应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

推广约当引理以及Laplace变换与Fourier变换的对应关系

魏志勇[1]　　诸永泰[1]

（樊大钧推荐，1995年7月19日收到，1996年5月13日收到修改稿）

摘　要

单变量复变函数积分中用到的约当引理是在 $\lim\limits_{R\to\infty}\|f(Re^{i\varphi})\|=0$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的条件下使用的，而实际上约当引理可以在比较宽松的条件下就可使用，被积函数 $f(z)$ 除在 z 的上半平面（$\mathrm{Im}z\geqslant0$）有有限个孤立奇点外，处处解析，且对 $p>0$ 只要，

$\lim\limits_{R\to\infty}\|f(Re^{i\varphi})\|Re^{-Rp}=0$ 则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{CR}f(z)e^{ipz}dz=0$

这里 $z=Re^{i\varphi}$，CR 为上半平面的开弧半圆围道。利用推广约当引理可以证明Laplace变换实际上是对应的其复变量函数的Fourier变换。

关键词　推广约当引理　Laplace变换　Fourier变换　复变函数

一、引　　言

单变量复变函数积分中，约当引理有十分广泛的用途，它使许多有关三角函数的积分问题变成很简单的过程，另外由于Fourier变换作为一种基本的工具已广泛使用在各种领域中，因此这一问题与许多实际问题密切相关，但是约当引理对于被积函数的要求也比较严格。设被积函数 $f(z)$ 除在 z 的上半平面（$\mathrm{Im}z\geqslant0$）有有限个孤立奇点外，处处解析，且对 $\|z\|\to\infty$ 时在 $\arg z$ $(0\leqslant\arg z\leqslant\pi)$ 中一致地趋于零，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{CR}f(z)e^{ipz}dz=0$$

其中 $z=Re^{i\varphi}$，CR 为上半平面的半圆围道。就是说在通常的情况下，单变量复变函数积分中约当引理要求被积函数在无穷远处绝对且一致地趋于零[1]，即对于 $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，要求

$$\lim_{R\to\infty}\|f(Re^{i\varphi})\|=0 \tag{1.1}$$

最初的约当引理的证明中用了直接求上半平面半圆围道积分的方法，

$$I_R=\left\|\int_0^{\pi}f(Re^{i\varphi})iR\exp(i\varphi+iRe^{i\varphi})d\varphi\right\|$$

1 中国科学院近代物理研究所，兰州 730000

$$I_R \leqslant \left\| f_{max}(Re^{i\varphi}) \right\| R \int_0^{\pi} \exp(-R\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$I_R \leqslant \| f_{max}(Re^{i\varphi}) \| \, 2R \int_0^{\pi/2} \exp(-R\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$I_R \leqslant \| f_{max}(Re^{i\varphi}) \| 2R \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-2R\varphi}{\pi}\right) d\varphi$$

$$I_R \leqslant \| f_{max}(Re^{i\varphi}) \| \pi(1-e^{-R}) \tag{1.2}$$

这里 $\| f_{max} Re^{i\varphi}) \|$ 为函数 $\| f(z) \|$ 在固定的 R 下作为 φ 的函数的极大值．这个结果当然是正确的，可是，这种证明过程丢失一些有用的东西，把一些本应该包含在内的东西排除在外了，从而使使用范围减小，因此最初的约当引理是一个保守的估计．实际上约当引理可以在比较宽松的条件下使用[2]，被积函数 $f(z)$ 除在上半平面有有限个孤立奇点外，处处解析，且对 $p>0$ 及 $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$，

只要，
$$\lim_{R\to\infty} \| f(Re^{i\varphi}) \| Re^{-Rp} = 0 \tag{1.3}$$

则
$$\lim_{R\to\infty} \int_{CR} f(z) e^{ipz} dz = 0 \tag{1.4}$$

其中 $z = Re^{i\varphi}$，CR 为上半平面的开弧半圆围道．

本文将证明推广的约当引理．有了这一引理，就会使更多的复变函数积分得到简化，使得这种方法的使用范围扩大．以推广约当引理为基础可得出关于 Laplace 变换和 Fourier 变换之间关系的结果．以往我们都是将这两种积分变换作为两种独立的方法来使用的，并且认为Fourier变换仅仅用于实数域的变换，利用推广约当引理可以看出，它们两者是密切相关的．

二、约当引理的证明

取上半平面的一半圆弧路径，δ 为一很小的角度，则此圆弧 $\|z\| = R$ 上的积分

$$I_{R,\delta} = \left\| \int_{\delta}^{\pi-\delta} f(Re^{i\varphi}) iR \exp(i\varphi + ipRe^{i\varphi})\, d\varphi \right\|$$

$$I_{R,\delta} \leqslant \| f_{max} Re^{i\varphi}) \| R \int_{\delta}^{\pi-\delta} \exp(-pR\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$I_{R,\delta} \leqslant \| f_{max}(Re^{i\varphi}) \| R(\pi - 2\delta) \exp(-pR\sin\varphi_\delta) \tag{2.1}$$

