

热污染的三维椭圆型数值模拟*

李 嘉 赵文谦 罗 麟

(成都科技大学高速水流国家重点实验室, 1991年9月20日收到)

摘 要

过去对复杂流动的三维数值模拟往往要采用许多简化处理方法, 使得数值模型的适用性受到很大限制, 所得结果也不能全面反应流场的特征. 本文用有限容积法直接求解三维椭圆型流动控制方程, 紊流模型采用有浮力修正的 $k-\epsilon$ 模型. 本文首先将该模型用于有横流情况下岸边等密度排放问题, 以检验本数值模型和计算程序的正确性, 所得结果正确预报了排放口下游的回流区, 与文献[7]的计算和实验结果一致. 然后进一步将其应用于有横流情况下的温排水、取水问题, 所得结果合理, 并精细地揭示了流场的内部特征.

关键词 紊流 热污染 椭圆型 三维数值模型

一、引 言

核电站、热电厂的废热水或其它污水通常由岸边排放到天然水域, 这对生态环境构成越来越大的威胁. 现在政府已对污水排放所造成的环境冲击给出了明确的指标, 工厂设计者们必须保证建厂后对环境的冲击要低于给定的指标. 所以, 政府和工厂设计者们对预报在某一给定排放条件下环境水体中污染物分布的可靠方法有着极大的兴趣. 由于物理模型试验耗资昂贵, 尤其当要研究多种参数的影响时, 更是如此. 因此, 寻求经济而且可靠的理论预报方法有着重大的意义.

热水或其它污染物从岸边排入河流后, 其分布受控于两个过程, 即时均流动引起的对流和紊动引起的扩散. 这一问题属于三维紊浮力射流, 其控制方程是一组三维椭圆型偏微分方程. 由于问题的复杂性和计算机容量、速度的限制, 过去对这一类问题大都作一些简化处理. 例如, 根据流动的特性划分近区和远区, 对不同区域分别用不同的近似处理方法^{[1], [2]}. 众所周知, 这种方法比较粗糙, 很难满足实际工作的需要. 70年代, 紊流理论迅速发展起来, 所谓全场方法应运而生. 应用这一方法对二维问题的研究比较成熟一些. 倪浩清等人(1986)^[3]分别用修正的 $k-\epsilon$ 模型和应力代数模型对二维突扩热水排放问题进行了计算, 计算的温度分布与实验资料符合良好. 有关二维问题的数值计算已有许多成功的算例, 在此就不一一赘述.

* 钱伟长推荐.
国家教委博士点基金资助课题

对于三维计算主要可分两类, 即有抛物型简化的方法和完全的三维计算方法。所谓抛物化就是当流动存在一个主流方向时, 假定(1)在主流方向无回流; (2)在主流方向扩散作用比对流作用小得多, 可以忽略; (3)下游压力场对上游无影响。这样便可将原椭圆型方程简化为抛物型方程, 因而为以沿下游方向逐步求解。实际上相当于在每个横断面上解一个二维问题^[4]。Pratap和Spalding(1976)^[5]推广了这一方法, 允许压力向上游传递, 使得这一方法可用于主流方向流线有弯曲的情况。由于这一方法中把压力处理成椭圆型, 而别的变量处理成抛物型, 所以称之为“部分抛物化方法”。但是, 这一方法对于有回流的情况是无能为力的。后来, Rodi和Srivata(1980)^[6]又提出了所谓“局部椭圆化方法”, 即在小范围的回流区内用完全椭圆型方程, 而在其他区域仍采用抛物型方程。Demuren和Rodi(1983)^[7]用此方法计算了岸边等密度排放问题, 计算出的回流区尺度与实验结果一致。

但是, 如果进行抛物化的条件不存在, 或从理论的完善来考虑, 则应该求解椭圆型方程, 即按完全的三维流动计算。Patankar(1977)^[8]采用标准的 $k-\epsilon$ 模型用有限差分方法计算了在有横流情况下半无界域中的三维圆形等密度底部射流, 控制方程为椭圆型的。计算结果正确反映了射流断面中的内部结构, 与实验数据符合较好。

作者在前人工作的基础上, 以明渠岸边排放这一典型的三维紊流流动为研究对象, 研究了以热水为代表的有密度差的排放问题和既有排放口又有取水口的问题。作者采用了有浮力修正的 $k-\epsilon$ 模型, 用有限容积法进行了完全椭圆型的数值模拟, 所得结果是令人鼓舞的。

