

# 运动水平平板上混合对流的群论分析

许学咨<sup>1</sup> 施俊美<sup>2</sup> 樊建人<sup>2</sup>

(戴世强推荐, 1995年11月17日收到, 1996年9月2日收到修改稿)

## 摘 要

本文用变换群理论对运动水平平板混合对流边界层流动的动量、能量和浓度扩散方程进行了分析, 得到了与 $x^{4/(7-5^n)}$ 成正比的壁面温度分布和浓度分布, 同时壁面运动速度正比于 $x^{(3-n)/(7-5^n)}$ 时存在相似性解. 导出了相似性解方程, 用四阶Runge-Kutta方法进行了计算, 给出了 $Pr=0.72$ 和 $Sc, K_1, K_2, K_3$ 参数下的速度、温度和浓度分布, 得出了各参数对流场、温度场的影响.

**关键词** 混合对流 群论 相似性解

## 一、引 言

通常在水平平板上混合对流边界层流动的处理中, 垂直于壁面方向的浮升力分量作为高阶项而被忽略, 结果是边界层内没有横向压力变化, 然而, 当流动速度相对地小和温度差或浓度差相对地大时, 由热浮升力和浓度浮升力引起的横向压力梯度在混合对流的热传递中起着重要作用, 它改变了速度场、温度场和浓度场, 因此也改变了壁面与流体之间的热传递和质量传递. 因此, 在工程问题中研究有横向压力梯度的混合对流是很有意义的.

没有质量扩散和化学反应的水平平板混合对流已由多位学者进行过研究. 文献[1]、[2]指出, 在均匀来流绕水平平板流动时, 若平板壁面等温, 则不存在相似性解, 若壁面温度随 $x^{-1/2}$ 变化( $x$ 为从平板前缘起算的距离), 则存在相似性解. 并且文献[2]在壁面温度为常数时用局部相似性解和非相似性解进行了研究. 当 $(T_w - T_\infty) \sim x^{-1/2}$ 时, Schneider<sup>[3]</sup>在 $Pr=0.5, 1, 2$ 和 $K=-0.0787, 0.0, 0.5$ 时给出了相似性解方程的数值解. 当垂直壁面方向有吹吸速度时, Dey<sup>[4]</sup>指出 $v_w \sim x^{-1/2}$ ,  $(T_w - T_\infty) \sim x^{-1/2}$ 时存在相似性解, 并且取与[3]几乎相同的 $K$ 值范围进行了数值求解. de Hoog等人<sup>[5]</sup>, Afzal 和 Hussain<sup>[6]</sup>在文献[3]的基础上讨论了同一问题. Ramachandran等人<sup>[7]</sup>用有限差分法求解了壁面温度为常值时的水平平板上的混合对流问题. Merkin等人<sup>[8]</sup>在假定壁面为幂律温度分布时, 研究了均匀自由流及壁面固定不动和边界层外流速等于零而平板以常速运动的两种情况.

上述文献均没有计及浓度扩散方程, 当然就不可能考虑在浓度扩散方程中出现的化学反应源项. 本文考虑了浓度扩散方程, 且在该方程中考虑了化学反应出现的源项, 用变换群理

1 浙江大学力学系, 杭州 310027

2 浙江大学能源工程系, 杭州 310027

论<sup>[8~11]</sup>分析了水平平板以速度  $U(x)$  运动时混合对流的动量、能量和浓度扩散方程。分析表明, 当壁面与环境流体间的温度差和浓度差均与平板前缘起算的距离  $x$  的  $x^{4/(7-5n)}$  成正比, 且壁面运动速度与  $x^{(3-n)/(7-5n)}$  成正比时 (当  $n=3$ , 壁面运动速度为常值) 存在相似性解, 对相似性解方程用 Runge-Kutta 方法给出了  $Pr=0.72$ ,  $n=3$  和不同的  $Sc$  和  $K_i > 0 (i=1, 2, 3; K_1$  为热浮升力参数,  $K_2$  为浓度浮升力参数,  $K_3$  为化学反应的影响系数) 下的数值解。

