1卷第2期（1980年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于非均质变截面弹性直杆的纵向自主振动

刘先志（山 东 工 学 院）

（1979年12月9日收到）

摘 要

本文以集合木制螺旋桨作为启示的出发点，从而想使弹性直杆振动问题能初步臻于一个比较更一般的处理。文中把弹性模量、截面面积和单位杆长的质量施以依指数函数变化的规律之后，推出了一个通解，其中三个参数看为影响非均质变截面弹性直杆纵向自主振动频率的主要因素。

一、引 言

本文的任务是处理非均质、变截面弹性直杆的纵向自主振动问题。众所熟知，这里是涉及到一个偏微分方程；变截面已经使微分方程遇到了求解的困难，而杆的非均质又重叠上了另一层困惑。据此，这里不但牵扯到数学物理问题，也有点涉及到了物理数学方面。

关于物理方面的启机是，在工业方面确实有过非均质直杆这种重要的机件；例如，使我们有深刻印象的是飞机已往常用的木制螺旋桨。由于这个机件要求其根部须有最大的强度，以使它能胜任诸如离心力所引起的拉应力和弯应力。这种须承担复合应力的强度可以沿着螺旋桨叶顺轴向着尖端方向逐渐下降。在制造这种机件的过程中，乃是把先备好了的大小长短不一的木片按强度变化的要求去配调沿桨叶顺轴木片数目的多少，以求适应强度变化的要求；木片层层之间涂以粘胶，然后在真空筒中施以压力把这些木片集压成所要求的紧密整块，其密度自然是沿桨叶的顺轴会有既定规律的变化；最后自然须按该件的几何形状要求去加工。举出桨叶只当个例证。

按近代工业技术的要求，虽然在制造方面有其困难，但在强度和形状上都能接近理想，这是无疑的；所以工业先进国家都不惜工本来完成这种非均质变截面机件的生产，当在设计中确实需要这种不规矩的机件的时候。

上述机件在使用中由于机动、动力关系，有时难免发生振动，本文就是要先讨论这种机件在纵向振动中的自主振动性态。

二、关于变截面和非均质的基本设想

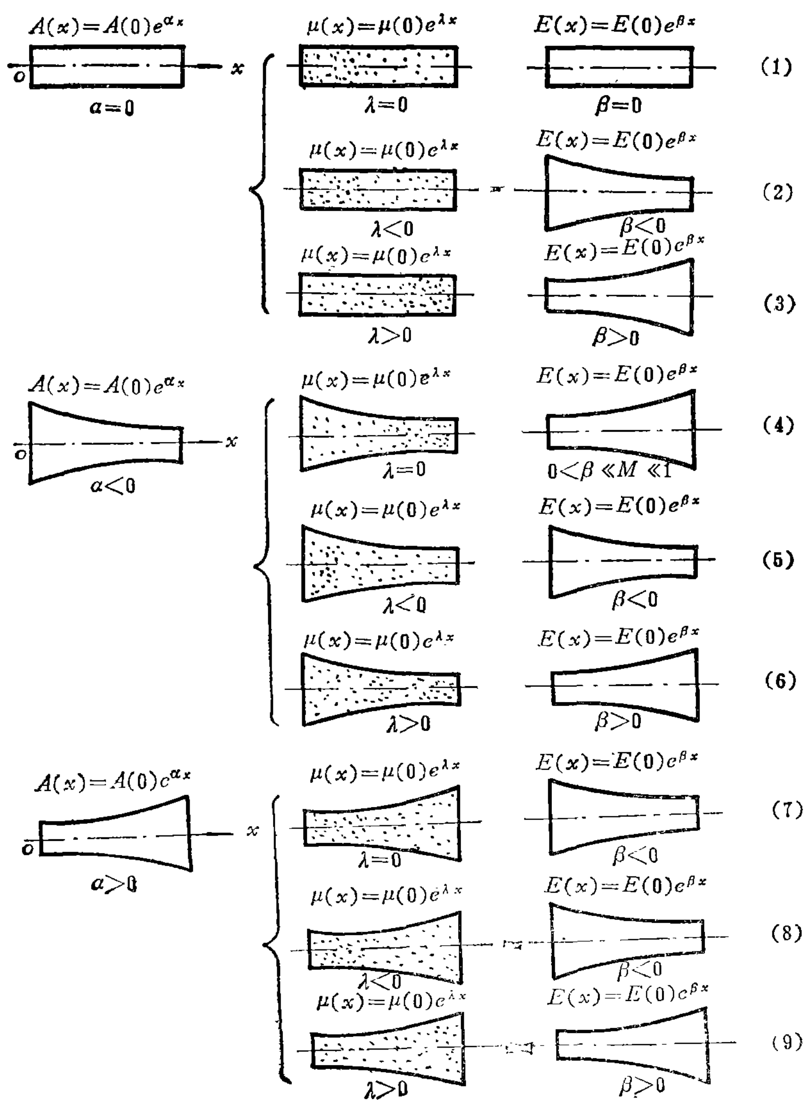
下面的讨论将不限于螺旋桨叶一例，我们想扩大范围作一个较为一般性的探索，以期在数学分析上尽量达到比较系统性的处理；退一步想，即使只能得出问题的上限或下限，这在了解势态的趋势上也往往不是完全多余的。

