应用数学和力学，第1卷第2期(1980年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

# 耦合热弹性平面问题的有限元法基本方程

王洪纲（昆明工学院）

（1979年2月收到）

**摘　要**

本文在耦合热弹性问题变分原理的基础上，导出非定常温度场热弹性平面问题的有限元法基本方程。推导中，弹性平面划分为三节点三角形单元，时间过程划分为时间元，时间元中各变量（节点的位移和温度）随时间作线性变化。得出以各节点在每个瞬时（时间元的端点）的位移和温度为待定值的两组耦合的线性代数方程组，即基本方程。

在热弹性问题中，如果温度场相对于时间的变化率较大，则在弹性体总能量中不仅包括位能和热能，而且包括动能。同时，在热传导方程中包括位移的变化。因此需要用耦合的热弹性问题变分原理[1]。这里，在该变分原理的基础上给出平面问题的表达形式，然后离散化，导出单元的哈密顿作用量及热流势作用量，最后总体合成，求作用量极值，得线性代数方程组，以矩阵形式表达。

## 一、耦合热弹性平面问题变分原理表达式

耦合热弹性问题变分原理包括两部分：

### 1．哈密顿原理

各向同性弹性体的自由能密度$\phi(e_{ij},\theta)$为

$$\phi(e_{ij},\theta)=\frac{1}{2}(\lambda e_{kk}e_{ll}+2\mu e_{kl}e_{kl})-\frac{\alpha}{3}(3\lambda+2\mu)e_{kk}\theta-\frac{C_E\theta^2}{2T_0}\tag{1.1}$$

式中$\lambda$及$\mu$为拉梅常数；$e_{ij}$为应变分量；$\alpha$为体热胀系数；$\theta=T-T_0$，$T$和$T_0$分别为各点绝对温度和参考温度；$C_E$为无应变比热。

设$\eta$为熵密度，$F_i$为体力分量，$\overline{P}_i$为已给的表面力分量，$S_\sigma$为其作用表面，$u_i$为位移分量，于是弹性体总位能$U$为

$$U=\int_V[\phi(e_{ij},\theta)+\eta T-F_iu_i]dV-\int_{S_\sigma}\overline{P}_iu_ids\tag{1.2}$$

以$\rho$表示密度，则动能$W$为

$$W=\frac{1}{2}\rho\int_V \dot{u}_i\dot{u}_i\,dV \tag{1.3}$$

以 $t$ 表示时间，弹性体的哈密顿作用量为

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_n}(W-U)dt \tag{1.4}$$

哈密顿原理为

在满足应力应变关系式 $\sigma_{ij}=\frac{\partial\phi}{\partial e_{ij}}$、位移应变关系式 $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$、位移边界约束条件 $u_i=\bar{u}_i$ 及已给的 $u_i(x_1,x_2,x_3,t_0)$ 和 $u_i(x_1,x_2,x_3,t_n)$ 的一切容许位移和温度中，使哈密顿作用量 $\Pi_1$ 为最小，即

$$\delta\Pi_1=0 \tag{1.5}$$

的位移和温度，必满足

① 运动方程式

$$\sigma_{ij,j}+F_i=\rho\ddot{u}_i$$

② 自由能和熵的关系式

$$\eta=-\frac{\partial\phi}{\partial T}=\frac{3\lambda+2\mu}{3}\alpha e_{kk}+C_E\frac{\theta}{T_0}$$

③ 外力的表面边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{P}_i \qquad \text{在}S_\sigma\text{上}$$

## 2. 热流势最小作用量原理

设 $h$ 为热传导系数，$H$ 为温度分布决定的热流势，它等于

$$H=\frac{1}{2}hT_{,i}T_{,i}=\frac{1}{2}h\theta_{,i}\theta_{,i}$$

并设 $R$ 为分布热源密度，$\overline{Q}_i$ 为边界面 $S_Q$ 上流出的热量 $\overline{Q}_in_i$ 的分量，则总热流势为

$$\Psi=\int_V(H-RT+\dot{\eta}T_0T)dV-\int_{S_Q}\overline{Q}_in_i\,ds \tag{1.6}$$

弹性体热流势作用量 $\Pi_2$ 为

$$\Pi_2=\int_{t_0}^{t_n}\Psi\,dt \tag{1.7}$$

热流势最小作用量原理为

在满足已给边界条件 $T=\bar{T}(S_T)$，（在 $S_T$ 上）的温度场中，使 $\Pi_2$ 为最小，即

$$\delta\Pi_2=0 \tag{1.8}$$

的温度场 $T(x_1,x_2,x_3,t)$，必满足

① 耦合的热传导方程

$$h\theta_{,ii}=\dot{\eta}T_0-R$$

② 热传导边界条件

$$h\theta_{,i}n_i=\overline{Q}_in_i \qquad \text{在 } S_Q \text{ 上}$$

以上即耦合热弹性变分原理的两个部分[1]。

在平面问题中，对于平面应力情况有

$$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

可以推知自由能表达式为

$$\phi(e,\theta)=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{E\nu}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{E}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\frac{E}{1-\nu}\frac{\alpha}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\theta-\left[\frac{E(1+3\nu)}{2(1-\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{\alpha^2}{g}+\frac{C_E}{2T_0}\right]\theta^2 \quad (1.9)$$

