

# 在微重力条件下无限长方柱中的自然对流\*

马云丽

(中国科学院力学研究所, 1990年12月21日收到)

## 摘 要

为了研究在宇宙空间微重力环境中, 自然对流对流体运动的影响, 将变量展成 Grashof 的摄动级数, 使用摄动理论将 Navier-Stokes 方程组简化成: 关于温度  $T$  的 Poisson 方程, 关于流函数  $\psi$  的非齐次 biharmonic 方程. 选取一无限长封闭方柱体, 假定在柱体边界上预先给定一种线性温度分布, 使用数值计算方法求解上述简化方程组, 得到各阶流函数和各阶温度值, 进而详细地研究了方柱中流体的运动状况, 分析和讨论了某些参数, 如 Grashof 数和 Prandtl 数对流体运动的影响, 最后将计算结果与由未简化方程推算的结果进行比较, 证实近似方法正确地简化了复杂的流体运动过程, 并且可以推广、运用到三维问题上。

**关键词** 微重力 自然对流 Grashof 数

## 一、引 言

近年来, 由于航天技术的迅速发展, 人类已经利用航天飞机、宇宙飞船, 进而可以利用空间站去探索宇宙的奥秘。同时, 人们也成功地在太空中进行了各种材料生产的实验, 开辟了未来空间工业生产的光辉前景。

在宇宙空间中做的大量流体力学实验, 主要是为了了解在微重力环境中, 流体的运动特性及其规律, 在生产半导体材料, 合金、陶瓷、各种生物医学产品过程中产生的影响。<sup>[1][2]</sup>

在微重力条件下, 流体的表面张力起到不可忽视的重要作用。六十年代, 这方面的研究解决了流体燃料的贮藏和控制等问题。近年来, 对有交界面存在的, 由于表面张力引起的, Marangoni 对流的研究, 可望解决无容器生产和拉单晶工艺等问题<sup>[3]</sup>。

当表面张力不存在时, 例如, 完全封闭在容器中无自由表面的流体的运动, 则应主要考虑由于浮力对流引起的质量输运过程。本文将着重讨论这方面的问题。主要研究和讨论在微重力环境中, 由于温度梯度引起的, 封闭在容器中的流体的自然对流。对此问题的研究, 可望在空间工业生产的过程中从理论上提出避免材料产生缺陷的有效途径。

## 二、基本方程和假设

在推导基本方程的过程中, 认为流体是不可压缩的, 因此, 由于压力变化而引起的密度

\* 李家春推荐, 国家自然科学基金资助课题。

的变化可以忽略。

将可变温度  $T(x, y, z, t)$  写成  $T = T_0 + T_r$ , 其中  $T_0$  为某个固定的平均值, 以它为起点来衡量温度的不均匀性  $T_r$ 。假设  $T_r$  较  $T_0$  为小, 由于温度变化  $T_r$  不大, 所以密度的变化也不大。

由此, 对流的质量、动量以及能量守恒方程组为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \alpha T_0 g \mathbf{j} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (2.3)$$

其中  $\mathbf{u}$  是速度矢,  $p$  是压力,  $\mu$  是粘滞率,  $\kappa$  是热导率,  $C_p$  是比热比,  $\alpha = (-1/\rho)(\partial\rho/\partial T)$ ,  $\alpha$  是流体的热胀系数,  $\mathbf{g}$  为重力加速度,  $\mathbf{j}$  为垂直向上的单位矢 (方向与重力加速度方向相反)。

用变量  $x' = \frac{x}{L}$ ,  $t' = \frac{tG_r \nu}{L^2}$ ,  $\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}L}{G_r \nu}$ ,  $\rho' = \frac{\rho L}{\rho G_r^2 \nu^2}$ ,  $T_0 = \frac{T - T_{\text{最小}}}{\Delta T}$  进行无量纲化, 并忽略上标“'”得:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{G_r} T \mathbf{j} + \frac{1}{G_r} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pr G_r} \nabla^2 T \quad (2.7)$$

其中  $Pr = C_p \mu / \kappa$  是 Prandtl 数,  $G_r = ag \Delta T L^3 / \nu^2$  是 Grashof 数,  $\nu$  是动力粘度,  $\Delta T = T_{\text{最大}} - T_{\text{最小}}$ 。

为方便计, 引入流函数  $\phi$ , 定义  $u_x = -\partial\phi/\partial y$ ,  $u_y = \partial\phi/\partial x$ , 将此关系代入方程中, 并对动量方程(2.6)取旋度得:

$$\nabla^4 \phi - \nabla \times (T \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = G_r \frac{D}{Dt} (\nabla^2 \phi) \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 T = Pr G_r \frac{DT}{Dt} \quad (2.9)$$

