应用数学和力学，第13卷第10期（1992年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Melnikov函数符号的应用*

沈 家 骐

（上海师范大学，1991年10月25日收到）

摘 要

用Melnikov函数的符号判断未摄动系统是Hamilton系统的二维系统 $x'=f(x)+\varepsilon g(x,\alpha)$，$0<\varepsilon<<1$，$\alpha\in R$的周期解的存在性和稳定性。其结果可应用于具有双重零特征值时流的余维二分支的分支集的相图构造。

关键词 Melnikov函数 流的余维二分支 分文集

用Melnikov函数判断具有同宿或异宿轨道的加小扰动后的二维系统有紊动解和分支时，经常用到Melnikov函数的零点[3]。但用Melnikov函数的符号判断极限环和周期解的存在性和其在分支理论中的作用的工作并不多见。本文用Melnikov函数的符号讨论具有周期轨道族的二维Hamilton系统经小扰动后周期解的存在性和稳定性。应用这一结果判断具有双重零特征值时余维二分支的分支集中的相图的稳定性的研究时[1]，比文[1]的方法简便得多。把本文的证明稍加修改，例如引进曲线坐标，在已知二个Abelian积分的商的性质时[2]，都可用这一方法判断含小扰动的二维系统的周期解的存在性和稳定性。

一、主要结果

考虑系统

$$x'=f(x)+\varepsilon g(x,\alpha),\ \ x=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in R^2 \tag{1.1$_\varepsilon$}$$

其中$\alpha\in R$，$0<\varepsilon\ll1$，假设

(H$_1$) $f,g\in C^k$，$k\geqslant2$，f在有界集$U\subset R^2$上有界，g在有界集上关于α一致有界($x\in U$，$\alpha\in R$)；

(H$_2$) (1.1)$_\varepsilon$的未摄动系统

$$x'=f(x),\ \begin{pmatrix}u'=f_1(u,v)\\v'=f_2(u,v)\end{pmatrix} \tag{1.1$_0$}$$

是Hamilton系统，积分$H(u,v)=b$中包含围绕一点c的一族连续闭曲线$\gamma_b=\{x_0^b(t)\}$，b连续

* 许政范推荐.

国家自然科学基金资助项目

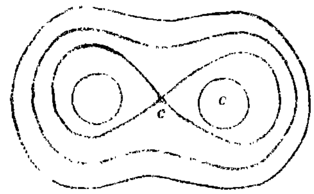

图 1

变动时，γ_b充满包含或围绕c点的某一区域，点c可以是中心或鞍点；（图1）b增大时，对应的闭曲线γ_b所包围的区域也增大；

（H_3）设这族闭曲线$\gamma_b(t)$的周期为$T_b, T_b \leqslant K, K>0$是一固定的常数，定义Melnikov函数

$$M(\alpha,b)=\int_0^{T_b} f(x_0^b(t)) \wedge g(x_0^b(t),\alpha)dt$$

在以上假定下，我们有

定理1　若对固定的$\alpha=\alpha_0$，有$M(\alpha_0,b_0)=0$，$\partial M(\alpha_0,b_0)/\partial b \neq 0$，则当$\alpha=\alpha_0$，$b_1=b_0+O^*(\varepsilon)$时，$(1.1)_\varepsilon$存在周期轨道$\Gamma_{b_1}=x_\varepsilon^{b_1}(t)$，其中$O^*(\varepsilon)=o(\varepsilon)/\varepsilon$。

定理2　在定理1的条件下，若对固定的$\alpha=\alpha_0$和充分小的$\delta>0$，$b_0<b\leqslant b_0+\delta$时，$M(\alpha_0,b)<0$（$M(\alpha_0,b)>0$），则当$t\to\infty$时，$(1.1)_\varepsilon$的位于$\Gamma_{b_1}$外部的在$\Gamma_{b_1}$附近的轨道趋向于（离开）$\Gamma_{b_1}$；若对固定的$\alpha=\alpha_0$，和充分小的$\delta>0$，$b_0-\delta\leqslant b<b_0$时，$M(\alpha_0,b)<0$（$M(\alpha_0,b)>0$），则当$t\to\infty$时，$(1.1)_\varepsilon$的位于$\Gamma_{b_1}$之内在$\Gamma_{b_1}$附近的轨道离开（趋向于）$\Gamma_{b_1}$。