## 二、控制方程

考虑以常速  $U(x)$  运动的水平平板上的不可压缩层流混合对流流动 [图1]。设环境温度和浓度为  $T_\infty$  和  $C_\infty$ , 壁面温度和浓度为  $T_w(x)$  和  $C_w(x)$ , 通常假定流动为近似边界层流动, 在忽略粘性耗散项时, 则该问题的控制方程组为

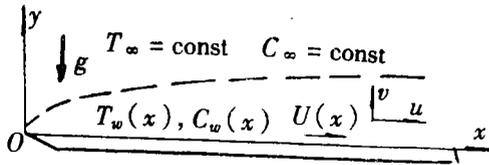


图1 水平平板上混合对流边界层流动, 坐标系和边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty) = 0 \quad (2.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - k(C - C_\infty)^n \quad (2.5)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y=0: & u=U(x), v=0, T=T_w(x), C=C_w(x) \\ y \rightarrow \infty: & u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, C \rightarrow C_\infty \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中  $u, v$  为  $x, y$  方向的速度分量;  $p$  为压力;  $T$  为温度;  $C$  为浓度;  $\rho, \nu$  为流体的密度和运动粘性系数;  $\alpha$  为热扩散系数;  $D$  为质量扩散系数;  $\beta_T, \beta_C$  分别为温度和浓度体积膨胀系数;  $k$  为反应率常数;  $n$  为反应阶。假定流体的物性系数为常数。

引入流函数  $\psi$ , 无量纲温度  $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$  和无量纲浓度  $\varphi = (C - C_\infty) / (C_w - C_\infty)$ , 并从方程(2.2)和(2.3)中将压力梯度项消去, 则控制方程组(2.1)~(2.5)转化为

$$\nu \psi_{yyyy} + \psi_x \psi_{yyy} - \psi_y \psi_{xyy} - g\beta_T [(T_w - T_\infty)\theta]_x - g\beta_C [(C_w - C_\infty)\varphi]_x = 0 \quad (2.7)$$

$$\alpha [(T_w - T_\infty)\theta]_{yy} - \psi_y [(T_w - T_\infty)\theta]_x + \psi_x [(T_w - T_\infty)\theta]_y = 0 \quad (2.8)$$

$$D [(C_w - C_\infty)\varphi]_{yy} - \psi_y [(C_w - C_\infty)\varphi]_x + \psi_x [(C_w - C_\infty)\varphi]_y - k(C_w - C_\infty)^n \varphi^n = 0 \quad (2.9)$$

## 三、群论分析

## 3.1 单参数变换群

引入单参数变换群  $G$

$$G: \bar{S} = H^s(a)S + K^s(a) \quad (3.1)$$

式中  $S$  可表示为  $x, y, \psi, \theta, \varphi, (T_w - T_\infty), (C_w - C_\infty)$ ;  $H, K$  是对单参数  $a$  可微的实数。 $\bar{S}$  表示  $S$  的变换。

将单参数变换(3.1)代入方程(2.7)~(2.9), 得

$$\begin{aligned} & \nu \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} + \bar{\psi}_{\bar{x}} \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} - \bar{\psi}_{\bar{y}} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}} - g\beta_T [(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty) \bar{\theta}]_{\bar{x}} - g\beta_C [(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty) \bar{\varphi}]_{\bar{x}} \\ & = H_1(a) \{ \nu \psi_{yyyy} + \psi_x \psi_{yyy} - \psi_y \psi_{xyy} - g\beta_T [(T_w - T_\infty) \theta]_x - g\beta_C [(C_w - C_\infty) \varphi]_x \} + R_1 \\ & \alpha (\bar{T}_w - \bar{T}_\infty) \bar{\theta}_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{\psi}_{\bar{y}} [(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty) \bar{\theta}]_{\bar{x}} + (\bar{T}_w - \bar{T}_\infty) \bar{\psi}_{\bar{x}} \bar{\theta}_{\bar{y}} \\ & = H_2(a) \{ \alpha (T_w - T_\infty) \theta_{yy} - \psi_y [(T_w - T_\infty) \theta]_x + (T_w - T_\infty) \psi_x \theta_y \} + R_2 \\ & D(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty) \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{\psi}_{\bar{y}} [(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty) \bar{\varphi}]_{\bar{x}} + (\bar{C}_w - \bar{C}_\infty) \bar{\psi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{y}} - k(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)^n \bar{\varphi}^n \\ & = H_3(a) \{ D(C_w - C_\infty) \varphi_{yy} - \psi_y [(C_w - C_\infty) \varphi]_x + (C_w - C_\infty) \psi_x \varphi_y - k(C_w - C_\infty)^n \varphi^n \} + R_3 \end{aligned}$$