二、数学模型

2.1 控制方程

在天然水流中, 雷诺数一般很高, 分子输运项比对应的紊动输运项要小得多, 可不予考虑。当然, 在近壁粘性底层内除外。不过我们总是在粘性底层以外求解方程组, 而粘性底层的外边缘与边界用经验性定律来连接。考虑到流动马赫数低, 忽略密度脉动及输运系数脉动, 作Boussinesq假设, 即仅在重力项计及密度的变化, 则可以得到在笛卡尔直角坐标系下三维定常紊流张量形式的时均控制方程:

连续性方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

动量方程

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i \beta \theta + \frac{\partial (-\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

能量方程

$$u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial (-\overline{u_j' \theta'})}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

式中 $\{x_i\} = \{x, y, z\}$ 是坐标分量; $\{u_i\} = \{u, v, w\}$ 是速度分量; g_i 是重力加速度分量; θ 是流场温度 T 与环境温度 T_0 的差, 称为超温; $\beta = 0.2863 \times 10^{-3}$ 是水的等压膨胀系数; p 是流体压力; ρ 是环境流体密度。 $-\overline{u_i' u_j'}$ 是紊动应力, 为一对称的二阶张量; $-\overline{u_i' \theta'}$ 是雷诺热流。

2.2 高雷诺数紊流模型

紊流应力可以通过紊动粘性系数 ν_t 与时均速度联系起来, 即

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.4)$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker δ , $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ 是紊动动能。

同理, 雷诺热流可表示为

$$-\overline{u'_i \theta'} = \Gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

式中 Γ 是紊动热扩散系数, $\Gamma = \nu_t / \sigma_t$, σ_t 为紊动普朗特数。

在上述假定下, 寻求各二阶相关量的问题转化为确定紊动粘性系数的分布, 而 ν_t 则可由紊动动能 k 和其耗散率 ε 来确定, 其关系是

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (2.6)$$

式中 C_μ 是常数。

k 和 ε 的输运方程为

$$u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P + G - \varepsilon \quad (2.7)$$

$$u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P + G) (1 + C_{3\varepsilon} R_f) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.8)$$

式中

$$P = \beta g_i \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad G = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

R_f 是通量理查森数

$$R_f = \begin{cases} -P/(P+G) & \text{对水平剪切层} \\ 0 & \text{对垂直剪切层} \end{cases} \quad (2.10)$$

紊动普朗特数为

$$\sigma_t / \sigma_{t0} = (1 + 3.33 R_i)^{1.5} / (1 + 10 R_i)^{0.5} \quad (2.11)$$

R_i 是梯度理查森数

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho / \partial z}{|\partial u / \partial z + \partial v / \partial z|^2} \quad (2.12)$$

根据 Launder^[9] 和 Hossain^[10] 的建议, 各常数取值为: $C_\mu = 0.09$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$, $C_{3\varepsilon} = 0.8$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_{t0} = 0.9$ 。这些常数具有一定的通用性, 在很多情况下都有成功的算例。

2.3 边界条件

由于本模型属于椭圆型问题, 因此, 必须在计算域的所有边界上给出边界条件。在来流断面和取排水口给定速度分布, k, ε 和 θ , 对于取水口, 给定 $\partial \theta / \partial n = 0$, 在下游出流断面给定各物理量的法向导数为零。在固壁上, 法向速度为零, 近固壁处的切向速度, k, ε 均由壁函数给定, 并假定壁面是绝热的。

在自由表面上采用刚盖假定, 形成对称面。但 ε 用公式

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / (0.07 h \kappa) \quad (2.13)$$

计算。式中 $\kappa = 0.42$ 是 von Kármán 数, h 是当地水深。

对于压力, 在所有边界上给定其法向导数为零, 并取上游来流处水面上一点的压力为零。

在三维情况下, 应用壁函数时应注意在近壁处平行于壁面的速度分量有两个。例如对水

底, 在近壁处一点 P 有速度 u_P 和 v_P , 点 P 距底部距离为 z_P , 则壁面合剪应力

$$|\tau_{\text{wall}}| = |\rho_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_P / U_p^+| \quad (2.14)$$

式中

$$U_P = (u_P^2 + v_P^2)^{1/2}, \quad U_p^+ = \ln(Ez_P^+)/\kappa, \quad z_P^+ = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} z_P / \nu \quad (2.15)$$