基于木制螺旋桨一例，可以一般地认为，拉压弹性模量是依材料的密度起变化的[1]，对于同种材料或拼凑起来的多层异质部件，这都是合乎物理意义的。材料的密度大，则拉压弹性模量亦大，反之亦然。

若照顾到三个变量 $E(x)$、$A(x)$和 $\mu(x)$，使它们沿着机件的顺轴x同时起着改变，例如集成木制螺旋桨就是一个我们很能理解的好例子，并且有时还因其各自的改变而应有一定的相互联系和影响，更可再考虑上可能有的多种组合，因为机具设计能用到的性态是千姿万态不可俱状的。为了照顾既合乎数学物理，也要适应物理数学，基本上可采用下列示意性的图表 1 来表达多种配合。

按照图表 1，我们这里举列了九种不同的配合，其中 $\alpha=\beta=\lambda=0$ 是等径、均质直杆的情况，它是变直径、非均质情况最简单的一种蜕化。在分析中，我们保持 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\lambda\neq0$。在实用中，α、β 和 λ 的配合自然须依从一定的物理逻辑，当遇到具体问题，或须借试验寻求α、β、λ 的切实数字。

表1.　　　　　　按指数函数规律，E(x)、A(x) 和μ(x)的多种配合



在表1里，我们曾在有关的杆内加上稀密有变化的细点，以期略使 $\mu(x)$ 在一定程度上臻于直观。但由于稀密精度只能达到示意，所以晃眼望去例(4)、例(6)和例(7)对于要求 $\lambda=0$ 有些不符。为此，可能需要再次提及，若不忽视 $\mu(x)$ 是杆件单位长度的质量这样的一个定义，那就会使疑惑爽然自失了。

三、本课题中的有关微分方程

现在我们就来进行所想过的可能数学分析。为此，可自下列微分方程出发

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{3.1}$$

其中 $E(x)$ 是杆件的拉压弹性模量，$A(x)$ 是杆的模截面面积，$\mu(x)$ 是杆的单位长度质量；$u(x,\ t)$ 代表顺轴座标 x 处的点纵向振动偏倚，t 是时间，l-直杆的全长。

现在把拟取的变化关系 $A(x)=A(0)e^{\alpha x}$，$E(x)=E(0)e^{\beta x}$ 和 $\mu(x)=\mu(0)e^{\lambda x}$，$A(0)$、$E(0)$ 和 $\mu(0)$ 是些常值，$\alpha\gtreqless 0$，$\beta\gtreqless 0$，$\lambda\gtreqless 0$，代进(3.1)式，就可整理出

$$k_0\left[(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]e^{(\alpha+\beta-\lambda)x}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{3.2}$$

其中 $k_0=A(0)E(0)/\mu(0)$

再通过代换 $(\alpha+\beta-\lambda)x=\xi$，$(\alpha+\beta-\lambda)\partial x=\partial\xi$ 则自(3.2)式导得

$$k_0\left[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-\lambda)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(\alpha+\beta-\lambda)^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right]e^{\xi}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{3.3}$$

试设微分方程(3.3)的解型[3]是

$$u(\xi,\ t)=U(\xi)T(t) \tag{3.4}$$

则自(3.3)式导出

$$k_0\left[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-\lambda)\frac{dU}{d\xi}+(\alpha+\beta-\lambda)^2\frac{d^2U}{d\xi^2}\right]T(t)e^{\xi}=U(\xi)\frac{d^2T}{dt^2} \tag{3.5}$$

