应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类广义BBM方程周期行波解的存在性

黄南京[1]

（张石生推荐，1995年10月5日收到）

摘 要

本文引入和讨论一类新的广义BBM方程，得到了关于这类广义BBM方程周期行波解的一些存在性定理。

关键词 广义BBM方程 周期行波解 格林函数 不动点

一、引 言

文[5]建立了下述Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程

$$u_t+uu_x-u_{xxt}=0 \tag{1.1}$$

解的整体存在性和唯一性，其中，$x\in\mathbf{R}$，$t\geqslant 0$. 上述 BBM 方程模拟非线性扩散系统中的长波，是Kortweg-de Vries方程

$$u_t+uu_x-u_{xxx}=0 \tag{1.2}$$

的替代模型.

最近，有不少作者研究广义BBM方程解的存在性和唯一性（参见[3，4，6，7]）. 本文考虑下述形式的广义BBM方程

$$u_t+(f_0(u))_x-\delta u_{xxt}=0 \tag{1.3}$$

其中，$\delta>0$为常数，$f_0(u)$是$\mathbf{R}$上的可微函数. 当$f_0(u)=u^2/2$，$\delta=1$时，方程(1.3)变成(1.1). 本文的目的是研究下述形式的周期行波解

$$u(x,\ t)=u(x-\beta t)=v(\xi)\qquad(\xi=x-\beta t)$$

其中，β是表示波传播速度的正常数. 通过函数$v(\xi)$，方程(1.3)可变为三阶常微分方程

$$-\lambda^2 v_\xi+(f(v))_\xi+v_{\xi\xi\xi}=0\qquad(\xi\in\mathbf{R}) \tag{1.4}$$

其中，$f(v)=(\delta\beta)^{-1}f_0(v)$，$\lambda^2=\delta^{-1}$

我们寻找方程(1.3)的解，使其满足下述周期条件

$$v(\xi+2T)=v(\xi)\qquad(\xi\in\mathbf{R}) \tag{1.5}$$

或

$$\frac{d^kv}{d\xi^k}(0)=\frac{d^kv}{d\xi^k}(2T)\qquad(k=0,\ 1,\ 2) \tag{1.6}$$

---

1 四川大学数学系，成都 610064

其中，$T>0$是一给定常数。

排除非平凡常数解，我们要求函数$v(\xi)$满足下述条件

$$\int_0^{2T} v(\xi)d\xi=0 \tag{1.7}$$

本文利用Green函数方法，给出广义BBM方程(1.3)周期行波解的一些存在性定理。

二、预 备 知 识

首先，我们考虑下述积分方程

$$v(\xi)=\int_0^{2T} K(\xi,\ \eta)f(v(\eta))d\eta \qquad (0\leqslant\xi\leqslant 2T) \tag{2.1}$$

其中

$$K(\xi,\ \eta)=\begin{cases}(2\lambda\mathrm{sh}\lambda T)^{-1}\mathrm{ch}\lambda(T-\xi+\eta)-(2\lambda^2T)^{-1}, & 0\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant 2T\\ (2\lambda\mathrm{sh}\lambda T)^{-1}\mathrm{ch}\lambda(-T-\xi+\eta)-(2\lambda^2T)^{-1}, & 0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant 2T\end{cases}$$

显然，$K(\xi,\ \eta)=K(\eta,\ \xi)$，且$K$在$[0,\ 2T]\times[0,\ 2T]$上连续。

现在，我们定义Green函数如下：

$G(z)=(2\lambda\mathrm{sh}\lambda T)^{-1}\mathrm{ch}\lambda(T-z),\qquad 0\leqslant z\leqslant 2T$

显然，积分方程(2.1)可以更确切地表示成下述形式

$$v(\xi)=\int_0^{\xi}G(\xi-\eta)f(v(\eta))d\eta+\int_{\xi}^{2T}G(2T+\xi-\eta)f(v(\eta))d\eta$$

$$+(2\lambda^2T)^{-1}\int_0^{2T}f(v(\eta))d\eta,\qquad 0\leqslant\xi\leqslant 2T \tag{2.2}$$

引理2.1([2])　Green函数$G(z)$具有下述性质：

(1) $G(z)\geqslant 0,\quad z\in\mathbf{R}$；

(2) $G(\xi-\eta)=G(2T-\xi+\eta),\quad 0\leqslant\xi-\eta\leqslant 2T$；

(3) $\int_0^{\xi}G(\xi-\eta)d\eta+\int_{\xi}^{2T}G(2T+\xi-\eta)d\eta=\lambda^{-2}$

引理2.2([2])　设$v(\xi)$是$[0,\ 2T]$上的连续函数。则$v(\xi)$是周期边值问题(1.4)，(1.6)和(1.7)在$[0,\ 2T]$上的解当且仅当$v(\xi)$是积分方程(2.1)的解。进一步地，对于方程(2.1)的任意解$v(\xi)$，能扩张成以$2T$为周期的函数$\bar{v}(\xi)\in C^3(\mathbf{R})$，使得$\bar{v}(\xi)$是方程(1.4)，(1.5)和(1.7)在$\mathbf{R}$中的解。

