 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 另一类非完整力学系统的Lagrange方程

高普云　郭仲衡

（湘潭师范学院数学系）　（北京大学数学系）

（1990年10月24日收到）

**摘　要**

用文[1]的方法，导出另一类一阶非完整力学系统不带乘子的 Lagrange 方程。这种形式的方程也是新的。

**关键词**　非完整力学　Lagrange方程　变分原理

本文是[1]的姊妹篇。用相同方法推导出另一类一阶非线性非完整系统不带乘子的Lagrange方程。这种形式的方程本质上不同于各种流行方程。

设$q_1$，$q_2$，…，$q_n$是系统的广义坐标。系统有$k$个独立的一阶非线性非完整约束。不同于[1]，考虑的约束可表为

$$f_i(q_{k+1},\cdots,q_n;\dot q_1,\cdots,\dot q_n)=0\qquad(i=1,\cdots,k)\tag{1}$$

且满足

$$\Delta=\frac{D(f_1,\cdots,f_k)}{D(\dot q_1,\cdots,\dot q_k)}\neq 0$$

根据隐函数定理，从约束方程(1)可解出

$$\dot q_i=\varphi_i(q_{k+1},\cdots,q_n;\dot q_{k+1},\cdots,\dot q_n)\qquad(i=1,\cdots,k)\tag{2}$$

并且有

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}=-\frac{1}{\Delta}\,\frac{D(f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_k)}{D(\dot q_1,\cdots,q_j,\cdots,\dot q_k)}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot q_j}=-\frac{1}{\Delta}\,\frac{D(f_1,\cdots,f_i,\cdots,f_k)}{D(\dot q_1,\cdots,\dot q_j,\cdots,\dot q_k)}$$

其中$i=1$，…，$k$；$j=k+1$，…，$n$。(2)告诉我们，$q_{k+1}$，…，$q_n$是系统的独立变分变量。从(2)有

$$q_i(t)=q_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varphi_i(q_{k+1},\cdots,q_n;\dot q_{k+1},\cdots,\dot q_n)d\tau\qquad(i=1,\ \cdots,\ k)$$

于是，在$\delta\boldsymbol{q}(t_0)=0$条件下(见[2])，有等时变分

$$\delta q_i=\int_{t_0}^{t}\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j\right)d\tau\qquad(i=1,\ \cdots,\ k)\tag{3}$$

变分原理认为：力学系统从时刻$t_0$到时刻$t_1$的一切可能运动中，真实运动使Hamilton作

用量

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)dt$$

取极值，其中$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)$是系统的Lagrange函数．于是，在$\delta\boldsymbol{q}(t_0)=\delta\boldsymbol{q}(t_1)=0$ 的 条 件下，利用$d$-$\delta$运算的交换性，我们有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\mathscr{E}_i(L)\delta q_i dt \tag{4}$$

其中Euler算子

$$\mathscr{E}_i:=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}$$

将(3)代入(4)，有

$$-\delta\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}};t)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\mathscr{E}_i(L)\int_{t_0}^{t}\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)d\tau+\sum_{j=k+1}^{n}\mathscr{E}_j(L)\delta q_j\right]dt$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)d\tau d\left(\int_{t_0}^{t}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right)+\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}_j(L)\delta q_j dt\right\}$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)d\tau\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\int_{t_0}^{t}\mathscr{E}_i(L)d\tau dt\right]+\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}_j(L)\delta q_j dt\right\}$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau dt+\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}_j(L)\delta q_j dt\right\}$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau+\mathscr{E}_j(L)\right]\delta q_j dt+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\delta\dot{q}_j dt\right\}$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau+\mathscr{E}_j(L)\right]\delta q_j dt\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right)\delta q_j dt\right\}$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial \dot{q}_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right)+\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\int_{t}^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau+\mathscr{E}_j(L)\right]\right\}\delta q_j dt$$