ν 是流体运动粘性系数, E 是粗糙度参数(≈ 9 , 对于水力光滑壁面)。将 τ_{wall} 在 x 和 y 方向根据 u_P 和 v_P 进行分解, 得

$$\tau_{x\text{wall}} = -|\tau_{\text{wall}}| u_P / U_P, \quad \tau_{y\text{wall}} = -|\tau_{\text{wall}}| v_P / U_P \quad (2.16)$$

当 $z_P^+ < 11.6$ 时, τ_{wall} 应根据层流公式计算, 即

$$|\tau_{\text{wall}}| = |\mu U_P / z_P|$$

式中 μ 是流体的动力粘性系数。

2.4 数值计算方法

对原偏微分方程的离散本文采用了有限容积法, 即将计算域划分为一系列不重复的控制体积, 控制体积的形心为控制点。这一划分是为标量变量($p, k, \varepsilon, \theta$)设计的, 分别称其为主控体积和主控制点。为了解决压力梯度项和连续方程离散的困难, 采用了交错网格方法。即分别将矢量分量 u, v, w 的网格系统与主网格系统错开。例如, 对 u 的控制体积而言, 它只在 x 方向与主控制体积错位, 使 u 的控制点位于主控制体积的界面上, 而 u 的控制体积的界面(垂直于 x 轴的)过主控制点。

为了方便起见, 可将连续方程、动量方程和 k, ε, θ 方程写成一个通用的形式, 即

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = S \quad (2.17)$$

式中 Γ 是扩散系数, S 是源项。对于特定意义的 Φ , 有相应的 Γ 和 S 。有

对连续性方程: $\Phi=1, \Gamma=0, S=0$

对 u -动量方程: $\Phi=u, \Gamma=\nu_i$

$$S_u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

对 v -动量方程: $\Phi=v, \Gamma=\nu_i$

$$S_v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_i \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

对 w -动量方程: $\Phi=w, \Gamma=\nu_i$

$$S_w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_i \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_i \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g\beta\theta \quad (2.20)$$

对 k 方程: $\Phi=k, \Gamma=\nu_i/\sigma_k$

$$S_k = G - \varepsilon + \beta g \frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.21)$$

对 ε 方程: $\Phi=\varepsilon, \Gamma=\nu_i/\sigma_\varepsilon$

$$S_\varepsilon = C_{1,\varepsilon}(P+G)(1+C_{3,\varepsilon}R_f)/k - C_{2,\varepsilon}\varepsilon^2/k \quad (2.22)$$

对温度方程: $\Phi=\theta, \Gamma=\nu_i/\sigma_\theta, S_\theta=0$

注意在式(2.18)~(2.20)中已把 $2k/3$ 归到了 p 中。

将上列偏数分方程对每一个控制体积积分, 便得出一组离散方程, 其中的未知数是控制点上各物理量的值。在微分方程离散时, 对流-扩散复合项的差分采用幂函数格式, 并对源项作负坡线性化处理以保证收敛。

计算进行的顺序同SIMPLER算法, 收敛准则是压力校正方程的质量源的绝对值之和(对各控制点求和)小于上游来流质量流量的1%。实际计算表明, 其它方程的收敛速度都快于压力校正方程。

在求解差分方程时采用了三对角矩阵算法(TDMA)逐行求解。应该指出的是TDMA所选择的方向和扫描方向(即选择计算行的先后次序)对收敛速度是有影响的。在作者的计算程序中, 对 u 分量TDMA的方向选择了两个——沿水深和来流方向, 对 v 分量选择了 y 轴方向, 对压力 p TDMA的方向为 x, y, z 三个方向, 对其它变量只选择了水深方向。相应地, 当TDMA的方向确定后, 扫描方向总是由近岸(有排放口一侧)向对岸、由水面向水底、由上游向下游。

由于压力方程的解对整个求解过程有很大影响, 并且压力影响是双向的, 因此扫描方向应是多向。而且在每一个大循环中, 应重复求解压力方程几次, 一般说来2~3次就可以了。

顺便指出, 在求解方程时, 为避免发散采用了欠松弛技术。对于本文的算例, 速度 u 的松弛系数为0.5, 其它各物理量的松弛系数取为0.2, 对压力校正方程不采用欠松弛。

三、计算结果与讨论

为了验证本文数值方法和计算程序, 作者首先计算了一个等密度排放的情况。对这一情况Demuren和Rodi^[7]用局部椭圆化方法作过理论计算, 并与实验进行了比较。流场的物理图形象见图1。其中上游来流速度 $u_0=0.1\text{m/s}$, 射流与横流比 $R=v_d/u_0=4$, $b/B=0.012$, $B/h=30.0$, $B=1.82\text{m}$, 渠道坡降 $i=7\times 10^{-5}$, 渠道为水力光滑的。计算时沿 x, y, z 方向单元划