式中$E$为弹性模数，$\nu$为泊桑比。同样可以推知$z$向位移$w$为

$$w=w(z,t)=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)z+\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\alpha}{3}\theta z+C$$

将此$w$代入$\Pi_1$中时，对厚为$b$的平板取$z$的平均值$\frac{b}{2}$。并将式(1.9)代入$\Pi_1$。得平面应力情况的哈密顿作用量$\Pi_1$为

$$\Pi_1=b\int_t\iint_A\left\{\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]+\frac{\rho b^2}{8(1-\nu)^2}\left[\frac{\alpha(1+\nu)}{3}\dot{\theta}-\nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]^2\right.$$
$$-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{E\nu}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{E}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{E}{1-\nu}\frac{\alpha}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\theta+\left[\frac{E(1+3\nu)}{2(1-\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{\alpha^2}{g}+\frac{C_E}{2T_0}\right]\theta^2-\eta T$$
$$\left.+F_xu+F_yv\right\}ds\,dt+b\int_t\int_{L_b}(\bar{P}_xu+\bar{P}_yv)dl\,dt \quad (1.10)$$

式中$A$为整个平面，$L_b$为外力作用的周界。

对于平面应变情况有

$$e_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$$

可得哈密顿作用量$\Pi_1$为

$$\Pi_1=b\int_t\iint_A\left\{\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]-\frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right.$$
$$-\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{E}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{E}{1-2\nu}\cdot\frac{\alpha}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\theta+\frac{C_E}{2T_0}\theta^2-\eta T+F_xu+F_yv\right\}ds\,dt+b\int_t\int_{L_b}(\bar{P}_xu+\bar{P}_yv)dl\,dt \quad (1.11)$$

在平面问题中温度场$T=T(x,y,t)$。略去热源$R$。对于平面应力情况，设平板上下两面同时散热，$S_{Qi}$为散热表面，它不必布满整个表面，可以是表面上某个区域，这样的区域设有$j$个。对于平面应变情况，$L_{Qi}$为散热周界。$\beta_i$为散热系数，$T_{Ai}$为弹性平面周围介质的温度。于是热流势作用量$\Pi_2$为

$$\Pi_2=b\iint_{tA}\left\{\frac{1}{2}h\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]+\eta T_0 T\right\}ds\,dt+\sum_i\int_t\int_{S_{Qi}}2\beta_i\left(\frac{T}{2}-T_{Ai}\right)T\,ds\,dt+\sum_j\int_t\int_{L_{Qj}}b\beta_j\left(\frac{T}{2}-T_{Aj}\right)T\,dl\,dt \tag{1.12}$$

对于平面应力情况取此式右端第一、二两项，对于平面应变取一、三两项。

式(1.10)或(1.11)及(1.12)中$\Pi_1$和$\Pi_2$即为平面问题的泛函表达式。

## 二、泛函$\Pi_1$和$\Pi_2$的离散化

弹性平面划分为三节点三角形单元，节点以$i$、$j$、$m$表示。位移模式和温度模式为

$$\left.\begin{aligned}u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m\\v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m\\T&=N_iT_i+N_jT_j+N_mT_m\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

形函数$N_r(r=i、j、m)$为[7]

$$N_r=\frac{1}{2\Delta}(a_r+b_rx+c_ry) \tag{2.2}$$

$a_r$、$b_r$、$c_r$为几何常数，$\Delta$为单元面积。视$N_r$为面积座标，则有

$$\int_\Delta N_i^pN_j^qN_m^r\,ds=\frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!}\cdot 2\Delta \tag{2.3}$$

将时间过程划分为时间元[1]。时间元的两端为$t_{k-1}$和$t_k(k=1,2,\cdots,n)$，时间元长度$\tau_k=t_k-t_{k-1}$。任一瞬时$t$在时间元中以$\tau$表示，$\tau=t-t_{k-1}$。