度量空间$(X,\ d)$称为度量凸的，如果对任意$x,\ y\in X,\ x\neq y$，存在$z\in X,\ z\neq x,\ y$，使得$d(x,\ y)=d(x,\ z)+d(z,\ y)$。

显然，任一赋范空间都是度量凸的。

引理2.3([8])　设$(X,\ d)$是完备的度量凸空间，T是X上的自映象，φ是$[0,\ +\infty)$上的自映象，使得

i) $d(Tx,\ Ty)\leqslant\varphi(d(x,\ y)),\quad \forall x,\ y\in X$；

ii) $\varphi(t)<t,\quad \forall t>0$。

则T在X中存在唯一不动点。

引理2.4([1])　设D是Banach空间E的有界开凸子集，$A:\bar{D}\to E$是凝聚映象，且$A(\partial D)$

$\subset \bar{D}$. 则A在$\bar{D}$中有不动点.

三、主要结果

设C_{2T}是$\mathbf{R}$上以$2T$为周期的连续函数之全体并赋以极大范数$\|\cdot\|$所成的Banach空间，我们用$B_r(v_0)$表示C_{2T}中以v_0为中心，r为半径的球. 定义映象$A: C_{2T} \to C_{2T}$如下

$$(Av)(\xi)=\int_0^{2T} K(\xi, \eta) f(v(\eta)) d\eta, \qquad v \in C_{2T}, \ \xi \in [0, 2T] \tag{3.1}$$

定理3.1 设存在球$B_r(v_0)$及常数$\rho \in (0, 1)$，使得

$$\|v_0\| \geqslant r, \ \|Av_0 - v_0\| \leqslant \rho r \tag{3.2}$$

$$\|f_0(v_1) - f_0(v_2)\| \leqslant \varphi_1(\|v_1 - v_2\|), \qquad \forall v_1, \ v_2 \in B_r(v_0) \tag{3.3}$$

其中，$\varphi_1: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$满足条件

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\beta}\varphi_1(t)+\rho r<r, && \forall t \in (0, r] \\ &\frac{2}{\beta}\varphi_1(t)<t, && \forall t>0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

则广义BBM方程(1.3)在球$B_r(v_0)$中有唯一的非平凡周期行波解$u(x-\beta t)=\tilde{v}(\xi)$.

证 由(2.1), (2.2), (3.1), (3.3)及引理2.1，我们有

$$\begin{aligned} \|Av_1 - Av_2\| &\leqslant \frac{1}{\delta\beta}\left[\int_0^{\xi} G(\xi-\eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\xi}^{2T} G(2T+\xi-\eta) d\eta + \lambda^{-2}\right] \varphi_1(\|v_1 - v_2\|) \\ &= \frac{1}{\delta\beta}[\lambda^{-2}+\lambda^{-2}]\varphi_1(\|v_1 - v_2\|) \\ &= \frac{2}{\beta}\varphi_1(\|v_1 - v_2\|), \qquad \forall v_1, \ v_2 \in B_r(v_0) \end{aligned} \tag{3.5}$$

另一方面，对任意$v \in B_r(v_0)$, $v \neq v_0$, 由(3.2), (3.4)及(3.5)知

$$\begin{aligned} \|Av - v_0\| &\leqslant \|Av - Av_0\| + \|Av_0 - v_0\| \\ &\leqslant \frac{2}{\beta}\varphi_1(\|v - v_0\|) + \rho r \end{aligned} \tag{3.6}$$

上式表明A是$B_r(v_0)$上的自映象.

令$\varphi(t)=(2/\beta)\varphi_1(t)$，则由(3.5)可得

$$\|Av_1 - Av_2\| \leqslant \varphi(\|v_1 - v_2\|), \qquad \forall v_1, \ v_2 \in B_r(v_0) \tag{3.7}$$

由(3.4), (3.7)及引理2.3知，A有唯一不动点$v \in B_r(v_0)$. 易知$v \neq 0$. 事实上，若$v=0$，则由(3.4)及(3.6)有

$$\|v_0\| = \|0 - v_0\| = \|A0 - v_0\| < r$$

这与(3.2)相矛盾.

根据引理2.2, $v(\xi)$能扩张成以$2T$为周期的函数$\tilde{v}(\xi) \in C^3(\mathbf{R})$，使得$\tilde{v}(\xi)=u(x-\beta t)$是方程(1.4), (1.6)和(1.7)的唯一非平凡行波解. 定理证毕.