若再引进一个待定常数 $\kappa>0$，就可把上式写成

$$\frac{k_0\left[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-\lambda)\dfrac{dU}{d\xi}+(\alpha+\beta-\lambda)^2\dfrac{d^2U}{d\xi^2}\right]e^{\xi}}{U(\xi)}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T(t)}=-\kappa$$

亦即可拆成两式

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\lambda}\cdot\frac{dU}{d\xi}+\frac{\kappa}{k_0(\alpha+\beta-\lambda)^2}e^{-\xi}U=0 \tag{3.6}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\kappa T=0 \tag{3.7}$$

四、空间变量 ξ 的微分方程的第一部分解

若用级数法求解(3.6)式，就可先把它换成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{P(\xi)}{\xi}\frac{dU}{d\xi}+\frac{Q(\xi)}{\xi^2}U=0\\&P(\xi)=k_1\xi,\qquad Q(\xi)=k_2\xi^2e^{-\xi}\\&k_1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\lambda},\quad k_2=\frac{\kappa}{k_0}(\alpha+\beta-\lambda)^{-2}\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

于是由$p_0=P(0)=0$，$q_0=Q(0)=0$导得这里的指数方程[2](indicial equation)

$$c^2+(p_0-1)+q_0=c(c-1)=0\tag{4.2}$$

从而得$c_1=0$，$c_2=1$；据此可设(4.1)式中第一式的第一部份解为

$$U(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^{n+1},\qquad a_0\neq 0\tag{4.3}$$

把上式及其微分导数代进(4.1)式的第一式，则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_n\xi^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}k_1(n+1)a_n\xi^n+k_2e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^{n+1}=0\tag{4.4}$$

再取

$$e^{-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi^n}{n!}\tag{4.5}$$

并利用Cauchy[2]定理

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kz^kb_{n-k}z^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}z^n\tag{4.6}$$

则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_n\xi^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)k_1a_n\xi^n+k_2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a_{n-k}}{k!}\xi^{n+1}=0\tag{4.7}$$

或展成

$$2a_1\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_n\xi^{n+1}+k_1a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)k_1a_n\xi^n+k_2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-2}(1-)^k\frac{a_{n-k-2}}{k!}\xi^{n-1}=0,$$

再借助于推移指标，而得

$$2a_1+\sum_{n=2}^{\infty}n(n+1)a_n\xi^{n-1}+k_1a_0+\sum_{n=2}^{\infty}nk_1a_{n-1}\xi^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^kk_2\frac{a_{n-k-2}}{k!}\xi^{n-1}=0\tag{4.8}$$

于是能自上式得到

$$\left.\begin{aligned}&2a_1+k_1a_0=0\\&n(n+1)a_n+nk_1a_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^kk_2\frac{a_{n-k-2}}{k!}=0\quad(n\geqq 2)\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

从而自$a_0\neq 0$导得部分解

$$U_1(\xi)=a_0\xi-\frac{k_1}{2}a_0\xi^2-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1}{n+1}a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n+1}\qquad(4.10)$$

此外，可以检证而有

$$a_1=-\frac{k_1a_0}{2},\qquad a_2=(k_1{}^2-k_2)\frac{a_0}{6},$$

$$a_3=\left(-\frac{k_1{}^3}{24}+\frac{k_1k_2}{12}+\frac{k_2}{12}\right)a_0$$

…………

于是看出，当$n\geqq 2$时，a_n都能推演成a_0的函数，意即，(4.10)式里只有一个积分常数；据此，我们还需要寻找此解的另一部分。

五、空间变量ξ的微分方程的第二部分解

本节试推求解的第二部份。为此试设

$$U_2(\xi)=U_1(\xi)\log\xi+U_3(\xi)\qquad(5.1)$$

其中拟取

$$U_3(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\xi^{n+\sigma}\qquad(5.2)$$

σ是个待定指数，

据此，而把两微分导数

$$\frac{dU_2}{d\xi}=\frac{dU_1}{d\xi}\log\xi+\xi^{-1}U_1+\frac{dU_3}{d\xi}$$

$$\frac{d^2U_2}{d\xi^2}=\frac{d^2U_1}{d\xi^2}\log\xi+2\xi^{-1}\frac{dU_1}{d\xi}-\xi^{-2}U_1+\frac{d^2U_3}{d\xi^2}$$

