

# 分析土壤半无限域的一种有限层 方法(I)——一般理论

杨正文\* 卢文达

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所, 1991年9月16日收到)

## 摘 要

本文研究了一种用于横观各向同性体动力学的有限层法。将土壤介质半无限域视为一个横观各向同性半空间体, 介质的材料函数沿深度变化, 将介质沿深度方向分成若干层, 在每一层内材料函数用一个指数函数来模拟。这样, 使求解问题的方程得到简化, 利用Fourier变换我们得到了各层处“节点”力与位移的关系。这种有限层法实际上是一种半解析法, 具有一般半解析法所具备的数据前后处理量少及计算量小等优点。本文所研究的这种有限层法为分析土壤与结构相互作用问题提供了一条新途径。

**关键词** 有限层法 横观各向同性 半无限域 弹性动力学

## 一、引 言

风化生成的土, 受各种自然力的作用被搬运到别的地方再沉积下来, 便形成了沉积土。沉积土是土的一大种类, 在各种工程建设中经常碰到<sup>[1,2]</sup>。由于沉积土沿深度方向形成的年代不同, 因而其性质实际上随深度变化, 一般可视为横观各向同性体。

明置基础是工程中常见的基础之一。明置基础置于土壤介质表面。因而, 若将土壤介质半无限域看成一个半空间体, 则对于明置基础, 所研究的半空间是完整的。

采用纯数值方法(如有限元法和边界元法)来分析土壤介质半无限域的研究工作已有很多<sup>[3,4]</sup>。本文则在微小变形条件下, 用半解析方法来分析完整的半空间体, 其中假设介质是横观各向同性的, 即介质的性质随深度变化, 且认为所有性质服从同一变化规律。本文研究的实际上是一种有限层法。把半空间体沿深度方向分成若干层, 每一层中介质性质的变化规律用指数函数来模拟, 利用Fourier变换对每一层分析后再由协调条件组合起来, 从而得到求解整个问题的方程组。我们得到了各层处“节点”力与位移的关系。当层厚足够小亦即层数足够多时, 分段指数函数能够逼近介质性质沿深度连续变化的规律, 故我们总能得到满意的结果。

对于静力问题, Rowe等曾作过一些研究工作<sup>[5,6]</sup>, 然而, 动力问题却要复杂得多。本

\* 现在华中理工大学工程力学系工作。

文所研究的方法具有一般半解析法共有的数据前后处理量少及计算量小等优点, 为分析土壤与结构动静力相互作用问题提供了一条新途径.

## 二、三维问题的基本关系

完整的介质半空间体沿深度分成若干层, 如图1所示, 各层之间的接触面平行于  $xy$  平面. 定义位移、应力和应变张量为

$$U = \{u_1, u_2, u_3\}^T, \sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \epsilon = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}\}^T$$

则有几何关系

$$\epsilon_{i,j} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (2.1)$$

物理关系

$$\sigma = D\epsilon \quad (2.2)$$

其中介质性质张量设定为

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ & D_{11} & D_{13} & & & \\ & & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & & 0 \\ \text{对称} & & & D_{44} & & \\ & & & & & (D_{11} - D_{12})/2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c & & & \\ & a & c & & & \\ & & d & & & 0 \\ & & & f/2 & & \\ \text{对称} & & & f/2 & & \\ & & & & & (a-b)/2 \end{bmatrix} e^{2\mu z} \quad (2.3)$$

式(2.3)中,  $a, b, c, d, f$  及  $\mu$  对每层介质都是待定常数. 可见, 介质性质沿深度的变化规律已用一个指数函数表示, 后面将详细讨论.

运动方程

$$\sigma_{i,j,j} + X_i = \rho u_i'' \quad (2.4)$$

其中  $X_i$  和  $\rho$  分别为介质的体力密度和质量密度,  $u_i''$  表示  $u_i$  关于时间变量  $t$  的 2 阶导数.

又设  $X_i$  和  $\rho$  对于每层可表为

$$X_i = X_i^* e^{2\mu z}, \rho = \rho^* e^{2\mu z} \quad (2.5a, b)$$

其中  $\mu$  与式(2.3)中的  $\mu$  相同,  $X_i^*$  和  $\rho^*$  是待定常数.

将介质性质的变化规律表为式(2.3)和式(2.5)的形式是为了利用对坐标的 Fourier 变换求解式(2.4).