变分原理要求，

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q};t)dt=0$$

对独立变量的任何变分$\delta q_{k+1},\cdots,\delta q_n$成立，因此有

$$\mathscr{E}_j(L)-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\int_t^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\int_t^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right]=0 \qquad (j=k+1,\cdots,n) \tag{5}$$

或

$$\mathscr{E}_j(L)+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\mathscr{E}_i(L)-\mathscr{E}_j(\varphi_i)\int_t^{t_1}\mathscr{E}_i(L)d\tau\right]=0 \qquad (j=k+1,\cdots,n) \tag{6}$$

这就是满足条件(1)的非完整系统的不带乘子的Lagrange方程。

如果系统所受的力不是有势的，在$d$-$\delta$运算可交换的条件下，其 Hamilton 原理（参阅[3]67页）为

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta' A)dt=0 \tag{7}$$

其中$T$是动能，

$$\delta' A=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i$$

$Q_i(i=1,\cdots,n)$是广义力。(7)式也可以改写为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{E}_i(T)-Q_i)\delta q_i dt=0 \tag{8}$$

同样，我们可以从(8)推导出满足条件(1)的非完整系统的不带乘子的Lagrange方程

$$\mathscr{E}_j(T)-Q_j-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\int_t^{t_1}(\mathscr{E}_i(T)-Q_i)d\tau\right)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\int_t^{t_1}(\mathscr{E}_i(T)-Q_i)d\tau\right]=0$$

$$(j=k+1,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

$$\mathscr{E}_j(T)-Q_j+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}(\mathscr{E}_i(T)-Q_i)-\mathscr{E}_j(\varphi_i)\int_t^{t_1}(\mathscr{E}_i(T)-Q_i)d\tau\right]=0$$

$$(j=k+1,\ \cdots,\ n) \tag{10}$$

有不少属于类型(1)的系统，下面讨论两个。

**例1** 一质点受有速度大小为常量的非完整约束

$$\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2=C^2=\text{const}$$

试对下面两种情况描述质点的运动。

(i) 质点不受外力作用。此时Lagrange函数为

$$L=m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)/2 \qquad (m\text{为质点质量})$$

从约束方程可解出

$$\dot{q}_1=\pm\sqrt{C^2-\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2},$$

这里$q_2$，$q_3$是系统独立变分的变量。

容易得出

$$\mathscr{E}_i(L)=m\ddot{q}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial\dot{q}_2}=-\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1},\qquad \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial\dot{q}_3}=-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1},\qquad \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_3}=0$$

将上列各式代入(5)，得

$$\ddot{q}_2+\frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}\int_t^{t_1}\ddot{q}_1 d\tau\right)=0,\quad \ddot{q}_3+\frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}\int_t^{t_1}\ddot{q}_1 d\tau\right)=0$$

化简得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}\right)=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}\right)=0$$

于是

$$\dot{q}_2=\alpha\dot{q}_1,\qquad \dot{q}_3=\beta\dot{q}_1$$

把这两方程与约束方程联立可解得

$$\dot{q}_i=C_i=\text{const} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$q_i=C_i t+D_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

其中$C_i$，$D_i$为任意常数。这与文[1]的结论一致，也与质点在没有外力作用的情况下，或者处于静止状态，或者作匀速直线运动的结论一致。

(ii) 质点只受重力作用。此时广义力为

$$Q_1=Q_2=0,\qquad Q_3=-mg$$

系统的动能为

$$T=m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)/2$$

于是

$$\mathscr{E}_i(T)=m\ddot{q}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

应用(9)，得质点的运动方程

$$\ddot{q}_2+\frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}\int_t^{t_1}\ddot{q}_1 d\tau\right)=0,\qquad \ddot{q}_3+g+\frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}\int_t^{t_1}\ddot{q}_1 d\tau\right)=0$$

简化得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}\right)=0,\qquad g+\dot{q}_1(t_1)\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}\right)=0$$

于是

$$\dot{q}_2=\alpha\dot{q}_1,\qquad \dot{q}_3=(\gamma t+\beta)\dot{q}_1,\qquad \gamma=-g/\dot{q}_1(t_1)$$