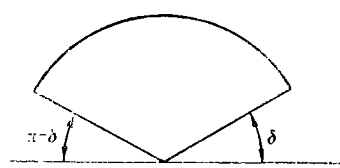

图 1

这里 $\| f_{max}(Re^{i\varphi}) \|$ 为函数 $\| f(z) \|$ 在固定的 R 下作为 φ 的函数时的极大值．φ_δ 为 $\pi-\delta$ 至 δ 中间的一点（中值定理）．$I_{R,\delta}$ 即和 R 有关同时也和 δ 有关，下面将分两种情况来讨论 $I_{R,\delta}$ 的性质．

首先，如果先 $\delta\to 0$ 再 $R\to\infty$ 时有

$$\lim_{R\to\infty} \{ \lim_{\delta\to 0} I_{R,\delta} \} = 0 \tag{2.2}$$

可以证明，此时一定有这样的结果：在先 $R\to\infty$ 然后 $\delta\to 0$ 时必须有

$$\lim_{\delta\to 0}\{\lim_{R\to\infty} I_{R,\delta}\}=0 \tag{2.3}$$

这种情况正好对应于原先的约当引理，$I_{R,\delta}$在$R\to\infty$时一致趋于零。

其次，如果只有先$R\to\infty$然后$\delta\to 0$时，才有

$$\lim_{\delta\to 0}\{\lim_{R\to\infty} I_{R,\delta}\}=0 \tag{2.4}$$

尽管$I_{R,\delta}$随$R\to\infty$而有条件地趋于零，此时 Jordan 引理仍然是成立的，因为原先的约当引理对应于在闭区间$[0,\ \pi]$上$I_{R,\delta}$随$R\to\infty$时趋于零，而第二种情况则对应于在开区间$(0,\ \pi)$上$I_{R,\delta}$随$R\to\infty$时趋于零，由于在0和π这两个端点处的积分贡献在沿实轴的积分中就已经考虑了，因此在第二种情况下约当引理仍然成立。从另外一个角度看，设想如图所示的积分围道，当以先$R\to\infty$然后$\delta\to 0$的方式将围道扩大并保持为闭合围道，就不难理解这一结论。

在文献[2]中的具体情况下，要求被积函数在实轴上仅有一阶奇点，而在普遍的情况下这一限制可以不要。另外，诸如最初的约当引理[1]可以表现许多形式，同样的道理，推广的约当引理也可以表现为其它一些形式，如积分围道取下半平面，积分沿平行于实轴的一条直线，积分沿平行于虚轴的一条直线时等一些情况下的约当引理都可以得到，不再详细表述。

三、Laplace变换与Fourier变换的对应关系

以往的许多工作，以及作为常识性的概念都是把Laplace 变换与 Fourier 变换看作相互独立的积分变换，根据目前所得的推广的约当引理很容易发现它们密切连系在一起的，它们之间有对应关系存在。

$$\begin{aligned}F\{f(x),k\}&=\int_0^{\infty} f(x)e^{ikx}dx=\int_0^{i\infty} f(x)e^{ikx}dx+2i\pi\sum_i \mathrm{res}f(x_i)\\&=i\int_0^{\infty} f(ix)e^{-kx}dx+2i\pi\sum_i \mathrm{res}f(x_i)\\&=iL\{(f(ix),\ k\}+2i\pi\sum_i \mathrm{res}f(x_i)\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中$\mathrm{res}f(x_i)$为在第一象限中函数$f(x)$在点(x_i)处的留数，$L\{f(x),\ k\}$为$f(x)$ 的 Laplace 变换的像函数，$F\{f(x),\ k\}$则为$f(x)$的Fourier变换的像函数。由此可见Laplace变换实际上是对应的其复变量函数的Fourier变换，再加上留数的贡献。

参 考 文 献

[1] A. Sveshnikov and A. Tikchonov, *The Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publisher, Moscow (1978).

[2] 魏志勇、诸永泰，广义约当引理，甘肃科学学报，6(2) (1994)，26.

The Extended Jordan's Lemma and the Relation between Laplace Transform and Fourier Transform

Wei Zhiyong Zhu Yongtai

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica, P. O. Box* 31, *Nanchang Road* 253, *Lanzhou* 730000, *P. R. China*)

Abstract

Jordan's lemma can be used for a wider range than the original one. The extended Jordan's lemma can be described as follows. Let $f(z)$ be analytic in the upper half of the z plane ($\mathrm{Im}z \geqslant 0$), with the exception of a finite number of isolated singularities, and for $p>0$, if $\lim\limits_{R\to\infty}\|f(Re^{i\varphi})\|Re^{-Rp}=0$ then $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{CR} f(z) \cdot e^{ipz}dz=0$ where $z=Re^{i\varphi}$ and CR is the open semicircle in the upper half of the z plane. With the extended Jordan's lemma one can find that Laplace transform and Fourier transform are a pair of integral transforms which relate to each other.

Key words extended Jordan's lemma, Laplace transform, Fourier transform, complex variable function