关于坐标  $x_1$  和  $x_2$ , 定义位移  $u_1, u_2$  和  $u_3$  的双重 Fourier 变换如下

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{iu_1, iu_2, u_3\} \exp[-i(\alpha x_1 + \beta x_2)] dx_1 dx_2 \quad (2.6)$$

类似地有定义  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  和  $\sigma_{33}$  以及  $X_1, X_2$  和  $X_3$ .

显然逆变换可写为

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{-iu_1, -iu_2, u_3\} \exp[i(\alpha x_1 + \beta x_2)] d\alpha d\beta \quad (2.7)$$

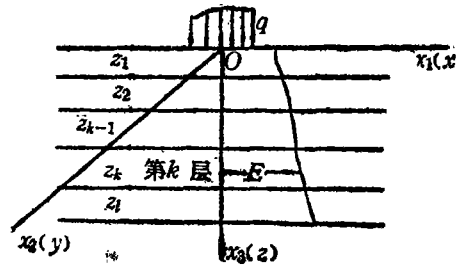


图1 横观各向同性土壤介质半空间体

## 三、三维问题的基本方程

观察(2.1)~(2.5)式可以看到,为简化推演,可以先不考虑式(2.3)中的指数函数部分。将式(2.1)和式(2.2)代入式(2.4)中,得到展开后以位移表示的运动方程

$$au_{1,11} + \frac{a-b}{2}u_{1,22} + \left(\frac{f}{2}u_{1,3}\right)_{,3} + \frac{a+b}{2}u_{2,12} + \left(\frac{f}{2}u_{3,1}\right)_{,3} + cu_{3,13} + X_1 = \rho u_1'' \quad (3.1a)$$

$$au_{2,22} + \frac{a-b}{2}u_{2,11} + \left(\frac{f}{2}u_{2,3}\right)_{,3} + \frac{a+b}{2}u_{1,12} + \left(\frac{f}{2}u_{3,2}\right)_{,3} + cu_{3,23} + X_2 = \rho u_2'' \quad (3.1b)$$

$$(du_{3,3})_{,3} + \frac{f}{2}u_{3,22} + \frac{f}{2}u_{3,11} + (cu_{1,1})_{,3} + (cu_{2,2})_{,3} + \frac{f}{2}u_{1,13} + \frac{f}{2}u_{2,23} + X_3 = \rho u_3'' \quad (3.1c)$$

对式(3.1)作双重Fourier变换,得

$$-\left[ \alpha^2 u_1 + \frac{a-b}{2} \beta^2 u_1 - \left(\frac{f}{2} u_{1,3}\right)_{,3} + \frac{a+b}{2} \alpha \beta u_2 + \alpha c u_{3,3} + \alpha \left(\frac{f}{2} u_3\right)_{,3} \right] + X_1 = \rho u_1'' \quad (3.2a)$$

$$-\left[ \alpha \beta^2 u_2 + \frac{a-b}{2} \alpha^2 u_2 - \left(\frac{f}{2} u_{2,3}\right)_{,3} + \frac{a+b}{2} \alpha \beta u_1 + \beta c u_{3,3} + \beta \left(\frac{f}{2} u_3\right)_{,3} \right] + X_2 = \rho u_2'' \quad (3.2b)$$

$$\alpha (c u_1)_{,3} + \frac{f}{2} \alpha u_{1,3} + \beta (c u_2)_{,3} + \frac{f}{2} \beta u_{2,3} + (d u_{3,3})_{,3} - \frac{f}{2} (\alpha^2 + \beta^2) u_3 + X_3 = \rho u_3'' \quad (3.2c)$$

为了解耦式(3.2),引入下列代换

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= r \cos \theta, \quad \beta = r \sin \theta, \quad \{u_1, u_2\}^T = [\mathcal{T}] \{u, v\}^T, \quad u_3 = w \\ \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T &= [\mathcal{T}] \{\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}\}^T, \quad \{X_1, X_2\}^T = [\mathcal{T}] \{X_r, X_\theta\}^T \\ [\mathcal{T}] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将式(3.3)代入式(3.2),整理得到面内位移 $u$ 和 $w$ 与面外位移 $v$ 解耦后的运动方程

$$\left(\frac{f}{2}u_{,z}\right)_{,z} - ar^2u - crw_{,z} - r\left(\frac{f}{2}w\right)_{,z} + X_r = \rho u'' \quad (3.4a)$$

$$r(cu)_{,z} + \frac{f}{2}ru_{,z} + (dw)_{,z} - \frac{f}{2}r^2w + X_z = \rho w'' \quad (3.4b)$$

$$\frac{b-a}{2}r^2v + \left(\frac{f}{2}v_{,z}\right)_{,z} + X_\theta = \rho v'' \quad (3.4c)$$