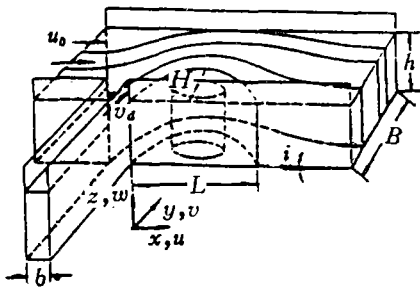


图1 算例一的物理图象

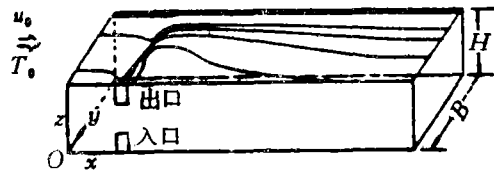
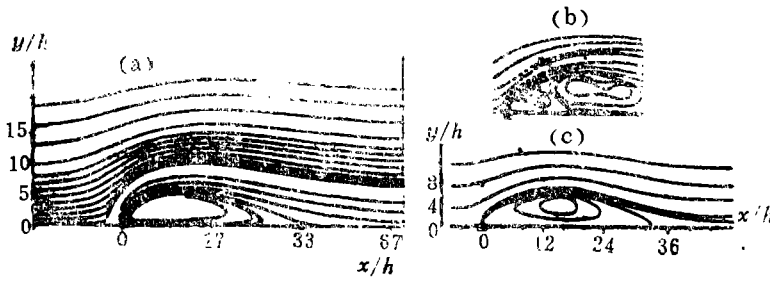


图2 算例二的物理图象

分分别为 $38\times 31\times 9$, 在回流区划分应密一些。计算出的水面流线与文献[7]的计算结果和实验观测结果进行了比较, 见图3。实验观察到的流线表明在射流口下游的回流区中有三个旋涡, 而数值结果, 文献[7]和作者的, 都只预报出一个旋涡, 不过回流区大小和形状是符合的。

实验显示回流区中有三个旋涡的原因在于在这一区域中的壁面压力分布。从射流口到回流区中心, 壁面压力梯度是负值, 在接近回流区中心处达到最小值, 此后壁面压力又上升, 在重附着处达到最大值。因此, 在回流区流体从重附着处沿上游方向运动。如果负压力梯度区足够长, 流动将发生分离, 形成多个旋涡。由于相邻旋涡的方向必须是反向的, 因此在回流区中能够稳定的旋涡的最少个数是三个。而数学模型中所采用的 $k-\epsilon$ 紊流模型是对高雷诺数建立的, 壁面边界条件是在粘性底层以外由壁函数确定, 因而导致不能精确地模拟壁面压力。



(a)本文计算结果; (b)实验[7]; (c)计算[7]

图3 算例一的水面流线

由于实验没有测量速度值, 所以计算结果无法具体比较. 但与文献[7]的计算结果相比是一致的, 见图4、5.

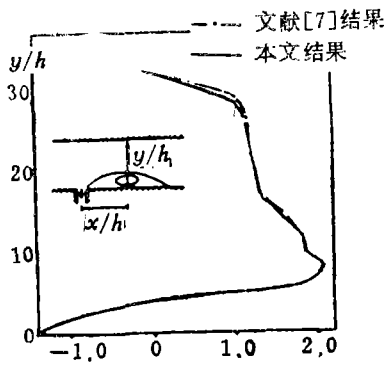
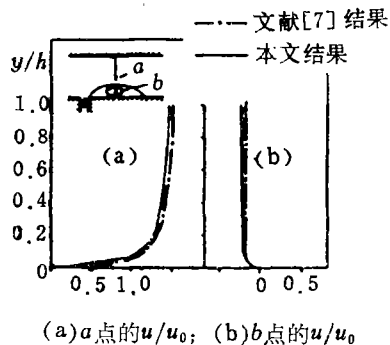


图4 水面上过旋涡中心的纵向流速分布 u/u_0



(a)a点的 u/u_0 ; (b)b点的 u/u_0

图5 在两个特殊位置处纵向流速沿垂向的分布

上面算例表明, 本文数值方法对于等密度侧向排放给出了很好的预报结果.