由在群  $G$  变换下方程保形不变的条件, 则必须使

$$H_1(a) = \frac{H^\nu}{(H^\nu)^4} = \frac{(H^\nu)^2}{H^\nu (H^\nu)^3} = \frac{H^{(T_w - T_\infty)} H^\theta}{H^\nu} = \frac{H^{(C_w - C_\infty)} H^\varphi}{H^\nu} \quad (3.2)$$

$$H_2(a) = \frac{H^\nu H^\theta H^{(T_w - T_\infty)}}{H^\nu H^\nu} = \frac{H^\theta H^{(T_w - T_\infty)}}{(H^\nu)^2} \quad (3.3)$$

$$H_3(a) = \frac{H^\varphi H^{(C_w - C_\infty)}}{(H^\nu)^2} = \frac{H^\nu H^\varphi H^{(C_w - C_\infty)}}{H^\nu H^\nu} = [H^\varphi H^{(C_w - C_\infty)}]^\nu \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} R_1 = & -g\beta_T [K^\theta H^{(T_w - T_\infty)} (T_w - T_\infty)_x + K^{(T_w - T_\infty)} H^\theta \theta_x + K^{(T_w - T_\infty)} K^\theta] / H^\nu \\ & - g\beta_C [K^\varphi H^{(C_w - C_\infty)} (C_w - C_\infty)_x + K^{(C_w - C_\infty)} H^\varphi \varphi_x + K^{(C_w - C_\infty)} K^\varphi] / H^\nu = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{H^\theta K^{(T_w - T_\infty)}}{(H^\nu)^2} \alpha \theta_{yy} - \frac{H^\nu}{H^\nu H^\nu} \psi_y [K^\theta H^{(T_w - T_\infty)} (T_w - T_\infty)_x + K^{(T_w - T_\infty)} H^\theta \theta_x] \\ & + \frac{H^\nu H^\theta}{H^\nu H^\nu} K^{(T_w - T_\infty)} \psi_x \theta_y = 0 \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 = & \frac{H^\varphi K^{(C_w - C_\infty)}}{(H^\nu)^2} D \varphi_{yy} - \frac{H^\nu}{H^\nu H^\nu} \psi_y [K^\varphi H^{(C_w - C_\infty)} (C_w - C_\infty)_x + K^{(C_w - C_\infty)} H^\varphi \varphi_x] \\ & + \frac{H^\nu H^\varphi}{H^\nu H^\nu} K^{(C_w - C_\infty)} \psi_x \varphi_y - k [H^{(C_w - C_\infty)} H^\varphi (C_w - C_\infty) \varphi]^n \\ & \cdot \left\{ \left[ 1 + \frac{K^{(C_w - C_\infty)}}{H^{(C_w - C_\infty)} (C_w - C_\infty)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{K^\varphi}{H^\varphi \varphi} + \frac{K^\varphi K^{(C_w - C_\infty)}}{H^\varphi H^{(C_w - C_\infty)} (C_w - C_\infty) \varphi} \right]^\nu - 1 \right\} = 0 \quad (3.7) \end{aligned}$$

取  $K^{(T_w - T_\infty)} = 0, K^\theta = 0, K^{(C_w - C_\infty)} = 0, K^\varphi = 0$  则式(3.5)~(3.7)自然满足。为了使在变换群下  $\theta, \varphi$  的边界条件保形不变, 取  $K^\nu = 0, H^\theta = 1, H^\varphi = 1$ 。