将式(2.1)代入式(2.2)后,作双重Fourier变换并引入式(3.3),有

$$\sigma_{zz} = cru + dw_{,z}, \quad \sigma_{rz} = f(u_{,z} - rw)/2, \quad \sigma_{\theta z} = fv_{,z}/2 \quad (3.5a, b, c)$$

## 1. 面内未知量的求解

面内未知量指假想平面—— $rz$ 平面内的位移 $u$ 和 $w$ 及应力 $\sigma_{rz}$ 和 $\sigma_{zz}$ 。不失一般性,设介质半空间体表面受分布形式的简谐荷载,则根据式(3.4a,b)和式(3.5a,b),解的形式必可设为

$$u = Ae^{pz}e^{j\omega t}, \quad v = Be^{pz}e^{j\omega t}, \quad \sigma_{rz} = Ce^{qz}e^{j\omega t}, \quad \sigma_{zz} = De^{qz}e^{j\omega t} \quad (3.6a, b, c, d)$$

其中 $A, B, C, D, p$ 及 $q$ 均为待定常数, $\omega$ 是激频。

将式(3.6)代入式(3.5a,b)并计及式(2.3)中的指数函数部分后,得到关系

$$q = p + 2\mu, \quad C = f(pA - rB)/2, \quad D = crA + dpB \quad (3.7)$$

若不计体积力, 将式(3.6a,b)代入式(3.4a,b)便得

$$\left[ \frac{f}{2} p(p+2\mu) - ar^2 + \rho^* \omega^2 \right] A - \left[ \frac{f}{2} (p+2\mu)r + crp \right] B = 0 \quad (3.8a)$$

$$\left[ c(p+2\mu)r + \frac{f}{2} rp \right] A + \left[ dp(p+2\mu) - \frac{f}{2} r^2 + p^* \omega^2 \right] B = 0 \quad (3.8b)$$

式(3.8)关于A和B存在非零解的条件是其系数行列式等于零, 从而有特征方程

$$\chi(m^2 - \mu^2)^2 + \psi(m^2 - \mu^2) + \varphi = 0 \quad (3.9)$$

其中

$$\chi = fd/2, \quad m = p + \mu$$

$$\psi = (d + f/2) \rho^* \omega^2 + [c(c + f) - ad] r^2$$

$$\varphi = \rho^* \omega^4 + [2fc\mu^2 - (a + f/2) \rho^* \omega^2] r^2 + far^4/2$$

从式(3.9)可以求得4个特征根 $m$ , 对于某个 $m$ 可以从式(3.8)得到一个比值 $A/B$ , 或者有

$$A = r[(f/2 + c)m - \mu(c - f/2)], \quad B = f(m^2 - \mu^2)/2 - ar^2 + \rho^* \omega^2 \quad (3.10)$$

于是, 解的幅值可表示为

$$u^* = \sum_{i=1}^4 \theta_i A_i \exp[p_i z], \quad w^* = \sum_{i=1}^4 \theta_i B_i \exp[p_i z] \quad (3.11a, b)$$

$$\sigma_{r,z}^* = \sum_{i=1}^4 \theta_i C_i \exp[q_i z], \quad \sigma_{\tau,z}^* = \sum_{i=1}^4 \theta_i D_i \exp[q_i z] \quad (3.11c, d)$$

其中 $u^*$ 表示 $u$ 的幅值,  $\theta_i$ 是待定系数。

从式(3.9)可见, 在最一般情形下,  $m$ 可能取复值, 但显然不会出现重根, 因为若有重根, 则与所设式(3.6)的形式矛盾。

以上一般性分析适合于任一层介质。

对于由坐标 $z_k$ 及 $z_l$  ( $l = k + 1$ )确定上下表面位置的第 $k$ 层介质, 由式(3.11a,b)有

$$U_k^e = R_k \Theta \quad (3.12)$$

其中  $U_k^e = \{u_k^*, w_k^*, u_{\tau,z}^*, w_{\tau,z}^*\}^T$ ,  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}^T$