代进方程 $\dfrac{d^2U}{d\xi^2}+k_1\dfrac{dU}{d\xi}+k_2e^{-\xi}U=0$，而得

$$\left[\frac{d^2U_1}{d\xi^2}+k_1\frac{dU_1}{d\xi}+k_2e^{-\xi}U\right]\log\xi+\frac{d^2U_3}{d\xi^2}+k_1\frac{dU_3}{d\xi}+k_2e^{-\xi}U_3$$

$$+2\xi^{-1}\frac{dU_1}{d\xi}-\xi^{-2}U_1+k_1\xi^{-1}U_1=0\qquad(5.3)$$

在上式中，括号[…]之内的式值恒等地消失；此刻若把(5.2)式及其相应的微分导数代进(5.3)式中余下的式子，则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma-1)(n+\sigma)d_n\xi^{n+\sigma-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)k_1d_n\xi^{n+\sigma-1}+k_2\sum_{n=0}^{\infty}d_n\xi^{n+\sigma}$$

$$+2\xi^{-1}\left\{a_0-k_1a_0\xi-\sum_{n=2}^{\infty}\left[k_1a_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^n\right\}$$

$$-\left\{a_0\xi^{-1}-\frac{k_1}{2}a_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1}{n+1}a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n-1}\right\}$$

$$+k_1\left\{a_0-\frac{k_1}{2}a_0\xi-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1}{n+1}a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n}\right\}=0 \tag{5.4}$$

再利用关系

$$k_2e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}d_n\xi^{n+\sigma}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k_2d_{n-k}}{k!}\xi^{n+\sigma}$$

就可把(54)式化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma-1)(n+\sigma)d_n\xi^{n+\sigma-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)k_1d_n\xi^{n+\sigma}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k_2d_{n-k}}{k!}\xi^{n+\sigma}$$

$$+2a_0\xi^{-1}-2k_1a_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left[2k_1a_{n-1}+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n-1}-a_0\xi^{-1}+\frac{k_2}{2}a_0$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1}{n+1}a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n-1}+k_1a_0-\frac{k_1^2}{2}a_0\xi$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{k_1^2}{n+1}a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_1k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n}=0 \tag{5.5}$$

为了便于分析和论证，可再把上式化成下列形式

$$(\sigma-1)\sigma d_0\xi^{\sigma-2}+\sigma(1+\sigma)d_1\xi^{\sigma-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+\sigma-1)(n+\sigma)d_n\xi^{n+\sigma-2}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2d_{n-k-2}}{k!}\xi^{n+\sigma-2}+2a_0\xi^{-1}-2k_1a_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left[2k_1a_{n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n-1}-a_0\xi^{-1}+\frac{k_1}{2}a_0+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1}{n+1}a_{n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n-1}+k_1a_0-\frac{k_1^2}{2}a_1\xi-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{k_1^2}{n+1}a_{n-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_1k_2a_{n-k-2}}{k!}\right]\xi^{n}=0 \tag{5.6}$$

现在借助于寻找含ξ^0、ξ、ξ^2诸项的系数来推求(5.2)式的诸系数值。

（1） ξ^0项的系数。可以检证而得

$$(\sigma-1)\sigma d_0-2k_1a_0+\frac{k_1}{2}a_0+k_1a_0=0$$

此式经简化后，则得 $(\sigma-1)\sigma d_0-\frac{k_1}{2}a_0=0$；以$\sigma=2$ 则得 $d_0=\frac{k_1}{4}a_0$ (5.7)

（2） ξ项 的系数。首先可得

$$\sigma(1+\sigma)d_1-\left[2k_1a_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2a_{2-k-2}}{k!}\right]+\frac{k_1}{3}a_1$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{2-2}(-1)^k\frac{k_2a_{2-k-2}}{k!}-\frac{k_1^2}{2}a_0=0$$

由于 $a_1=-k_1a_0/2$，所以推得

$$d_1=\frac{5}{18}k_1a_1+\frac{5}{36}k_2a_0+\frac{k_1^2a_0}{12}=-\frac{k_1^2}{18}a_0+\frac{5}{36}k_2a_0, \tag{5.8}$$

（3） ξ^2项的系数。对于$n\geqq2$，则得

$$(n+1)(n+2)d_n+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_2d_{n-k-2}}{k!}-\frac{k_1^2a_{n-1}}{n+1}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_1k_2a_{n-k-2}}{k!}=0,$$