作者进一步以重叠式温排水、取水工程为背景, 对有温度差的岸边排放问题进行了计算. 其物理图形见图2. 图中 $B=0.6\text{m}$, $H=0.1\text{m}$, 取排放口宽度和高度分别为 $b=0.08\text{m}$ 和 $h=0.02\text{m}$, 上游来流速度 $u_0=0.05\text{m/s}$, 取、排放口速度均为 0.4m/s , 排放口温度为 35°C , 上游来流温度 $T_0=20^\circ\text{C}$, 渠道坡降 $i=7\times 10^{-5}$, 渠道为水力光滑的. 沿 x, y, z 方向单元划分情况是 $40\times 17\times 12$, 在取、排放口附近划分密一些.

图6图7给出了不同水深处和不同断面处的流态图. 综合起来, 不难看出由于上游来流和取、排水口的作用, 在取、排放口下游近处水面下形成一个几乎占据全横断面的旋涡, 此后, 这一旋涡在动量和浮力的作用下, 涡心向对岸和水面上运动, 同时, 在近岸诱发出一个新的旋涡, 两旋涡的方向相反. 第一个旋涡在把能量传递给第二个旋涡的过程中, 以及由于壁面和粘性的消耗, 逐渐消灭, 第二个涡占据主导地位. 由于动量和浮力的影响在下游已很小, 所以, 第二个涡的涡心轨迹在下游几乎是直线, 只是由于水底的消耗, 涡心逐渐移向水底. 同时可以看到第二个涡在发展过程中诱发出第三个旋涡, 但此时旋涡的强度已经很小. 最后可以看到第二个旋涡的消亡.

图8给出了无量纲温度的等值线. 在本算例中, 上游流量与排水口流量相比较, 同时出口密度 Froude 数也很大. 热水射出后, 与冷水发生强烈的掺混, 没有形成温度分层流动. 有趣的是, 尽管取水口和排水口相距很近, 但是底部取水口并未取到热水, 这与陈惠泉等人(1984)^[11]的实验观测是一致的.

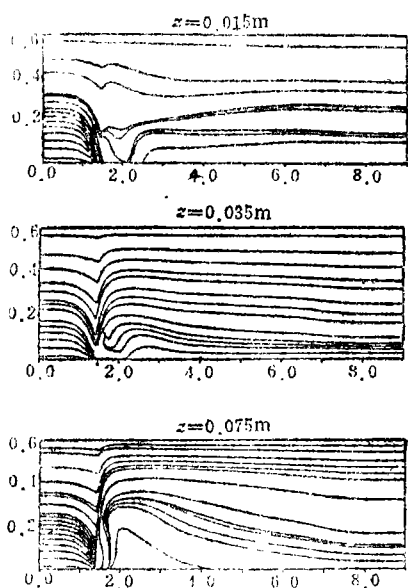


图6 算例二各水平断面流态

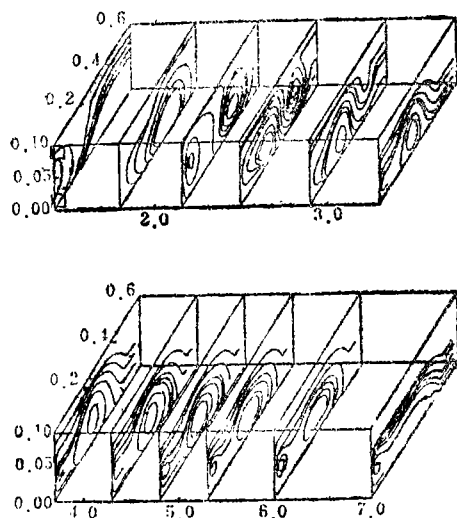
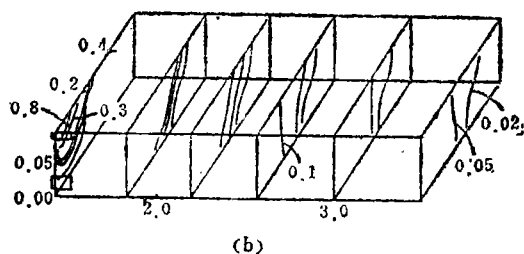
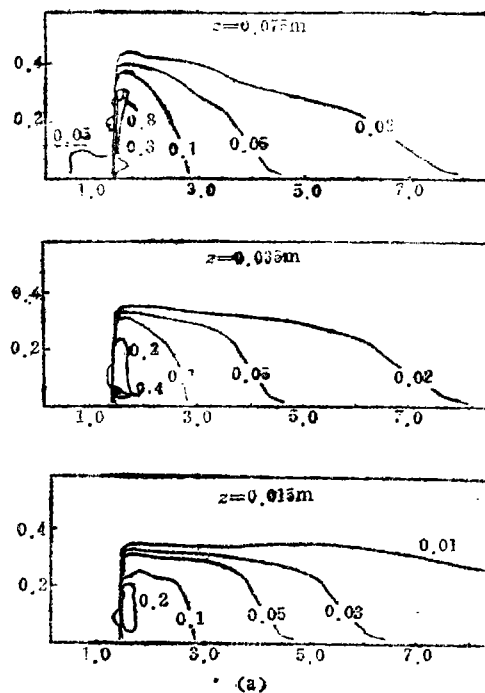