节点$r$在$t_{k-1}$和$t_k$时的水平、铅垂位移值和温度值以$u_{rk-1}$，$u_{rk}$，$v_{rk-1}$，$v_{rk}$，$T_{rk-1}$，$T_{rk}$表示。则在线性元的情况任一瞬时$\tau$有

$$\left.\begin{aligned}u_r&=u_{rk-1}+\frac{\tau}{\tau_k}(u_{rk}-u_{rk-1})\\v_r&=v_{rk-1}+\frac{\tau}{\tau_k}(v_{rk}-v_{rk-1})\\T_r&=T_{rk-1}+\frac{\tau}{\tau_k}(T_{rk}-T_{rk-1})\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

以$\Pi_1^{ek}$表示平面单元在时间元内的哈密顿作用量，则

$$\Pi_1=\sum_e\sum_k\Pi_1^{ek} \tag{2.5}$$

式中$\sum_e$和$\sum_k$分别为对全部平面单元和全部时间元求和。以$\tau_k$替换(1.10)式或(1.11)式的积分域$t$，以$\Delta$替换$A$，以$l_{jm}$替换$L_b$，则(1.10)或(1.11)式积分值即为$\Pi_1^{ek}$。

平面单元受到外力作用的边，取为$jm$边，边长以$l_{jm}$表示。该边上任一点的位移$u$和$v$为

$$u=u_j+\frac{l}{l_{jm}}(u_m-u_j),\quad v=v_j+\frac{l}{l_{jm}}(v_m-v_j) \tag{2.6}$$

$l$ 为该点到 $j$ 点的距离。

将(1.10)或(1.11)式积分域改变后，将(2.6)代入积分第二项，然后将 (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)等式代入。积分时考虑到：

1．体力和表面力折算成等效荷载，即

$$b\int_{\tau_k}\int_{\Delta}(F_x u+F_y v)ds\,d\tau+b\int_{\tau_k}\int_{l_{jm}}(\bar{P}_x u+\bar{P}_y v)dl\,d\tau$$

$$=b\int_{\tau_k}(X_i u_i+Y_i v_i+X_j u_j+Y_j v_j+X_m u_m+Y_m v_m)d\tau$$

$X_r$ 和 $Y_r$ 为节点 $r$ 上的等效荷载，由此式可知

$$X_i=\frac{\Delta}{3}F_x,\quad Y_i=\frac{\Delta}{3}F_y,\quad X_j=X_m=\frac{\Delta}{3}F_x+\frac{l_{jm}}{2}\bar{P}_x,\ Y_j=Y_m=\frac{\Delta}{3}F_y+\frac{l_{jm}}{2}\bar{P}_y$$

2．在泛函 $\Pi_1$ 中，对温度 $T$ 变分将给出 $\eta=-\frac{\partial\phi}{\partial T}$。如果在以后的计算中将此关系式作为已知条件，则在泛函 $\Pi_1$ 中只需计算对节点位移的变分。

3．与节点位移的变分无关的各项以 $[O_{\delta u}]$ 表示，可不必计算。

于是平面问题的 $\Pi_1^{ek}$ 为

$$\Pi_1^{ek}=\frac{b}{2}[\delta]^{ek}([p]^{ek}+[q]^{ek}-[d]^{ek})\{\delta\}^{ek}+b[\delta]^{ek}([g]^{ek}\{T\}^{ek}$$
$$+\{R^*\}^{ek})+[O_{\delta u}] \tag{2.7}$$

此式中 $[\delta]^{ek}$ 为节点位移行阵，即

$$[\delta]^{ek}=[u_{ik-1}\ v_{ik-1}\ u_{ik}\ v_{ik}\ u_{jk-1}\ v_{jk-1}\ u_{jk}\ v_{jk}\ u_{mk-1}\ v_{mk-1}\ u_{mk}\ v_{mk}]$$

$\{T\}^{ek}$ 为单元节点温度列阵，即

$$\{T\}^{ek}=[T_{ik-1}\ T_{ik}\ T_{jk-1}\ T_{jk}\ T_{mk-1}\ T_{mk}]^T$$

$\{R^*\}^{ek}$ 为当量等效荷载列阵，它等于

$$\{R^*\}^{ek}=\frac{\tau_k}{2}[X_i^*\ Y_i^*\ X_i^*\ Y_i^*\ X_j^*\ Y_j^*\ X_j^*\ Y_j^*\ X_m^*\ Y_m^*\ X_m^*\ Y_m^*]^T$$

其中 $X_r^*$ 和 $Y_r^*(r=i、j、m)$ 在平面应力情况时等于

$$X_r^*=X_r+\frac{E\alpha}{6}\cdot\frac{T_0^e}{1-\nu}b_r,\quad Y_r^*=Y_r+\frac{E\alpha}{6}\cdot\frac{T_0^e}{1-\nu}C_r$$