由式(3.2)~(3.4)得

$$H^\nu = (H^\nu)^{(5n-7)/2(n-1)}, \quad H^\psi = (H^\nu)^{(3n-5)/2(n-1)}$$

$$H(T_w - T_\infty) = (H^\nu)^{-2/(n-1)}, \quad H(C_w - C_\infty) = (H^\nu)^{-2/(n-1)}$$

所以变换群为

$$G: \begin{cases} \bar{x} = (H^\nu)^{(5n-7)/2(n-1)}x + K^x, & \bar{y} = (H^\nu)y \\ \bar{\psi} = (H^\nu)^{(3n-5)/2(n-1)}\psi + K^\psi, & \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi \\ \bar{T}_w - \bar{T}_\infty = (H^\nu)^{-2/(n-1)}(T_w - T_\infty) \\ \bar{C}_w - \bar{C}_\infty = (H^\nu)^{-2/(n-1)}(C_w - C_\infty) \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.2 绝对不变量

由变换群 (3.8) 可以导出自变量和因变量的绝对不变量。对于自变量的绝对不变量  $\xi$  为 (取  $K^x = 0$ )

$$\xi = yx^{2(n-1)/(7-5n)} \quad (3.9)$$

因变量  $\theta, \varphi$  的绝对不变量是它们本身, 即  $\theta(\xi), \varphi(\xi)$ 。取  $K^\psi = 0$ , 因变量  $\psi$ , 壁面温度  $T_w$  分布和浓度  $C_w$  分布的绝对不变量  $F(\xi), H(\xi)$  和  $L(\xi)$  分别为

$$F(\xi) = \psi x^{(5-3n)/(5n-7)}$$

$$H(\xi) = (T_w - T_\infty) x^{4/(5n-7)}$$

$$L(\xi) = (C_w - C_\infty) x^{4/(5n-7)}$$

由于  $(T_w - T_\infty)$  和  $(C_w - C_\infty)$  只是  $x$  的函数, 故  $H(\xi), L(\xi)$  是常数, 令其分别为  $A$  和  $B$ 。所以

$$\psi = x^{(3n-5)/(5n-7)} F(\xi) \quad (3.10)$$

$$T - T_\infty = Ax^{4/(7-5n)} \theta(\xi) \quad (3.11)$$

$$C - C_\infty = Bx^{4/(7-5n)} \varphi(\xi) \quad (3.12)$$

为使方程组存在相似性解, 则要求

$$T_w - T_\infty = Ax^{4/(7-5n)} \quad (3.13)$$

$$C_w - C_\infty = Bx^{4/(7-5n)} \quad (3.14)$$

$$U = U_0 x^{(3-n)/(7-5n)} \quad (3.15)$$

### 3.3 相似性解

根据自变量和因变量的绝对不变量形式, 引入

$$\eta = Re^{1/2} \xi / l^{(5-3n)/(7-5n)}$$

$$f(\eta) = [l^{(5-3n)/(7-5n)} / \nu Re^{1/2}] F(\xi)$$

$$\theta(\eta) = \theta(\xi), \quad \varphi(\eta) = \varphi(\xi)$$

其中雷诺数  $Re = U_0 l / \nu$ ,  $l$  为平板的参考长度。所以

$$\eta = Re^{1/2} (y/l) (x/l)^{2(n-1)/(7-5n)} \quad (3.16)$$

$$\psi = \nu Re^{1/2} (x/l)^{(5-3n)/(7-5n)} f(\eta) \quad (3.17)$$

存在相似性解的条件变为

$$T_w - T_\infty = A(x/l)^{4/(7-5n)} \quad (3.18)$$

$$C_w - C_\infty = B(x/l)^{4/(7-5n)} \quad (3.19)$$

$$U = U_0 (x/l)^{(3-n)/(7-5n)} \quad (3.20)$$

则控制方程组 (2.7) ~ (2.9) 转化为

$$f'''' + \frac{5-3n}{7-5n} f f'''' - \frac{n+1}{7-5n} f' f'' - K_1 \left[ \frac{2(n-1)}{7-5n} \eta \theta' + \frac{4}{7-5n} \theta \right]$$

$$-K_2 \left[ \frac{2(n-1)}{7-5n} \eta \varphi' + \frac{4}{7-5n} \varphi \right] = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{5-3n}{7-5n} f \theta' - \frac{4}{7-5n} f' \theta = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{Sc} \varphi'' + \frac{5-3n}{7-5n} f \varphi' - \frac{4}{7-5n} f' \varphi - K_3 \varphi^n = 0 \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0, f'(0) = 1, \theta(0) = \varphi(0) = 1 \\ f'(\infty) &\rightarrow 0, \theta(\infty) \rightarrow 0, \varphi(\infty) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