如果  $G_r < 1$ ,  $Pr = O(1)$ , 我们可以假设

$$\phi = \phi_0 + G_r \phi_1 + G_r^2 \phi_2 + \dots \quad (2.10)$$

$$T = T_0 + G_r T_1 + G_r^2 T_2 + \dots \quad (2.11)$$

差分算子也可以展成

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{D}{Dt}\right)_0 + G_r \left(\frac{D}{Dt}\right)_1 + G_r^2 \left(\frac{D}{Dt}\right)_2 + \dots \quad (2.12)$$

其中

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_0 = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \phi_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - \phi_{0x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_1 = \left(\phi_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \phi_{1x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (2.14)$$

将如上假设带入方程组中, 得各阶方程如下:

$$\nabla^4 \phi_n - \nabla \times (T_n \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{D}{Dt} \right)_i \nabla^2 \phi_{n-i-1} \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 T_n = Pr \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{D}{Dt} \right)_i T_{n-i-1} \quad (2.16)$$

(规定在方程右边的求和项中，上指标为负的项均为零)，从方程(2.15)和(2.16)可见，由于使用了(2.10)和(2.11)及(2.12)作摄动展开，使问题大大简化，能量方程和动量方程(2.7),(2.6)被简化成线性化的(2.16)和(2.15)，而且，这两个方程是弱相互耦合的。因此，可以按 $T_0 \rightarrow \phi_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \phi_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \phi_2 \dots$ 的次序很容易地求出各阶未知变量来。有关这方面的详细讨论可参阅文献[4]。

### 三、在无限长正方形柱体中的定常对流

假设在正方形柱体的边界上，预先给定某种水平方向线性分布的温度梯度，研究由此温差引起的，在无限长方柱中的定常对流。首先选取原点位于正方柱中心的直角坐标系 $(x, y, z)$ ，由于 $z$ 方向无限长，因此可化成二维问题来处理。如图1。

由方程(2.15)和方程(2.16)可以导出零阶方程组为：

$$\nabla^2 T_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 \phi_0 - \nabla \times (T_0 \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.2)$$

边界条件为：

$$T_0|_{x=\pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$T_0|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad (3.4)$$

$$T_0|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.5)$$

$$\phi_0|_{x=\pm \frac{1}{2}} = \phi_0|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.6)$$

$$\phi_{0x}|_{x=\pm \frac{1}{2}} = \phi_{0y}|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.7)$$

一阶方程组为：

$$\nabla^2 T_1 = \phi_0, \quad (3.8)$$

$$\nabla^4 \phi_1 = \left( \phi_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - \phi_{0x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_0 + \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad (3.9)$$

边界条件为：

$$T_1|_{x=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.10)$$

$$T_1|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.11)$$

$$\phi_1|_{x=\pm \frac{1}{2}} = \phi_1|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.12)$$

$$\phi_{1x}|_{x=\pm \frac{1}{2}} = \phi_{1y}|_{y=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (3.13)$$

采用数值计算方法，按照 $T_0 \rightarrow \phi_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \phi_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \phi_2 \dots$ 的次序求解各阶方程及各阶未知变量。用逐次超松弛迭代法求 $T_1$ 满足的Poisson方程以及 $\phi_0$ 和 $\phi_1$ 所满足的非齐次biharmonic方程。采用的差分格式是如图2(a)所示的十三点格式。在计算方程(3.9)右边项中的 $\phi_{0xxx}, \phi_{0yyy}, \phi_{0xyy}, \phi_{0yyxx}$ 时，采用精度为 $O(h^4)$ 的差分格式，如图3。

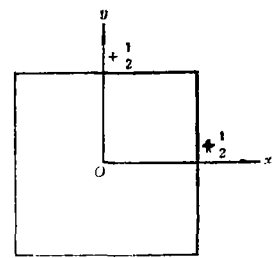


图 1

在计算过程中,为了减少由外邻边界节点引起的误差,提高计算精度,我们采用了如图2(b)所示的五点格式来计算外邻点A的值。叠代准则是使得 $|u^{n+1}-u^n|/u^{n+1} < 1 \times 10^{-4}$ 满足。