在平面应变情况时，只需以 $(1-2\nu)$ 替换 $(1-\nu)$。式中 $T_0^e$ 为单元平均温度初始值，即

$$T_0^e=\frac{1}{3}(T_{i0}+T_{j0}+T_{m0})$$

式(2.7)的各系数矩阵均可写成由 9 个子阵组成的分块矩阵

$$[p]^{ek}=\begin{pmatrix} p_{ii}^k & p_{ij}^k & p_{im}^k \\ p_{ji}^k & p_{jj}^k & p_{jm}^k \\ p_{mi}^k & p_{mj}^k & p_{mm}^k \end{pmatrix},\ (q,\ d,\ g)$$

$[p]^{ek}$ 是 12×12 方阵，若不考虑时间元，它将成为动力问题的质量矩阵。子阵 $p_{rs}^k$ 对平面应

力和平面应变有相同值，它等于

$$p_{rs}^{k}=\begin{cases}\dfrac{\rho\Delta}{6\tau_k}\\(r=s)\\ \dfrac{\rho\Delta}{12\tau_k}\\(r\neq s)\end{cases}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix},\quad r、s=i、j、m$$

为书写简便、引入以下符号

$$A_1=b_rb_s,\quad A_2=b_rc_s,\quad A_3=c_rb_s,\quad A_4=c_rc_s$$

$$A_5=b_rb_s+\frac{1-\nu}{2}c_rc_s,\quad A_6=2\nu b_rc_s+\frac{1-\nu}{2}c_rb_s$$

$$A_7=\frac{1-\nu}{2}b_rc_s,\qquad A_8=c_rc_s+\frac{1-\nu}{2}b_rb_s$$

$$f_k=\begin{cases}\dfrac{E\tau_k}{1-\nu}-\dfrac{3}{4}\rho b^2\dfrac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)^2}\ \text{(平面应力)}\\[2ex]\dfrac{E\tau_k}{1-2\nu}\ \text{(平面应变)}\end{cases}$$

$$f_k^*=\begin{cases}\dfrac{E\tau_k}{2(1-\nu)}+\dfrac{3}{4}\rho b^2\dfrac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)^2}\ \text{(平面应力)}\\[2ex]\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{E\tau_k}{1-2\nu}\ \text{(平面应变)}\end{cases}$$

则 $q_{rs}^{k}$， $d_{rs}^{k}$， $g_{rs}^{k}$ 分别等于

$$q_{rs}^{k}=\begin{cases}\dfrac{b^2\nu^2}{4(1-\nu)^2}\cdot\dfrac{\rho}{4\Delta\tau_k}\\ \text{(平面应力)}\\ 0\ \text{(平面应变)}\end{cases}\begin{bmatrix}A_1&A_2&-A_1&-A_2\\A_3&A_4&-A_3&-A_4\\-A_1&-A_2&A_1&A_2\\-A_3&-A_4&A_3&A_4\end{bmatrix},\quad g_{rs}^{k}=\frac{\alpha}{54}\begin{bmatrix}b_rf_k&b_rf_k^*\\c_rf_k&c_rf_k^*\\b_rf_k^*&b_rf_k\\c_rf_k^*&c_rf_k\end{bmatrix},$$

$$d_{rs}^{k}=\begin{matrix}\dfrac{E\tau_k}{12\Delta(1-\nu^2)}\\ \text{(平面应力)}\end{matrix}\begin{bmatrix}A_5&A_6&\frac{1}{2}A_6&\frac{1}{2}A_6\\A_7&A_8&\frac{1}{2}A_7&\frac{1}{2}A_8\\\frac{1}{2}A_5&\frac{1}{2}A_6&A_5&A_6\\\frac{1}{2}A_7&\frac{1}{2}A_8&A_7&A_8\end{bmatrix}。均有\ r、s=i、j、m$$

$d_{rs}^{k}$子阵中以$\dfrac{E}{1-\nu^2}$替换$E$，以$\dfrac{\nu}{1-\nu}$替换$\nu$，即得平面应变情况的$d_{rs}^{k}$。若不考虑时间元，$[d]^{ek}$将成为弹性平面问题中的刚度矩阵。

确定了$[p]^{ek}$，$[q]^{ek}$，$[d]^{ek}$，$[g]^{ek}$和$\{R^*\}^{ek}$后，$\Pi_1^{ek}$成为待定值$[\delta]^{ek}$和$\{T\}^{ek}$的函