把这两个方程与约束方程联立可得

$$\begin{cases}\dot{q}_1=\dfrac{C^2}{\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}}\\[2ex] \dot{q}_2=\dfrac{\alpha C^2}{\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}}\\[2ex] \dot{q}_3=\dfrac{(\gamma t+\beta)C^2}{\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}}\end{cases}$$

解这方程组得

$$\begin{cases}q_1=(C^2/\gamma)\ln[(\gamma t+\beta)+\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}\,]+D_1\\ q_2=(\alpha C^2/\gamma)\ln[(\gamma t+\beta)+\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}\,]+D_2\\ q_3=(C^2/\gamma)\sqrt{(\gamma t+\beta)^2+(1+\alpha^2)}+D_3\end{cases}$$

这里$\alpha$，$\beta$，$D_1$，$D_2$，$D_3$是任意常数。

**例2** Appell-Hamel例子（参阅[3]91—93页）

系统的约束方程为

$$\dot{z}^2=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)b^2/a^2$$

系统的Lagrange函数为

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/2-mgz$$

于是

$$\mathscr{E}_x(L)=m\ddot{x},\quad \mathscr{E}_y(L)=m\ddot{y},\quad \mathscr{E}_z(L)=m\ddot{z}-mg$$

$$\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{x}}=\frac{b^2}{a^2}\frac{\dot{x}}{\dot{z}},\qquad \frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{y}}=\frac{b^2}{a^2}\frac{\dot{y}}{\dot{z}},\qquad \frac{\partial\dot{z}}{\partial x}=\frac{\partial\dot{z}}{\partial y}=0$$

将上列各式代入(5)，得系统的运动方程

$$\begin{cases}\ddot{x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\dot{x}}{\dot{z}}\displaystyle\int_t^{t_1}(\ddot{z}-g)d\tau\right)=0\\[2ex] \ddot{y}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\dot{y}}{\dot{z}}\displaystyle\int_t^{t_1}(\ddot{z}-g)d\tau\right)=0\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}(1+b^2/a^2)\dot{x}\dot{z}-(\alpha+gt)\dot{x}b^2/a^2=C_1\dot{z}\\ (1+b^2/a^2)\dot{y}\dot{z}-(\alpha+gt)\dot{y}b^2/a^2=C_2\dot{z}\end{cases}$$

其中$\alpha=\dot{z}(t_1)-g$。从这两方程容易得到

$$C_1\dot{z}\dot{y}=C_2\dot{z}\dot{x}$$

由此

$$C_1\dot{y}=C_2\dot{x},\quad \dot{y}=C\dot{x}$$

从而

$$y-y_0=C(x-x_0)$$

这里$x_0$，$y_0$是初值。

把$\dot{y}=C\dot{x}$代入约束方程，得

$$\dot{z}=\sqrt{1+C^2}\,\dot{x}b/a$$

从而

$$z-z_0=\sqrt{1+C^2}\,(x-x_0)b/a$$

于是

$$\sqrt{1+C^2}\,(x-x_0)=(y-y_0)\sqrt{1+C^2}/C=(z-z_0)a/b$$

可见，质点的运动轨迹是直线，与[3]的结论一致，但得到这个方程的途径是完全不同的。

## 参 考 文 献

[1] 高普云、郭仲衡，一类非完整力学系统的Lagrange方程，应用数学和力学，**12**(5)(1991).

[2] 郭仲衡、高普云，关于经典非完整力学，力学学报，**22**(2)(1990)，185—190.

[3] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，北京(1985).

# Lagrange Equation of Another Class of Nonholonomic Systems

Gao Pu-yun

(*Dept. of Math., Xiangtan Normal School, Hunan*)

Guo Zhong-heng

(*Dept. of Math., Peking University, Beijing*)

**Abstract**

Using the method of [1], the present paper derives the Lagrange equation without multipliers for another class of first-order nonholonomic dynamical systems by means of variational principle. This kind of equations is also new.

**Key words** nonholonomic dynamics, Lagrange equation, variational principle