$$R_k = \begin{bmatrix} A_1 \exp[p_1 z_k] & A_2 \exp[p_2 z_k] & A_3 \exp[p_3 z_k] & A_4 \exp[p_4 z_k] \\ B_1 \exp[p_1 z_k] & B_2 \exp[p_2 z_k] & B_3 \exp[p_3 z_k] & B_4 \exp[p_4 z_k] \\ A_1 \exp[p_1 z_l] & A_2 \exp[p_2 z_l] & A_3 \exp[p_3 z_l] & A_4 \exp[p_4 z_l] \\ B_1 \exp[p_1 z_l] & B_2 \exp[p_2 z_l] & B_3 \exp[p_3 z_l] & B_4 \exp[p_4 z_l] \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$u_k^*$ 表示 $z_k$ 处的 $u^*$ 。

同样, 由式(3.11c,d)也有

$$Q_k^e = S_k \Theta \quad (3.14)$$

其中  $Q_k^e = \{-\sigma_{r,z_k}^*, -\sigma_{\tau,z_k}^*, \sigma_{r,z_l}^*, \sigma_{\tau,z_l}^*\}^T$

$$S_k = \begin{bmatrix} -C_1 \exp[q_1 z_k] & -C_2 \exp[q_2 z_k] & -C_3 \exp[q_3 z_k] & -C_4 \exp[q_4 z_k] \\ -D_1 \exp[q_1 z_k] & -D_2 \exp[q_2 z_k] & -D_3 \exp[q_3 z_k] & -D_4 \exp[q_4 z_k] \\ C_1 \exp[q_1 z_l] & C_2 \exp[q_2 z_l] & C_3 \exp[q_3 z_l] & C_4 \exp[q_4 z_l] \\ D_1 \exp[q_1 z_l] & D_2 \exp[q_2 z_l] & D_3 \exp[q_3 z_l] & D_4 \exp[q_4 z_l] \end{bmatrix} \quad (3.15)$$



近似的。要得到较满意的结果，底部边界便须取在足够深处，这样一来，式(3.22)的阶数势必较高，计算量较大。因此，我们在底部边界上引入新的边界条件，以降低式(3.22)的阶数。

采用标准粘性边界，表示如下<sup>[8]</sup>

$$(\sigma_{13})_{n+1} = \rho_n^* \bar{v}_s (u'_1)_{n+1}, \quad (\sigma_{33})_{n+1} = \rho_n^* \bar{v}_p (u'_3)_{n+1} \quad (3.24)$$

其中  $\rho_n^*$  表示第  $n$  层的  $\rho^*$ ， $\bar{v}_s$  和  $\bar{v}_p$  分别为第  $n$  层中剪切波波速和拉压波波速的平均值。

利用式(3.3)，由式(3.24)得

$$\bar{F}_{n+1} = \bar{D}_{n+1} U_{n+1} \quad (3.25)$$

其中  $\bar{D}_{n+1} = \text{diag}(\rho_n^* \omega \bar{v}_s, \rho_n^* \omega \bar{v}_p)$

故在底部标准粘性边界条件下，式(3.22)中各符号重新表示为

$$K(r) = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 & & & & \\ \bar{B}_1^T & \bar{C}_1 + \bar{A}_2 & \bar{B}_2 & & & 0 \\ & \text{对称} & \dots & & & \\ & & & \bar{C}_{n-1} + \bar{A}_n & \bar{B}_n & \\ & & & \bar{B}_n^T & \bar{C}_n + \bar{D}_{n+1} & \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$U = \{U_1^T; U_2^T; \dots; U_{n+1}^T\}^T, \quad Q = \{-T^*, -T^*; 0, 0; \dots; 0, 0\}^T$$

式(3.22)是一个  $2(n+1)$  阶方程组。

## 2. 面外未知量的求解

面外未知量指假想平面—— $rz$  平面外的位移  $v$  及应力  $\sigma_{\theta z}$ 。和求解面内未知量的方法一样，可设

$$v = A e^{pz} e^{j\omega t}, \quad \sigma_{\theta z} = B e^{qz} e^{j\omega t} \quad (3.27a, b)$$