式中“'”是对 $\eta$ 的导数； $Pr = \nu/\alpha$ 为普朗特数； $Sc = \nu/D$ 为史密特数；

$$K_1 = Gr_T/Re^{1/2}, K_2 = Gr_C/Re^{5/2}$$

为浮力参数，其中

$$Gr_T = [g\beta_T(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2]_{x=l}, Gr_C = [g\beta_C(C_w - C_\infty)x^3/\nu^2]_{x=l}$$

为葛拉晓夫数； $K_3 = \epsilon Gr_C^{1/2}/Re$ 为化学反应的影响系数，其中

$$\epsilon = [k^2(C_w - C_\infty)^{n-3}l/g\beta_C]^{1/2}$$

为无量纲反应数。

用四阶Runge-Kutta方法对相似性方程(3.21)~(3.24)进行求解。

## 四、热量和质量传递

### 4.1 热量传递参数

在平板壁面上的局部和平均热交换特性通常用努塞特数 $Nu_{x,T}$ 和 $Nu_T$ 来表示

$$Nu_{x,T} = \frac{h_T x}{\chi} = \left(\frac{x}{l}\right)^{(1-n)/2(7-5n)} Re_x^{1/2} [-\theta'(0)] \quad (4.1)$$

$$Nu_T = \frac{\bar{h}_T l}{\chi} = \frac{7-5n}{5-3n} Re^{1/2} [-\theta'(0)] \quad (4.2)$$

式中， $h_T = q_w(x)/(T_w - T_\infty)$ 为局部热传递系数； $\bar{h}_T = \int_0^l h_T dx/l$ 为平均热传递系数； $q_w(x) = -\chi(\partial T/\partial y)_{y=0}$ 为壁面热流； $\chi$ 为热传递系数； $Re_x = U_0 x/\nu$ 为局部雷诺数， $Re = U_0 l/\nu$ 。

若 $n=3$ ， $\theta'(0)=0$ ， $\theta'(\eta)$ 可从方程(3.22)直接积分，并注意到边界条件(3.24)得到。考虑到在平板前缘的奇异性<sup>[3]</sup>，我们通过热流方程来确定平板与流体之间的总热交换量 $Q_w$ ，总热流量用斯坦通数 $St$ 表示

$$St^* = St \sqrt{Re} = \int_0^\infty f' \theta d\eta \quad (4.3)$$

### 4.2 质量流传递参数

类似于式(4.1)和(4.2)的定义，局部和平均质量流的努塞特数[也称舍尔沃特数(Sherwood numbers)]，

$$Nu_{x,c} = \frac{h_c x}{D} = \left(\frac{x}{l}\right)^{(1-n)/2(7-5n)} Re_x^{1/2} [-\varphi'(0)] \quad (4.4)$$

$$Nu_c = \frac{\bar{h}_c l}{D} = \frac{7-5n}{5-3n} Re^{1/2} [-\varphi'(0)] \quad (4.5)$$

式中  $h_c = -D(\partial C/\partial y)_{y=0}/(C_w - C_\infty)$

为局部质量传递系数;

$$\bar{h}_c = \int_0^l h_c dx/l$$

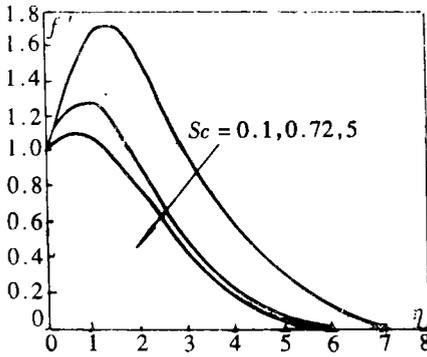
为平均质量传递系数。

## 五、结 论

图2~13给出了  $Pr=0.72$ ;  $Sc=0.1, 0.72, 5$ ;  $K_1=0, 0.4, 1.0$ ;  $K_2=0, 0.4, 1.0$  和  $K_3=0, 1.0, 3.0$  下的速度  $f'(\eta)$ 、温度  $\theta(\eta)$  和浓度  $\varphi(\eta)$  分布。根据计算结果, 可得到如下一些结论:

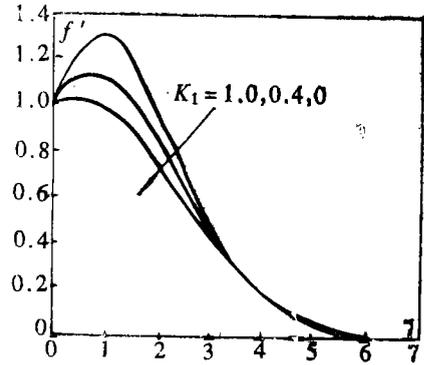
1. **边界层厚度** 随  $Sc$  增大, 速度边界层和浓度边界层减薄, 而温度边界层增厚; 随  $K_1, K_2$  增大, 速度边界层、温度边界层和浓度边界层均减薄; 随  $K_3$  增大, 浓度边界层减薄, 但对速度边界层和温度边界层的减薄不明显。

2. **速度分布** 图2~5显示对于每一种速度剖面, 在壁面附近存在一速度峰值。随  $Sc$  和



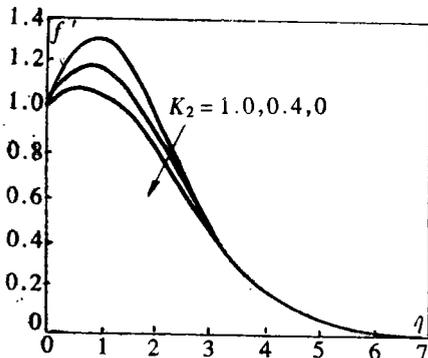
( $Pr=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图2 不同  $Sc$  下的无量纲速度剖面



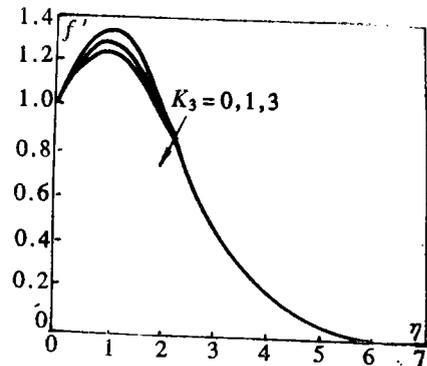
( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图3 不同  $K_1$  下的无量纲速度剖面



( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_3=0$ )

图4 不同  $K_2$  下的无量纲速度剖面

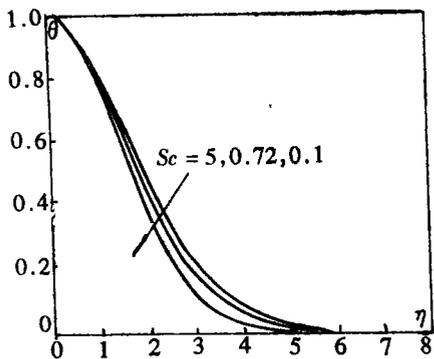


( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0$ )

图5 不同  $K_3$  下的无量纲速度剖面

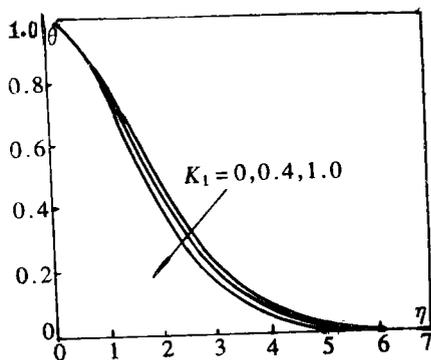
$K_3$ 的增大, 速度峰值降低, 其位置越靠近壁面; 随 $K_1, K_2$ 增大, 速度峰值增高, 其位置越离开壁面。