图7 算例二各横断面流态

遗憾的是，对第二个算例作者尚未见到别的计算结果和合适的试验资料，所以无法进行比较。不过至少从物理概念上讲，这一计算结果是合理的。



(a)水平断面; (b)横断面
 $T^* = (T - T_0) / (T_{in} - T_0)$

图8 算例二温度 T^* 分布

值得指出的是，上述计算都是在装有Transputer加速卡的286微机上进行的。每步迭代时间90秒，达到收敛一般需要迭代1200次左右。

四、结 语

作者成功地对上游来流情况下岸边排放的流场和温度场进行了数值模拟。由于未对控制方程作任何简化，因而可以精细地描述流场和温度场特性，同时对其它形式的三维流动和浓度场也是适用的。

计算结果与文献[7]的比较表明：本文计算方法和计算源程序是可信的。

另外, 由于计算工作完全是由微机完成, 易于被工程设计部门所接受, 对指导设计和实验具有很大的理论意义和经济效益。

应该指出的是, 实际中常常会遇到不规则边界的问题, 因此, 将这一成果推广到复杂边界将是作者下一步要解决的问题。

参 考 文 献

- [1] Motz, L. H. and B. A. Benedict, Surface jet model for heated discharges, *J. Hydraulics Div., ASCE*, 98(HY1), Proc. Paper 8669, Jan.(1972).
- [2] Holley, E. R., et al., Some aspects of analysing transverse diffusion in river, *J. Hydraulic Research*, 10(1) (1972).
- [3] 倪浩清等, 紊流数学模型在环境预测中的研究和展望, *水利学报*, (5) (1986).
- [4] Patankar, S. V. and D. B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum in 3-D parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 (1972).
- [5] Pratap, V. S. and D. B. Spalding, Fluid flow and heat transfer in 3-D duct flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19 (1976).
- [6] Rodi, W. and S. K. Srivata, A locally elliptic calculation procedure for 3-D flows and its application to a jet in cross-flow, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 23 (1980), 67—83.
- [7] Demuren, A. O. and W. Rodi, Side discharges into open channels: mathematical model, *J. of Hydraulic Engineering*, 109(12) (1983).
- [8] Patankar, S. V. et al., Prediction of the 3-D velocity field of a deflected turbulent jet, *J. Fluid Engrg., Trans. ASCE*, 99 (1977).
- [9] Launder, B. E. and D. B. Spalding, The numerical computation of turbulent flow, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1974).
- [10] Hossain, M.S., Mathematische modellierung von Turbulenten auftriebasstromungen, Ph. D. Thesis, University of Karlsruhe (1979).
- [11] 陈惠泉、陈燕茹, 重叠式排取水口的研究与实践, 《中科院、水电部水利水电科学研究院科学研究论文集》, 17 (1984).

A Fully Elliptic Calculating Procedure for Three-Dimensional Thermal Pollution

Li Jia Zhao Wen-qian Luo Lin

(Chengdu University of Science and Technology, Chengdu)

Abstract

The use of the mathematical models so far for three-dimensional flow has some limitations because of their simplifications. Many characteristics of the flow field can not be predicted by these models. In this paper the three-dimensional elliptic governing equations are solved by finite-volume methods; the buoyancy

extensions of the widely tested $k-\epsilon$ model is adapted. The method is first applied to calculate the field of side discharge into open channel flow. The results are in good agreement with those of ref. [7]. Then it is further used to the intake discharge problem which is of a typical layout in cooling-water projects, and the calculated results, which predict in detail the characteristics of flow field, are reasonable.

Key words turbulence, thermal pollution, elliptic, three-dimensional numerical model