从而推得

$$d_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\frac{k_2d_{n-k-2}}{k!}+\frac{k_1^2a_{n-1}}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$+\frac{1}{n(n+1)^2(n+2)}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{k_1k_2a_{n-k-2}}{k!},\quad(n\geqq2) \tag{5.9}$$

于是推定

$$\left.\begin{aligned}&U_3(\xi)=\frac{k_1}{4}a_0\xi^2+\left(\frac{5}{18}k_1a_1+\frac{5}{36}k_2a_0+\frac{k_1^2}{12}a_0\right)\xi^3+\sum_{n=2}^{\infty}d_n\xi^{n+2}\\&k_1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\lambda},\quad k_2=\frac{\kappa}{k_0}(\alpha+\beta-\lambda)^{-2},\quad \xi=(\alpha+\beta-\lambda)x\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

六、本课题微分方程的通解

若以A和B代表积分常数，则(3.6)式的解是

$$U(\xi)=AU_1(\xi)+B[U_1(\xi)\log\xi+U_3(\xi)] \tag{6.1}$$

更由于(3.7)式的解是

$$T(t)=C\cos(\sqrt{\kappa}t)+D\sin(\sqrt{\kappa}t), \tag{6.2}$$

其中C和D是由初始条件待定的常数，

于是得到(3.3)的通解

$$u(\xi,t)=\{AU_1(\xi)+B[U_1(\xi)\log\xi+U_3(\xi)]\}\times[C\cos(\sqrt{\kappa}t)+D\sin(\sqrt{\kappa}t)] \tag{6.3}$$

其中 $\xi=(\alpha+\beta-\lambda)x$，$A$、$B$、$C$、$D$ 是分别由边界条件和初始条件待定的常数。$U_1(\xi)$ 见(4.10)式，$U_3(\xi)$见(5.10)式。

七、关于非均质变截面弹性直杆的扭转自振

关于非均质变截面弹性直杆的扭转自振，迳可参照[3]和[4]里的论辩而得

$$I(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[G(x)J(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=0,\ (0\leqslant x\leqslant l), \tag{7.1}$$

其中 t——时间，

$\varphi(x,t)$——扭转振动的角偏倚，

x——沿变截面直杆顺轴方向的位标，

$G(x)$——剪切弹性模量，

$I(x)$——x处单位杆长的极转动惯量，

$J(x)$——x处直杆截面的极惯矩，

l——直杆全长。

参照对于非均质变截面直杆纵向自主振动的考虑，大可在此例中设

$$\left.\begin{aligned}&I(x)=I(0)e^{\alpha x},\quad G(x)=G(0)e^{\beta x},\quad J(x)=J(0)e^{\lambda x},\\&\alpha\gtreqless 0,\qquad \beta\gtreqless 0,\qquad \lambda\gtreqless 0,\end{aligned}\right\} \tag{7,2}$$

而自(7.1)式推出

$$k_0\left[(\alpha+\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]e^{(\alpha+\beta-\lambda)x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \tag{7.3}$$

其中 $k_0=I(0)G(0)/J(0)$.

自上列简短的论证和推导看出，(7.3)式与(3.2)式是属于同一类型，因此我们勿须再求解(7.3)式，对纵向自主振动所获到的解自可完全移用，只须代换些物理性的参数。

参 考 文 献

1. Melan, E. und Parkus, H., Wärmespannungen infolge Stationärer Temperaturfelder, Springer-Verlag, Wien (1953), p. 106.
2. Rainville, E. D., *Intermediate Course in Differential Equations*, John Wiley & Sons, London (1951).
3. 刘先志，推算楔形直杆纵振与扭振自主频率的一个方法，中国科学，1977年，第6期。
4. Liu Hsien-chih(刘先志), A New Method for Calculating Longitudinal and Torsional natural Vibration Frequencies of wedge-shaped straight Bars, SCIENTIA SINICA, No. 6, (1977).

Longitudinal Free Vibration of an Elastic Non-uniform Strut

Liu Hsien-chih(*The Shangtung Institute of Technology*)

Abstract

The aim of this paper is to give a more or less general treatment of vibration of elastic non-uniform strut, such as composite wooden screw-propeller. In this paper, elastic modulus, cross-sectional area, and mass per unit length are considered to be of exponential functions of longitudinal coordinates. A general solution is obtained together with these three parameters, which are found to be the main factors closely related to the frequencies of free vibration of such an elastic-non-uniform strut.