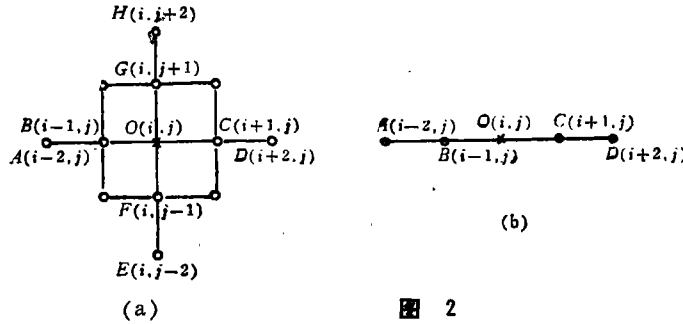


图 2

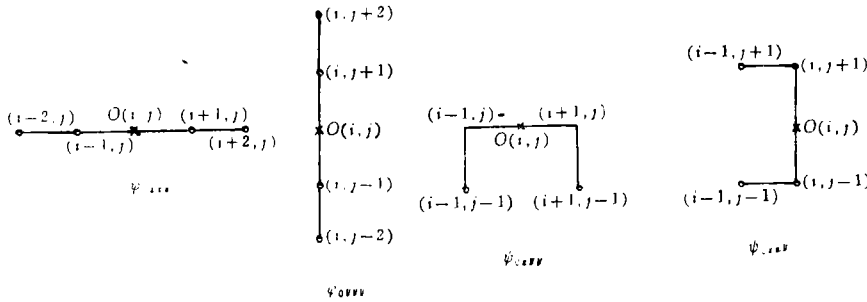


图 3

为了检验计算程序正确可靠,使计算结果准确无误,我们引进满足边界条件的已知检验函数 $T$ 检和 $\phi$ 检,

$$T_{\text{检}} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$\phi_{\text{检}} = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \tag{3.15}$$

首先算出检验函数在场内各节点上的数值,然后求出 $T$ 检和 $\phi$ 检的各阶偏导数,并代入方程(3.8)和(3.9)中计算 $T$ 和 $\phi$ 值,再将 $T$ 、 $\phi$ 值与 $T$ 检、 $\phi$ 检值在每个节点上进行比较,使每个点的相对误差小于 $1 \times 10^{-3}$ 。由此,用已知函数 $T$ 检和 $\phi$ 检来检验计算程序,以保证计算结果正确无误。

### 四、计算结果及其讨论

由运动方程(2.8)可见,产生对流运动的作用力来自方程中 $\nabla \times T_j$ 这一项。如果预先给定某一个水平方向的温度梯度,由此将导致流体向上浮动,浮动的方向与重力方向相反。水平方向的温度梯度越大,流体运动就越不均匀。如果预先给定的是某一个垂直方向的温度分布,当瑞利数 $R_a = \rho_r G_r$ 超过某个临界值时,流体运动状态就不稳定。

计算结果绘制成关于 $T$ 的等温线图(图4a, b, c)和关于 $\phi$ 的等势线图(图5a, b, c)。

图4(a)是 $T_0$ 的等温线分布图,由图可见, $T_0$ 是关于 $x$ 轴反对称而关于 $y$ 轴对称的等温线。图4(b, c)是当 $G_r = 100$ 和 $G_r = 1000$ 时的等温线分布图。而图5(b, c)是 $G_r = 100$ 和 $G_r = 1000$ 时的等势线分布图。