数。

以$\Pi_2^{ek}$表示平面单元在时间元内的热流势作用量，则

$$\Pi_2=\sum_e\sum_k \Pi_2^{ek} \tag{2.8}$$

改变式(1 12)中泛函$\Pi_2$的积分域为$\tau_k$、$\Delta$和$l_{jm}$，将$\eta=-\dfrac{\partial\phi}{\partial T}$及式(2.1),(2.2),(2.3),(2.4)代入并积分得

$$\begin{aligned}\Pi_2^{ek}&=\frac{b}{2}[T]^{ek}([\xi]^{ek}+[\chi_1]^{ek}+[\chi_2]^{ek}+[\omega]^{ek})\{T\}^{ek}\\&+b[T]^{ek}([\varepsilon]^{ek}\{\delta\}^{ek}-\{T_4^*\}^{ek})\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中系数矩阵均由 9 个子阵组成，即

$$[\xi]^{ek}=\begin{bmatrix}\xi_{ii}^k & \xi_{ij}^k & \xi_{im}^k\\ \xi_{ji}^k & \xi_{jj}^k & \xi_{jm}^k\\ \xi_{mi}^k & \xi_{mj}^k & \xi_{mm}^k\end{bmatrix},\quad (\chi_1,\chi_2,\omega,\varepsilon)$$

子阵$\xi_{rs}^k$等于

$$\xi_{rs}^k=\frac{h\tau_k}{12\Delta}(A_1+A_4)\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$\chi_{1rs}^k$ 和 $\chi_{2rs}^k$ 分别等于

$$\chi_{1rs}^k=\frac{E(1+3\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\frac{\alpha^2}{9}\cdot\frac{\tau_k\Delta}{10}\left(\frac{1}{3}T_{r0}+\frac{1}{3}T_{s0}+T_0^e\right)\begin{cases}1 & (r=s)\\ \frac{1}{2} & (r\neq s)\end{cases}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

（平面应力）

$\chi_{1rs}^k=0$ （平面应变）

$$\chi_{2rs}^k=\frac{C_E}{6}\tau_k\Delta\begin{cases}1 & (r=s)\\ \frac{1}{2} & (r\neq s)\end{cases}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

以上均有 $r$、$s=i$、$j$、$m$.

子阵 $\omega_{rs}^k$ 等于

$$\omega_{rs}^{k}=\frac{\beta\tau_k\Delta}{9b}\begin{cases}1 & (r=s)\\ \frac{1}{2} & r\neq s\end{cases}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad r、s=i、j、m$$

（平面应力）

$$\omega_{rs}^{k}=\begin{cases}0(r、s=i)\\ \dfrac{\beta\tau_k l_{jm}}{18}\begin{cases}1 & (r=s)\\ \frac{1}{2} & (r\neq s)\end{cases}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\end{cases},\quad r、s=i、j、m$$

子阵$e_{rs}^{k}$等于

$$e_{rs}^{k}=\frac{E\alpha}{48}\left(T_0^e+\frac{T_{r0}}{3}\right)\begin{cases}\dfrac{1}{1-\nu} & (\text{平面应力})\\ \dfrac{1}{1-2\nu} & (\text{平面应变})\end{cases}\begin{pmatrix}-b_s & -c_s & b_s & c_s\\ -b_s & -c_s & b_s & c_s\end{pmatrix}$$

列阵$\{T_A^*\}$ 等于

$$\{T_A^*\}^{ek}=\frac{2\beta}{b}\cdot\frac{\tau_k\Delta}{6}\cdot T_A[\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]^T,\ (\text{平面应力})$$

$$\{T_A^*\}^{ek}=\beta\cdot\frac{l_{jm}\tau_k}{8}\cdot T_A[\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]^T,\ (\text{平面应变})$$

确定了矩阵$[\xi]^{ek}$，$[\chi_1]^{ek}$，$[\chi_2]^{ek}$，$[\omega]^{ek}$，$[e]^{ek}$和$\{T_A^*\}^{ek}$后，$\Pi_2^{ek}$ 成为待定值$[T]^{ek}$和$[\delta]^{ek}$的函数。

## 三、总体合成及基本方程

将$\Pi_1^{ek}$和$\Pi_2^{ek}$合成为$\Pi_1$和$\Pi_2$时，首先就一个平面单元对所有的时间元求和，然后再对所有平面单元求和。

设时间元共有n个。节点$r$在各瞬时的位移和温度分别以$[\delta_r]$和$[T_r]$表示，即

$$\underset{1\times2(n+1)}{[\delta_r]}=[u_{r0}\ v_{r0}\ u_{r1}\ v_{r1}\cdots\cdots u_{rn}\ v_{rn}]$$

$$\underset{1\times(n+1)}{[T_r]}=[T_{r0}\ T_{r1}\cdots\cdots T_{rn}]$$

设弹性平面上共有$l$个节点，则全部位移和温度的行阵$[\delta]$和$[T]$为

$$\underset{1\times2l(n+1)}{[\delta]}=[[\delta_1]\ [\delta_2]\cdots\cdots[\delta_l]]$$

$$\underset{1\times l(n+1)}{[T]}=[[T_1]\ [T_2]\cdots\cdots[T_l]]$$

由（2.7）和（2.9）式，单元的各系数矩阵对所有时间元求和时，为简便起见，引入以下符号

$$\tau_{k,k+1}=\tau_k+\tau_{k+1},\quad f_{k,k+1}=f_k+f_{k+1}$$

$$\zeta_k=\frac{1}{\tau_k},\quad \zeta_{k,k+1}=\frac{1}{\tau_k}+\frac{1}{\tau_{k+1}}$$