其中  $A$ ,  $B$ ,  $p$  和  $q$  均为待定常数， $\omega$  是激频。

将式(2.5)和式(3.27)代入式(3.5c)和式(3.4c)得

$$q = p + 2\mu, \quad B/A = fp/2 \quad (3.28a, b)$$

及特征方程

$$p^2 + 2\mu p + [(b-a)r^2 + 2\rho^* \omega^2]/f = 0 \quad (3.29)$$

由式(3.29)解得

$$p = -\mu \pm m \quad (3.30)$$

其中  $m = \sqrt{\mu^2 + [(a-b)r^2 - 2\rho^* \omega^2]/f}$

则对应于  $p_i (i=1, 2)$ ，有

$$q_1 = -p_2, \quad q_2 = -p_1 \quad (3.31a, b)$$

不妨令

$$A = 1 \quad (3.32a)$$

则相应地

$$B_1 = p_1 f/2, \quad B_2 = p_2 f/2 \quad (3.32b, c)$$

于是，式(3.27)改写为

$$v^* = \theta_1 \exp[p_1 z] + \theta_2 \exp[p_2 z] \quad (3.33a)$$

$$\sigma_{\theta z}^* = f \theta_1 p_1 \exp[-p_2 z]/2 + f \theta_2 p_2 \exp[-p_1 z]/2 \quad (3.33b)$$

其中  $v^*$  表示  $v$  的幅值。

对于由坐标 $z_k$ 及 $z_l(l=k+1)$ 确定上下表面位置的第 $k$ 层介质,由式(3.33)有

$$\begin{bmatrix} v_k^* \\ v_l^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[p_1 z_k] & \exp[p_2 z_k] \\ \exp[p_1 z_l] & \exp[p_2 z_l] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{\theta z k}^* \\ \sigma_{\theta z l}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1(f/2)\exp[-p_2 z_k] & -p_2(f/2)\exp[-p_1 z_k] \\ p_1(f/2)\exp[-p_2 z_l] & p_2(f/2)\exp[-p_1 z_l] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

因此,由式(3.34)和式(3.35)得到位移和应力的关系式

$$\bar{K}_k \begin{bmatrix} v_k^* \\ v_l^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{\theta z k}^* \\ \sigma_{\theta z l}^* \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

其中 $\bar{K}_k$ 称为外单层刚度矩阵,其元素 $\bar{K}_{ij}$ 表示在第 $k$ 层的一个表面上产生单位位移 $v^*$ 而须在此表面或另一表面上作用的力 $\sigma_{\theta z}^*$ ,且

$$\bar{K}_k = \begin{bmatrix} M_k & H_k \\ H_k & N_k \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

其中  $M_k = \frac{f}{2} [\mu - m \operatorname{cthm}(z_k - z_l)] \exp[2\mu z_k]$

$$N_k = \frac{f}{2} [-\mu - m \operatorname{cthm}(z_k - z_l)] \exp[2\mu z_l]$$

$$H_k = \frac{f}{2} m \exp[\mu(z_k + z_l)] / \operatorname{sh}m(z_k - z_l)$$

对于分为 $n$ 层的整个土壤介质半空间体,由相邻层之间的连续条件及底部边界条件得到求解位移的有限层方程组

$$K_0 V_0 = Q_0 \quad (3.38)$$

其中当底部固定边界条件时

$$K_0 = \begin{bmatrix} M_1 & H_1 & & & \\ H_1 & M_2 + N_1 & & & 0 \\ & \dots & H_2 & & \\ \text{对称} & & \dots & M_{n-1} + N_{n-2} & H_{n-1} \\ & & & H_{n-1} & M_n + N_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$V_0 = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}^T, Q_0 = \{-T_0^*, 0, \dots, 0\}^T$$

$T_0^*$ 是 $T_0$ 的幅值,而 $T_0$ 由式(3.19)给出.称 $K_0$ 为外总刚度矩阵.此时,式(3.38)是一个 $n$ 阶方程组.

当底部设置标准粘性边界时,式(3.38)中各符号重新表示为

$$V_0 = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_{n+1}^*\}^T, Q_0 = \{-T_0^*, 0, \dots, 0, 0\}^T$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} M_1 & H_1 & & & \\ H_1 & M_2 + N_1 & & & 0 \\ & \dots & H_2 & & \\ \text{对称} & & \dots & M_n + N_{n-1} & H_n \\ & & & H_n & \rho_n^* \omega \bar{v}_n + N_n \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

此时,式(3.38)是一个 $(n+1)$ 阶方程组.