由如上流体流经一无限长封闭方柱,方柱边界上维持一线性温度分布,而引起的自然对

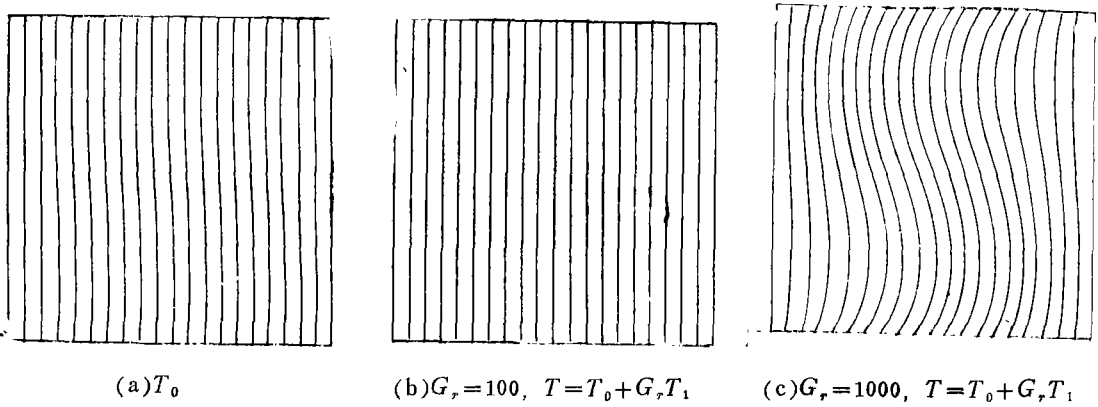


图 4

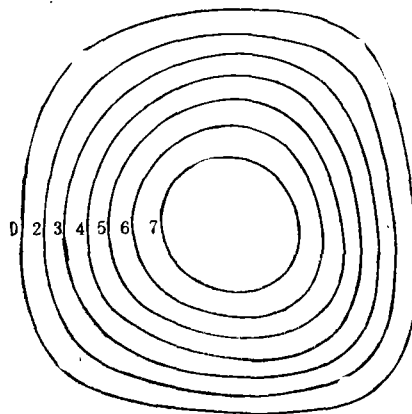
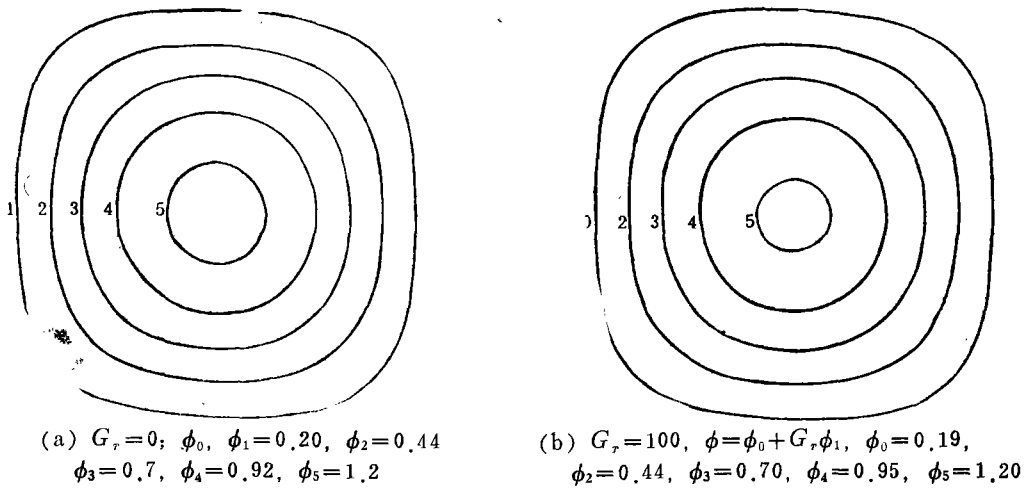


图 5

流所描绘的等温线和等势线的分布可见，一阶量 $\phi_1$ 和 $T_1$ 对于对流运动的影响。这种一阶量对于零阶量的修正是使得流体的温度和速度的分布不均匀。这种不均匀性是由于对流的非线性效应和 $\phi$ 与 $T$ 的弱耦合效应共同产生的影响。

如果将图5 (b) 与图5 (c) 进行比较，会发现参数 $G_r, P_r$ 越大，对流体流动的影响就

越大。这是因为，当流体的导热性小时，流体温度的不均匀性就增加，由此会引起流体更显著的对流运动。所以，必须调整各物理参数，使得 $G_r$ 和 $P_r$ 保持适中，既使流体的质量输运过程较快，又使流体的运动较均匀。

最后将近似方法计算的结果与S. J. Robertson<sup>[5]</sup>的结果进行比较，我们发现流动模型在定性上是完全一致的。由此，我们可以相信近似方法正确地简化了复杂的流体运动的物理问题，而且可望把此方法推广运用到三维问题上去。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Stark, J.A., R.D. Bradshaw and M.H. Blatt, Low-G fluid behavior technology summaries, NASA CR-134746, General Dynamics Convair Div., San Diego, Calif. (1974 a).
- [ 2 ] Stark, J.A., M.H. Blatt, F.O. Bennett and B.J. Campbell, Fluid management systems technology summaries, NASA CR134748, General Dynamics Convair Div., San Diego, Calif. (1974 b).
- [ 3 ] Ostrach, S., Low-G fluid flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 14 (1982), 313—345.
- [ 4 ] 李家春, 微重力下小Grashof数自然对流的近似理论, 中国科学, A辑32(5)(1989).
- [ 5 ] Robertson, S.J. and L.W. Spradley, Effect of enclosure shape on natural convection velocities in microgravity, *Acta Astronautica*, 13(11)/(12)(1986), 727—733.

## Natural Convection in an Infinite Square under Low-Gravity Conditions

Ma Yun-li

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

### Abstract

In order to study natural convection effects on fluid flows under Low-gravity in space, we have expanded variables into a power series of Grashof number by using perturbation theory to reduce the Navier-Stokes equations to the Poisson equation for temperature  $T$  and biharmonic equation for stream function  $\phi$ . Suppose that a square infinite closed cylinder horizontally imposes a specified temperature of linear distribution on the boundaries, we investigate the two dimensional steady flows in detail. The results for stream function  $\phi$ , velocity  $u$  and temperature  $T$  are gained. The analysis of the influences of some parameters such as Grashof number  $G_r$  and prandtl number  $P_r$  on the fluid motion lead to several interesting conclusions. Finally, we make a comparison between two results, one from approximate equations, the other from the original version. It shows that the approximate theory correctly simplifies the physical problem, so that we can expect the theory will be applied to unsteady or three-dimensional cases in the future.

**Key words** low-gravity, natural convection, Grashof number