于是得

$$\underset{2(n+1)\times 2(n+1)}{p_{rs}}=\begin{cases}\dfrac{\rho\Delta}{6} & (r=s)\\[2mm] \dfrac{\rho\Delta}{12} & (r\neq s)\end{cases}\left(\begin{array}{cccccccccccc}
\zeta_1 & 0 & -\zeta_1 & 0 & & & & & & & & \\
0 & \zeta_1 & 0 & -\zeta_1 & & & & & & 0 & & \\
-\zeta_1 & 0 & \zeta_{1,2} & 0 & -\zeta_2 & 0 & & & & & & \\
0 & -\zeta_1 & 0 & \zeta_{1,2} & 0 & -\zeta_2 & & & & & & \\
 & & -\zeta_2 & 0 & \zeta_{2,3} & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & -\zeta_2 & 0 & \zeta_{2,3} & \cdots & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & & \zeta_{n-1,n} & 0 & -\zeta_n & 0 \\
 & & 0 & & & & & & 0 & \zeta_{n-1,n} & 0 & -\zeta_n \\
 & & & & & & & & -\zeta_n & 0 & \zeta_n & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & -\zeta_n & 0 & \zeta_n
\end{array}\right)$$

$$q_{rs}=\begin{cases}\dfrac{b^2\nu}{(1-\nu)^2}\cdot\dfrac{\rho}{16\Delta} & (\text{平面应力})\\[2mm] 0 & (\text{平面应变})\end{cases}\quad 2(n+1)\times 2(n+1)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
A_1\zeta_1 & A_2\zeta_1 & -A_1\zeta_1 & -A_2\zeta_1 & & & & & & & & \\
A_3\zeta_1 & A_4\zeta_1 & -A_3\zeta_1 & -A_4\zeta_1 & & & & & & & & \\
-A_1\zeta_1 & -A_2\zeta_1 & A_1\zeta_{1,2} & A_2\zeta_{1,2} & -A_1\zeta_2 & -A_2\zeta_2 & & & & 0 & & \\
-A_3\zeta_1 & -A_4\zeta_1 & A_3\zeta_{1,2} & A_4\zeta_{1,2} & -A_3\zeta_2 & -A_4\zeta_2 & & & & & & \\
 & & -A_1\zeta_2 & -A_2\zeta_2 & A_1\zeta_{2,3} & A_2\zeta_{2,3} & & & & & & \\
 & & -A_3\zeta_2 & -A_4\zeta_2 & A_3\zeta_{2,3} & A_4\zeta_{2,3} & \cdots & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & & A_1\zeta_{n-1,n} & A_2\zeta_{n-1,n} & A_1\zeta_n & A_2\zeta_n \\
 & & & & & & & & A_3\zeta_{n-1,n} & A_4\zeta_{n-1,n} & A_3\zeta_n & -A_4\zeta_n \\
 & & 0 & & & & & & -A_1\zeta_n & -A_2\zeta_n & A_1\zeta_n & A_2\zeta_n \\
 & & & & & & & & -A_3\zeta_n & -A_4\zeta_n & A_3\zeta_n & A_4\zeta_n
\end{array}\right)$$

$$d_{rs}=\frac{E}{12(1-\nu^2)\Delta}\left(\begin{array}{ccccccccccc}
A_5\tau_1 & A_6\tau_1 & A_5\frac{\tau_1}{2} & A_6\frac{\tau_1}{2} & & & & & & & \\
A_7\tau_1 & A_8\tau_1 & A_7\frac{\tau_1}{2} & A_8\frac{\tau_1}{2} & & & & & & & \\
A_5\frac{\tau_1}{2} & A_6\frac{\tau_1}{2} & A_5\tau_{1;2} & A_6\tau_{1;2} & A_5\frac{\tau_1}{2} & A_6\frac{\tau_1}{2} & & & 0 & & \\
A_7\frac{\tau_1}{2} & A_8\frac{\tau_1}{2} & A_7\tau_{1;2} & A_8\tau_{1;2} & A_7\frac{\tau_1}{2} & A_8\frac{\tau_1}{2} & & & & & \\
 & & A_5\frac{\tau_2}{2} & A_6\frac{\tau_2}{2} & A_5\tau_{2;3} & A_6\tau_{2;3} & & & & & \\
 & & A_7\frac{\tau_2}{2} & A_8\frac{\tau_2}{2} & A_7\tau_{2;3} & A_8\tau_{2;3} & \cdots & & & & \\
 & & & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & A_5\tau_{n-1;n} & A_6\tau_{n-1;n} & A_5\frac{\tau_n}{2} & A_6\frac{\tau_n}{2} \\
 & & & & & & & A_7\tau_{n-1;n} & A_8\tau_{n-1;n} & A_7\frac{\tau_n}{2} & A_8\frac{\tau_n}{2} \\
 & & 0 & & & & & A_5\frac{\tau_n}{2} & A_6\frac{\tau_n}{2} & A_5\tau_n & A_6\tau_n \\
 & & & & & & & A_7\frac{\tau_n}{2} & A_8\frac{\tau_n}{2} & A_7\tau_n & A_8\tau_n
\end{array}\right)$$