#### 四、材料函数的模拟

在前面的所有分析中, 业已假定横观各向同性土壤介质的材料性质可表示为式(2.3)和式(2.5)的形式, 沿深度服从指数函数变化规律, 从而可以利用关于坐标的Fourier变换得到有限层方程式(3.22)和式(3.38)。

式(2.3)当然是一种理想化形式, 但是, 不管材料函数沿深度变化规律如何, 当分层层数足够多时, 显然总可以用指数函数来足够逼近。此时, 式(2.5)也近似成立。

式(2.3)中的一般项写为

$$E = E^* \exp[2\mu z] \quad (4.1)$$

其中 $E^*$ 和 $\mu$ 为待定常数, 通常可采用配点法或最小二乘法来确定。

设已知第 $k$ 层上下表面处材料函数值分别为 $E_k$ 和 $E_l$ , 使用配点法, 由式(4.1)得

$$E^* = E_l \exp[-2\mu z_l], \quad \mu = \frac{\ln E_l - \ln E_k}{2(z_l - z_k)} \quad (4.2a, b)$$

在这种情况下, 只有每层上下表面处, 式(4.1)才精确满足。

若除了已知第 $k$ 层的 $E_k$ 和 $E_l$ 之外, 还已知材料函数沿深度变化的某种规律, 如线性变化

$$E = \alpha^* z + \beta^* \quad (4.3)$$

其中

$$\alpha^* = (E_l - E_k)/(z_l - z_k), \quad \beta^* = (E_k z_l - E_l z_k)/(z_l - z_k)$$

于是, 可利用最小二乘法, 由式(4.1)和式(4.3)得

$$E^* = \exp[h_1 - \mu(z_k + z_l)], \quad \mu = \frac{6h_2 - 3h_1}{z_l - z_k} \quad (4.4a, b)$$

其中

$$h_1 = \frac{[E \ln E - E] \frac{E_l}{E_k}}{E_l - E_k}, \quad h_2 = \frac{[(E^2/2) \ln E - E^2/4 - E_k(E \ln E - E)] \frac{E_l}{E_k}}{(E_l - E_k)^2}$$

一般情况下, 质量密度随深度的变化规律与材料函数的变化规律不尽相同。然而, 当层数足够多亦即层厚足够小时, 式(2.5)亦当成立。

不妨设质量密度沿深度线性变化

$$\rho = \tilde{\alpha} z + \tilde{\beta} \quad (4.5)$$

当式(2.5)中的 $\mu$ 取与式(4.1)中的 $\mu$ 相同值时, 由最小二乘法, 对于第 $k$ 层介质得到

$$\rho^* = \frac{[e^{2\mu z} (2\tilde{\alpha} z + 2\tilde{\beta} - 1/\mu)]_{z_k}^{z_l}}{\exp[4\mu z_l] - \exp[4\mu z_k]} \quad (4.6)$$

若 $\tilde{\alpha} = 0$ , 即第 $k$ 层土壤介质的密度是常量, 则有

$$\rho^* = \frac{[e^{2\mu z} (2\tilde{\beta} - 1/\mu)]_{z_k}^{z_l}}{\exp[4\mu z_l] - \exp[4\mu z_k]} \quad (4.7)$$

可以预料, 使用最小二乘法将优于使用配点法。

作者对钱伟长教授的关心和指导表示衷心的感谢。

#### 附 录

对于第 $k$ 层介质,  $R_k^{-1}$ 和 $S_k^{-1}$ 都存在, 要证明 $K_k$ 的对称性, 只须证明

$$S_k^T R_k - R_k^T S_k = 0 \quad (A.1)$$



据式(3.8), 可设

$$g_i = \frac{A_i}{B_i} \equiv \frac{r[(c+f/2)m_i - \mu(c-f/2)]}{(f/2)(m_i^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2} \quad (\text{A.2})$$

其中 $m_i$ 满足式(3.9),  $i=1, 2, 3, 4$ . 则

$$g_i - g_j = \frac{r[(f/2)(c+f/2)(m_i m_j + \mu^2) - (f/2)(c-f/2)\mu(m_i + m_j) + (c+f/2)(ar^2 - \rho^*\omega^2)](m_i - m_j)}{[(f/2)(m_i^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2][(f/2)(m_j^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2]} \quad (\text{A.3})$$