二、定理的证明和推论

以下不妨假定c为原点，$h=H^{-1}(0,b)$为闭轨γ_b和v轴正方向的截距，它随b的增大而增大。

引理1　设$x_\varepsilon(t)$是$(1.1)_\varepsilon$的解，$x_0(t)$是$(1.1)_0$的解，它们满足同一初始条件，则

$$x_\varepsilon(t)=x_0(t)+o(\varepsilon) \tag{2.1}$$

(2.1)对$0<t\leqslant T$是一致的。

证　利用Gronwall引理。□

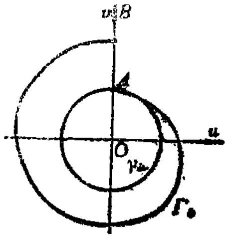

图 2

引理2　设$H'(u,v)$是Hamilton函数沿$(1.1)_\varepsilon$的解对t的导数，则

$$\int_{\Gamma_b} H'dt=\varepsilon M(\alpha,b)+o(\varepsilon) \tag{2.2}$$

其中Γ_b是通过v轴和γ_b同一点$A(A\in\gamma_b)$出发又回到v轴上B点的$(1.1)_\varepsilon$的轨道（图2）；(2.2)对t,α,b是一致的。

证　设$(1.1)_\varepsilon$的解为$x_\varepsilon^b(t)$，$(1.1)_0$的周期解为$x_0^b(t)$，其周期为T_b，从A点出发到B点时Γ_b经过的时间为T_ε，则

$$\int_{\Gamma_b} H'dt=\varepsilon\int_0^{T_b}[f_1(x_0^b(t))g_2(x_0^b(t),\alpha)-f_2(x_0^b(t))g_1(x_0^b(t),\alpha)]dt$$
$$+\varepsilon\int_{T_b}^{T_\varepsilon}[f_1(x_0^b(t))g_2(x_0^b(t),\alpha)-f_2(x_0^b(t))g_1(x_0^b(t),\alpha)]dt+O(\varepsilon^2) \tag{2.3}$$

由于$\varepsilon\to0$时，$T_\varepsilon\to T_b$和$\sup\limits_{x\in U, \alpha\in R}|f_1g_2-f_2g_1|=m$，(2.3)中右端第二项为$o(\varepsilon)$，因此有

$$\int_{\Gamma_b} H'dt=\varepsilon M(\alpha,b)+o(\varepsilon)$$ □

定理1的证明　由(2.2)对固定的$\alpha=\alpha_0$，存在$(1.1)_\varepsilon$的周期解的充要条件是

$$\varepsilon M(\alpha_0,b)+o(\varepsilon)=0$$

即

$$M(\alpha_0,b)+O^*(\varepsilon)=0 \tag{2.4}$$

从而

$$b_1=M^{-1}(a_0,O^*(\varepsilon))=b_0+O^*(\varepsilon)$$

其中$b_0=M^{-1}(a_0,0)$，所以$b_1=b_0+O^*(\varepsilon)$时$(1.1)_\varepsilon$存在周期解。 □

定理2的证明 只证结论的部份，其余可类似得出。

从定理1知存在$(1.1)_\varepsilon$的周期轨道Γ_{b_1}，设Γ_{b_1}与v轴的正向截距为$h_1=H^{-1}(0,b_1)=H^{-1}(0,b_0)+O^*(\varepsilon)$，取$\eta>0$充分小使$h_1+\eta=H^{-1}(0,b_1+\delta)$，则过$A(0,h_1+\eta)$的$(1.1)_\varepsilon$的轨道满足

$$\int_{\Gamma_{b_1+\delta}}H'dt=\varepsilon M(a_0,b_1+\delta)+o(\varepsilon)$$

而 $$M(a_0,b_1+\delta)=M(a_0,b_0+O^*(\varepsilon)+\delta)=M(a_0,b_0+\delta)+O^*(\varepsilon)$$

当ε很小时$M(a_0,b_1+\delta)$与$M(a_0,b_0+\delta)$同号，因此$M(a_0,b_1+\delta)<0$，即

$$\int_{\Gamma_{b_1+\delta}}H'dt=H(B)-H(A)<0$$

由于$H(u,v)=b$中，b愈大时γ_b所围的区域也愈大，因而B点在A点之下。定理2的部份结论证毕。 □

从定理1～2不难得到下面的推论。

推论1 若Melnikov函数满足$M(a_0,b_0)=0,dM(a_0,b_0)/db<0$ $(dM(a_0,b_0)/db>0)$，则$(1.1)_\varepsilon$存在稳定（不稳定）周期解。