$2(n+1)$
$\times 2(n+1)$
（平面应力）

以$\frac{\nu}{1-\nu}$替换$\nu$，以$\frac{E}{(1-\nu^2)}$替换$E$代入此式，即得平面应变下的$d_{rs}$。

$$g_{rs}=\frac{a}{54}\left(\begin{array}{cccccc}
b_rf_1 & b_rf_1^* & & & & \\
c_rf_1 & c_rf_1^* & & & & \\
b_rf_1^* & b_rf_{1;2} & b_rf_2^* & & 0 & \\
c_rf_1^* & c_rf_{1;2} & c_rf_2^* & & & \\
 & b_rf_2^* & b_rf_{2;3} & & & \\
 & c_rf_2^* & c_rf_{2;3} & \cdots & & \\
 & & \cdots & & & \\
 & & & & b_rf_{n-1;n} & b_rf_n^* \\
 & & & & c_rf_{n-1;n} & c_rf_n^* \\
 & 0 & & & b_rf_n^* & b_rf_n \\
 & & & & c_rf_n^* & c_rf_n
\end{array}\right)$$

$2(n+1)$
$\times(n+1)$

此式中$f_k$及$f_k^*$对平面应力和平面应变需代以不同的值。

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\xi_{rs}}=\frac{h}{12\Delta}(A_1+A_4)\begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{1}{2}\tau_1 & & & & 0 \\ \frac{1}{2}\tau & \tau_{1,2} & \frac{1}{2}\tau_2 & & & \\ & \frac{1}{2}\tau_2 & \tau_{2,3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \tau_{n-1,n} & \frac{1}{2}\tau_n \\ 0 & & & & \frac{1}{2}\tau_n & \tau_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\left.\begin{matrix}\chi_{1rs}\\ \chi_{2rs}\end{matrix}\right\}}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{E(1+3\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}\left(\dfrac{1}{3}T_{r0}+\dfrac{1}{3}T_{s0}+T_0^e\right)\dfrac{\alpha^2\Delta}{90} \\ (\text{平面应力}) \\ \dfrac{C_E\Delta}{6}(\text{平面应力和应变})\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 \\ (r=s) \\ \frac{1}{2} \\ (r\neq s)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}\tau_1 & & & & \\ \tau_1 & \tau_2 & & & 0 \\ & \tau_2 & \tau_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_{n-1} & \tau_n \\ & & & & \tau_n\end{pmatrix}$$

对于平面应变，$\chi_{1rs}=0$.

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\omega_{rs}}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{2}{9}\dfrac{\beta\Delta}{b}(\text{平面应力}) \\ \dfrac{1}{9}\beta l_{im}(\text{平面应变})\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 \\ (r=s) \\ \frac{1}{2} \\ (r\neq s)\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{1}{2}\tau_1 & & & & 0 \\ \frac{1}{2}\tau_1 & \tau_{1,2} & \frac{1}{2}\tau_2 & & & \\ & \frac{1}{2}\tau_2 & \tau_{2,3} & \cdots & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & & \tau_{n-1,n} & \frac{1}{2}\tau_n \\ 0 & & & & \frac{1}{2}\tau_n & \tau_n \end{pmatrix}$$

但对于平面应变情况，当$r$、$s=i$时，$\omega_{rs}=0$.

$$\underset{(n+1)\times 2(n+1)}{e_{rs}}=\frac{E\alpha}{48}\left(T_0^e+\frac{T_{r0}}{3}\right)\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{1-\nu}(\text{平面应力}) \\ \dfrac{1}{1-2\nu}(\text{平面应变})\end{matrix}\right.\begin{pmatrix} -b_s & -c_s & b_s & c_s & & & & & 0 \\ -b_s & -c_s & 0 & 0 & b_s & c_s & & & \\ & & b_s & -c_s & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & b_s & c_s \\ 0 & & & & & -b_s & -c_s & b_s & c_s \end{pmatrix}$$