综合式(3.7)、式(3.13)、式(3.15)和式(A.3), 得到式(A.1)左端项元素的一般表达式

$$\begin{aligned} (S_k^T R_k - R_k^T S_k)_{ij} &= [(A_i C_i + B_i D_i) - (A_j C_j + B_j D_j)] [\exp[(q_i + p_j)z_i] - \exp[(q_j + p_i)z_k]] \\ &= \{d[(f/2)(m_i^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2][(f/2)(m_j^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2] + (c+f/2)^2 r^2 (\rho^*\omega^2 - ar^2) \\ &\quad - cf^2 r^2 \mu^2\} \frac{[\exp[(q_i + p_j)z_i] - \exp[(q_j + p_i)z_k]](m_i - m_j) B_i B_j}{[(f/2)(m_i^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2][(f/2)(m_j^2 - \mu^2) - ar^2 + \rho^*\omega^2]} \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

当 $i=j$ 时, 由式(A.4)知, 式(A.1)显然成立. 当 $i \neq j$ 时, 记式(A.4)右端第一部分为Num并展开

$$\begin{aligned} \text{Num} &= d[(f/4)(m_i^2 - \mu^2)(m_j^2 - \mu^2) + (\rho^*\omega^2 - ar^2)^2 + (f/2)(\rho^*\omega^2 - ar^2)(m_i^2 - \mu^2 + m_j^2 - \mu^2)] \\ &\quad + r^2(c+f/2)^2(\rho^*\omega^2 - ar^2) - cf^2 r^2 \mu^2 \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

而式(3.9)实际上是一个关于 $(m_i^2 - \mu^2)$ 的二次代数方程, 由其根与系数的关系得

$$(m_i^2 - \mu^2)(m_j^2 - \mu^2) = \frac{\rho^*\omega^4 + (f/2)ar^4 + [2cf\mu^2 - (a+f/2)\rho^*\omega^2]r^2}{(f/2)d} \quad (\text{A.6a})$$

$$(m_i^2 - \mu^2 + m_j^2 - \mu^2) = \frac{(d+f/2)\rho^*\omega^2 + [c(c+f) - ad]r^2}{(f/2)d} \quad (\text{A.6b})$$

将式(A.6)代入式(A.5)得

$$\text{Num} \equiv 0$$

故式(A.1)成立.

### 参 考 文 献

- [1] 陈希哲编, 《土力学地基基础》, 清华大学出版社(1982).
- [2] Das, Braja M., 《土动力学原理》, 吴世明、顾尧章译, 浙江大学出版社(1984).
- [3] Dasgupta, G., Semi-infinite domains by finite element cloning, *Trans. 6th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech.* (1981).
- [4] Takemiya, H. and C. Y. Wang, A modified indirect boundary element method to compute the impedance functions for rigid foundations, *9th WCEE, Tokyo, Kyoto, Aug.* (1988).
- [5] Rowe, R. K. and J. R. Booker, Finite layer analysis of nonhomogeneous soils, *J. Eng. Mech., ASCE*, 108(EM1) (1982), 115—132.
- [6] Small, J.C. and J.R. Booker, Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach, *Internat. J. Numer. Methods in Engrg.*, 23 (1986), 959—978.
- [7] Eringen, A. C. and E. S. Suhubi, *Elastodynamics*, Academic Press, New York (1975).
- [8] Lysmer, J. and R. L. Kuhlemeyer, Finite dynamic model for infinite media, *J. Eng. Mech., ASCE*, 95(EM4) (1969), 859—877.

## Finite Layer Analysis for Semi-Infinite Soils ( I )—General Theory

Yang Zheng-wen    Loo Wen-da

(*Shanghai Univ. of Tech., Shanghai Institute of Appl. Math. Mech., Shanghai*)

### Abstract

In the present paper a finite layer method is studied for the elastodynamics of transverse isotropic bodies. With this method, semi-infinite soils can be considered as an transverse isotropic half-space, its material functions varying with depth. Dividing the half-space into a series of layers in the direction of depth, the material functions in each layer are simulated by exponential functions. Consequently, the fundamental equations to be solved can be simplified if the Fourier transform with respect to coordinates is used. We have obtained the relationship between the "layer forces" and "layer displacements". This finite layer method, in fact, can also be called a semi-analytical method. It possesses those advantages as the usual semi-analytical methods do, and can be used to analyse the problem of the interaction between soils and structures.

**Key words** finite layer method, transverse isotropy, semi-infinite region, elastodynamics