3. 温度分布 在图6~9中的无量纲温度 $\theta(\eta)$ 剖面表明随 $Sc$ 增大,  $\theta(\eta)$ 曲线变得较平



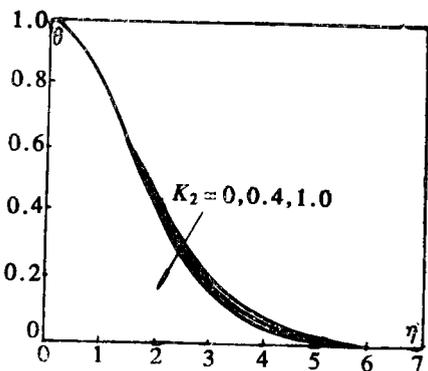
( $Pr=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图6 不同 $Sc$ 下的无量纲温度剖面



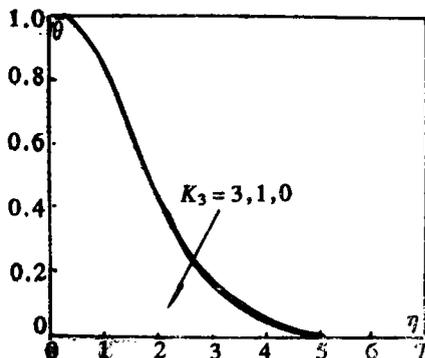
( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图7 不同 $K_1$ 下的无量纲温度剖面



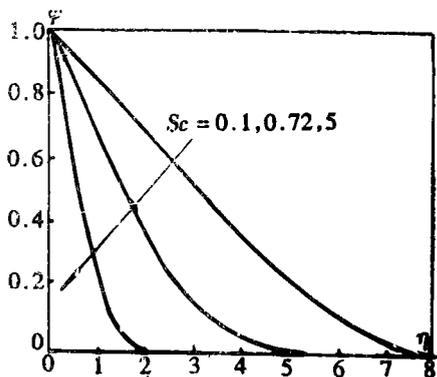
( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_3=0$ )

图8 不同 $K_2$ 下的无量纲温度剖面



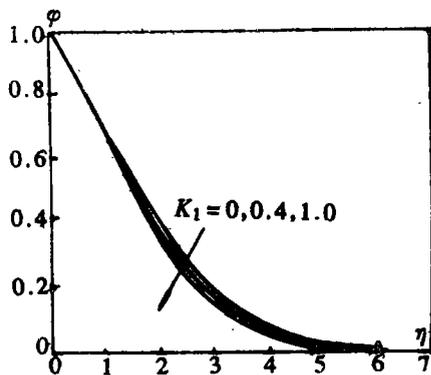
( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0$ )

图9 不同 $K_3$ 下的无量纲温度剖面



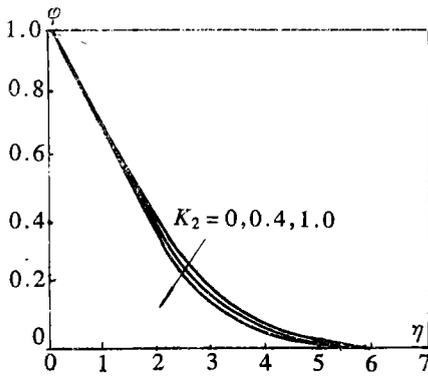
( $Pr=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图10 不同 $Sc$ 下的无量纲浓度剖面



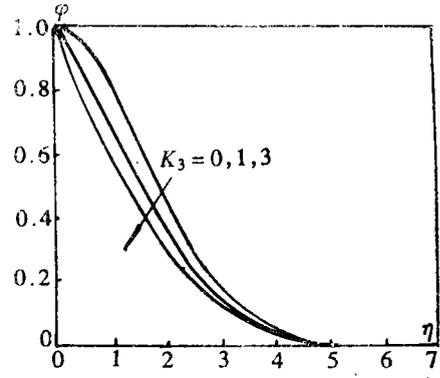
( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_2=1.0, K_3=1.0$ )

图11 不同 $K_1$ 下的无量纲浓度剖面



( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_3=0$ )