列阵 $\{R^*\}=[[R_1^*]\ [R_2^*]\ [R_3^*]\cdots[R_l^*]]^T$，其中子阵为

$$\underset{1\times 2(n+1)}{\{R_r^*\}}=\frac{1}{2}[X_r\tau_1\quad Y_r\tau_1\quad X_r\tau_{1,2}\quad Y_r\tau_{1,2}\cdots X_r\tau_n\quad Y_r\tau_n]^T$$

列阵 $\{T_A^*\}=[[T_{A1}^*][T_{A2}^*]\cdots[T_{Al}^*]]^T$，其中子阵为

$$\underset{1\times(n+1)}{\{T_{Ar}^*\}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\Delta}{3b}(\text{平面应力})\\ \dfrac{l_{jm}}{8}(\text{平面应变})\end{Bmatrix}\beta T_A[\tau_1\quad\tau_{1,2}\quad\tau_{2,3}\cdots\tau_{n-1,n}\quad\tau_n]^T$$

平面应变时 $\{T_{Ai}^*\}=0$，所以上式中对平面应变而言，$r=j$、$m$. 如果某些单元不向周围介质散热，则该单元的节点对应的 $[T_{Ar}^*]$ 和 $\omega_{rs}$ 应同时取零值。

建立整体的系数矩阵时，每个矩阵均由 $l\times l$ 个子阵组成，其中每个子阵由环绕同一节点的各平面单元的对应系数子阵叠加，即

$$P_{rs}=\sum_e p_{rs},\quad Q_{rs}=\sum_e q_{rs},\quad D_{rs}=\sum_e d_{rs},\quad G_{rs}=\sum_e g_{rs},$$

$$\Xi_{rs}=\sum_e \xi_{rs},\quad \Omega_{rs}=\sum_e \omega_{rs},\quad X_{rs}=\sum_e(\chi_{1rs}+\chi_{2rs}),\quad E_{rs}=\sum_e \varepsilon_{rs}$$

于是得泛函 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 的表达式

$$\Pi_1=\frac{b}{2}[\delta]([P]+[Q]-[D])\{\delta\}+b[\delta]([G]\{T\}+\{R^*\})+[O_{\delta u}]\tag{3.1}$$

$$\Pi_2=\frac{b}{2}[T]([\Xi]+[\Omega]+[X])\{T\}+b[T]([E]\{\delta\}-\{T_A^*\})\tag{3.2}$$

对 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 取极值

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial\delta_r}=0,\qquad \frac{\partial\Pi_2}{\partial T_r}=0$$

得

$$([D]-[P]-[Q])\{\delta\}=\{R^*\}+[G]\{T\}\tag{3.3}$$

$$([\Xi]+[\Omega]+[X])\{T\}=\{T_A^*\}-[E]\{\delta\}\tag{3.4}$$

这两组方程就是耦合热弹性平面问题的有限元法基本方程。第一组有 $2l(n+1)$ 个方程，第二组有 $l(n+1)$ 个方程。共包含 $2l(n+1)$ 个待定位移值和 $l(n+1)$ 个待定温度值。但由于初值是给定的，所以实际上待定值有 $3ln$ 个。方程联解，即可求得全部待定值。

## 参　考　文　献

1. 钱伟长，《变分法及有限元讲义》 清华大学印（1978）
2. 竹内洋一郎，《热应力》 科学出版社（1977）
3. Biot, M. A.. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics *J Appl Physics* 27. (1956)
4. M Ben-Amoz, On a variational theorem in coupled thermoelasticity. *J. Appl. Mech.* 32 (1965)
5. 冯康，《有限元方法》 中国科学院计算技术研究所印（1975）
6. 朱伯芳等，《水工混凝土结构的温度应力与温度控制》 水利电力出版社（1976）
7. 华东水利学院，《弹性力学问题的有限单元法》 水利电力出版社（1974）

# The Fundamental Equations in Finite-Element Method of Coupled Thermo-elastic Plane Problem

Wang Hong-gang *(The Kunming Institute of Technology)*

**Abstract**

The fundamental equations in finite element method for unsteady temperature field elastic plane problem are derived on the bases of variational principle of coupled thermoelastic problems. In these derivations, elastic plane is divided into three nodes triangular elements, and time interval is divided into linear time elements, in which all the variables, including displacements and temperatures at various nodal points, are varied linearly with time. Two coupled sets of linear algebraic equations of all the unknown displacements and temperatures at every nodal point in every instant (i. e. the terminal values of time elements) are obtained. They are the fundamental equations of the said problem.