推论2 若对$\beta_1\leqslant b\leqslant\beta_2$，$a_1\leqslant a\leqslant a_2$定理1的条件成立；由$M(a,b)=0$可确定$a=a(b)$，则$a(b)=a_0$的实根个数$b_i(i=1,2,\cdots,k)$是对应于参数$a_0$的$(1.1)_\varepsilon$的周期解的个数。

在$M(a,b)$与$a-a(b)$同号（异号）的条件下，有以下推论。

推论3 若在$a=a_0,b_i<b\leqslant b_i+\delta$时,$a_0<a(b)$；$a=a_0,b_i-\delta\leqslant b<b_i$时$a_0>a(b)$ $(a=a_0$，$b_i<b\leqslant b_i+\delta$时$a_0>a(b)$；$a=a_0$，$b_i-\delta\leqslant b<b_i$时$a_0<a(b))$，则存在$(1.1)_\varepsilon$的稳定周期解。

推论4 若在$a=a_0$，$b_i<b\leqslant b_i+\delta$时，$a_0>a(b)$；$a=a_0$，$b_i-\delta\leqslant b<b_i$时$a_0<a(b)$ $(a=a_0$，$b_i<b\leqslant b_i+\delta$时，$a_0<a(b)$；$a=a_0$，$b_i-\delta\leqslant b<b_i$时$a_0>a(b))$，则存在$(1.1)_\varepsilon$的排斥周期解。

推论5 若$a_0-a(b)$在$a=a_0$，$b_i<b\leqslant b_i+\delta$，和$a=a_0$，$b_i-\delta\leqslant b<b_i$时有相同的符号，则$(1.1)_\varepsilon$存在鞍型周期解。

三、例

考虑系统[1]

$$\begin{aligned}&u'=v\\&v'=u-u^3+\varepsilon(av-u^2v)\end{aligned}\tag{3.1}$$

此时Melnikov函数为

$$M(a,b)=\int_0^{T_b}v_0^b(t)[av_0^b(t)-(u_0^b(t))^2v_0^b(t)]\,dt=a\int_{\gamma_b}vdu-\int_{\gamma_b}u^2vdu$$

从$M(a,b)=0$解出

$$a=\int_{\gamma_b}u^2vdu\Big/\int_{\gamma_b}vdu$$

由[1]，[3]已知存在b_1使$a'(b_1)=0$；$b<b_1$时$a'(b)<0$，$b>b_1$时$a'(b)>0$。由于$\int_{\gamma_b} vdu>0$，故$a-a(b)$和$M(a,b)$同号。因此在 $a(b_1)<a<4/5$时系统(3.1) 存在两个围绕鞍点的周期解(图3)，和位于b_1右边的b对应的是吸引的，和位于b_1左边的b对应的是排斥的。而与b_1对应的周期解，其Γ_{b_1}内部的解离开此周期解；其Γ_{b_1}外部的解趋向于此周期解 ($t\to\infty$)。

以上结论完全和[1]关于参数区域5的结论一致。用同一方法，不难判断其他参数区域内的周期解的内部和外部解的趋向。

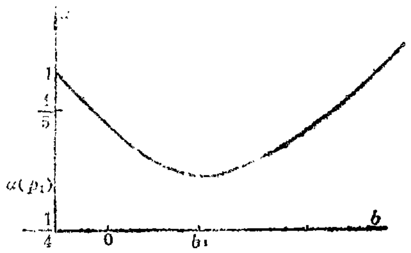

图 3

参 考 文 献

[1] Carr, J., *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York (1981).

[2] Draohman, B., S. A. Van Gill and Zhang Zhi-fen, Abelian integrals for quadratic vector field, *J. Reine Angew. Math.*, (382) (1987), 165—180.

[3] Gukenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Field*, Springer-Verlag, New York (1983).

Applications of the Signs of Melnikov's Function

Shen Jia-qi

(*Shanghai Normal University, Shanghai*)

Abstract

The existence and stability of periodic solutions for the two-dimensional system $x'=f(x)+\varepsilon g(x,a),0<\varepsilon\ll 1,\ a\in R$ whose unperturbed system is Hamiltonian can be decided by using the signs of Melnikov's function. The results can be applied to the construction of phase portraits in the bifurcation set of condimension two bifurcations of flows with double zero eigenvalues.

Key words Melnikov's function, codimension two bifurcations of flows, bifurcation set