图12 不同 $K_2$ 下的无量纲浓度剖面



( $Pr=0.72, Sc=0.72, K_1=1.0, K_2=1.0$ )

图13 不同 $K_3$ 下的无量纲浓度剖面

坦；随 $K_1, K_2$ 增大， $\theta(\eta)$ 曲线变陡，而 $K_3$ 对 $\theta(\eta)$ 曲线变化影响不大。

4. 浓度分布 随 $Sc, K_1, K_2, K_3$ 增大， $\varphi(\eta)$ 曲线变得较陡，且 $Sc$ 对 $\varphi(\eta)$ 曲线变化影响较大（图10~13）。

5. 壁面摩擦阻力系数 正比于壁面摩擦阻力系数的 $f''(0)$ 随 $K_1, K_2$ 的增大而显著增加，但它随 $Sc, K_3$ 的增大而减小。

6. 壁面上的热传递和质量传递 随 $K_1, K_2$ 增大，不仅热流斯坦通数 $St^*$ ，而且努塞特数 $Nuc$ 的因子 $-\varphi'(0)$ 均增大，但 $K_1, K_2$ 的变化对 $-\varphi'(0)$ 影响较小，当 $K_3$ 增大时，则 $-\varphi'(0)$ 增加，而 $St^*$ 减小，且 $K_3$ 对 $St^*$ 的影响很小。

### 参 考 文 献

- [1] E. M. Sparrow and W. J. Minkowycz, Buoyancy effects on horizontal boundary-layer flow and heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 5 (1962), 505—511.
- [2] T. S. Chen, E. M. Sparrow and A. Mucoglu, Mixed convection in boundary layer flow on a horizontal plate, *ASME J. Heat Transfer*, 99 (1977), 66—71.
- [3] W. Schneider, A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 22 (1979), 1041—1046.
- [4] J. Dey, Mixed convection flow over a semi-infinite horizontal plate with vectored mass transfer, *ASME J. Heat Transfer*, 104 (1982), 558—560.
- [5] F. R. de Hoog, B. Laminger and R. Weiss, A numerical study of similarity solutions for combined forced and free convection, *Acta Mech.*, 51 (1984), 139—149.
- [6] N. Afzal and T. Hussain, Mixed convection over a horizontal plate, *ASME J. Heat Transfer*, 106 (1984), 240—241.
- [7] N. Ramachandran, B. F. Armaly and T. S. Chen, Mixed convection over a horizontal plate, *ASME J. Heat Transfer*, 105 (1983), 420—423.
- [8] J. H. Merkin and D. B. Ingham, Mixed convection similarity solutions on a horizontal surface, *ZAMP*, 38 (1987), 102—115.

- [9] A. J. A. Morgan, The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations, *Quart. J. Math., Oxford, Ser. 2* (1952), 250—259.
- [10] A. G. Hansen, *Similarity Analysis of Boundary Value Problems in Engineering*, Prentice-Hall (1964).
- [11] W.F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Vol. II, Academic Press, New York, London (1972).

## Group Theory Analysis of Mixed Convection over a Horizontal Moving Plate

Xu Xuezi

(Department of Mechanics, Zhejiang University,  
Hangzhou 310027, P. R. China)

Shi Junmei Fan Jianren

(Department of Energy Engineering, Zhejiang University,  
Hangzhou, 310027 P. R. China)

### Abstract

In the present paper, the investigation to the mixed convective boundary-layer behavior over a horizontal plate is carried out. By applying transformation group theory, the analysis of the governing equations of continuity, momentum, energy and diffusion shows the existence of similarity solution for the problem provided that the temperature and concentration at the wall are proportional to  $x^{4/(7-5^n)}$  and that the moving speed of the plate is proportional to  $x^{(3-n)/(7-5^n)}$ , furthermore, a set of similarity equations is obtained. The similarity equations are solved numerically by a fourth-order Runge-Kutta scheme. The numerical results obtained for velocity, temperature and concentration distributions for  $Pr=0.72$  and various values of the parameters  $Sc$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  and  $K_3$  reveal the influence of these parameters on the flow, and heat and mass transfer behavior.

**Key words** mixed convection, group theory, similarity solution