定理3.2 设存在球$B_r(v_0)$，使得

$$\|v_0\|>r,\ \|Av_1-v_0\|\leqslant r,\qquad \forall v_1\in\partial B_r(v_0) \tag{3.8}$$

$$\|f_0(v_1)-f_0(v_2)\|\leqslant\Phi_1(\|v_1-v_2\|),\qquad \forall v_1,\ v_2\in B_r(v_0) \tag{3.9}$$

其中$\Phi_1:[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$不减，且

$$\frac{2}{\beta}\Phi_1(t+)<t,\qquad \forall t>0$$

则广义BBM方程(1.3)在$B_r(v_0)$中有非平凡的周期行波解$u(x-\beta t)=\bar{v}(\xi)$.

证 首先，由条件(3.8)易知$A(\partial B_r(v_0))\subset B_r(v_0)$. 对任意的$D\subset B_r(v_0)$及任意$\varepsilon>0$，根据非紧性测度的定义，存在$D_k\subset B_r(v_0)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ K$，使得

$$D\subset\bigcup_{k=1}^{K}D_k,\ \operatorname{diam}D_k\leqslant\alpha(D)+\varepsilon \tag{3.10}$$

其中 $\operatorname{diam}D_k$ 表示集合D_k的直径，$\alpha(D)$表示D的非紧性测度. 由(2.1)，(2.2)，(3.1)，(3.9)及引理2.1，对任意k，$1\leqslant k\leqslant K$，以及任意v_1，$v_2\in D_k$，我们有

$$\begin{aligned}\|Av_1-Av_2\|&\leqslant\frac{1}{\delta\beta}\left[\int_0^{\xi}G(\xi-\eta)d\eta\right.\\&\quad\left.+\int_{\xi}^{2T}G(2T+\xi-\eta)d\eta+\lambda^{-2}\right]\Phi_1(\|v_1-v_2\|)\\&=\frac{1}{\delta\beta}[\lambda^{-2}+\lambda^{-2}]\Phi_1(\|v_1-v_2\|)\\&=\frac{2}{\beta}\Phi_1(\|v_1-v_2\|)\\&\leqslant\frac{2}{\beta}\Phi_1(\operatorname{diam}D_k)\end{aligned}$$

由上式可得

$$\operatorname{diam}(A(D_k))\leqslant\frac{2}{\beta}\Phi_1(\operatorname{diam}D_k)\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ K) \tag{3.11}$$

因此，结合(3.10)和(3.11)知

$$\begin{aligned}\alpha(A(D))&=\alpha\left(A\left(\bigcup_{k=1}^{K}D_k\right)\right)=\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{K}A(D_k)\right)\\&\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant K}\alpha(A(D_k))\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant K}\operatorname{diam}(A(D_k))\\&\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant K}\frac{2}{\beta}\Phi_1(\operatorname{diam}D_k)\leqslant\frac{2}{\beta}\Phi_1(\alpha(D)+\varepsilon)\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to0$，当$\alpha(D)\neq0$时，有

$$\alpha(A(D))\leqslant\frac{2}{\beta}\Phi_1(\alpha(D)+0)<\alpha(D)$$

显然，A是有界的，且在$B_r(v_0)$上连续. 因此，A是凝聚映象. 由引理2.4，A有不动点$v\in B_r(v_0)$. 易知$v\neq0$.另由引理2.2，$v(\xi)$能扩张成以$2T$为周期的函数$\bar{v}(\xi)\in C^3(R)$，使得$\bar{v}(\xi)=u(x-\beta t)$是方程(1.4)，(1.6)及(1.7)的非平凡行波解. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] 郭大均，《非线性泛函分析》，山东科学技术出版社，济南 (1985).

[2] 黄南京，一类广义KdV方程周期行波解的存在性，赣南师范学院学报，3 (1992), 14—21.

[3] 张卫国、王明亮，B-BBM 方程的一类准确行波解及结构，数学物理学报，12 (1992), 325—331.

[4] J. Avrin, The generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in $\mathbf{R}^n$ with singular initial data, *Nonlinear Analysis*, 11 (1987), 139—147.

[5] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, *A*272 (1972), 47—78.

[6] J. A. Goldstein and B. Wichnoski, On the Benjamin-Bona-Mahony equation in higher dimensions, *Nonlinear Analysis*, 4 (1980), 665—675.

[7] L. A. Medeiros and G. Menzala Perla, Existence and uniqueness for periodic solutions of the Bejamin-Bona-Mahony equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 8 (1977), 792—799.

[8] D. W. Boyd and J. S. Wong, On nonlinear contraction, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (1969), 458—464.

Existence of Periodic Traveling Wave Solutions for a Class of Generalized BBM Equation

Huang Nanjing

(*Department of Mathematics, Sichuan Union-University, Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, a new kind of generalized BBM equation is introduced and discussed. Some existence theorems of periodic traveling wave solutions for this kind of generalized BBM equation are given.

Key words generalized BBM equation, periodic traveling wave solution, Green function, fixed point