应用数学和力学，第12卷第8期(1991年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

局部凸Hausdorff空间内凝聚选择映象的极大元*

丁协平

(四川师范大学数学系，1990年10月31日收到)

摘　要

在本文内，局部凸 Hausdorff 空间中凝聚选择映象极大元的两个存在性定理被证明，推广 Mehta 的最近结果。其中一个定理肯定地解答了 Mehta 提出的待解决的问题。

关键词　拓扑矢量空间　凝聚选择映象　极大元

一、引　言

令D是拓扑矢量空间的一非空子集，2^D表D的一切子集的族，则D上的每一二元关系P产生一多值映象$P(x)=\{y\in D:(x,y)\in P\}$。我们称多值映象$P:D\to 2^D$为一选择映象，如果它来自$D$上的一二元关系$P$，因此$y\in P(x)$，$x\in D$当且仅当$(x,y)\in P$。此二元关系可解释为选择对象集$D$上的一个选择关系。称点$x\in D$是选择映象$P$的极大元，如果$P(x)=\phi$。

极大元的存在性定理在数学经济中有重要应用。例如在不具有有序选择的一般平衡理论的最近工作中，在抽象经济或定性对策中平衡点的存在性通常按下列方式被证明：首先在 Hausdorff 拓扑矢量空间的子集上构造一选择映象P，然后证明存在一点x_0使得$P(x_0)=\phi$。例如见 Aliprantis-Brown[1]，Gale和Mas-Colell[4]，Sonnenschein[12]，Borglin 和 Keiding[3]，Border[2]，Walker[17]，Tulcea[15,16]和Toussaint[14]。在这些工作中都假设了选择映象定义在有限维笛卡尔空间或 Hausdorff 拓扑矢量空间的一紧凸子集上。

最近 Mehta[8,9]对 Banach 空间内的严格集压缩选择映象和凝聚选择映象证明了某些极大元存在性定理。这类选择映象的经济意义在[9]被解释(也见 Mehta[7,第七章])。Mehta[9,注2]指出他不知道他的定理能否推广到拓扑矢量空间，得到这些推广将是有趣的。

在本文中，我们将给出 Mehta 在[9]中提出的公开问题的一个肯定的解答。

二、预 备 知 识

令E是一局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间和D是E的非空子集。我们将分别用$\mathrm{int}(D)$，$\mathrm{co}(D)$和$\overline{\mathrm{co}}(D)$表$D$的内部，凸包和闭凸包。

* 国家自然科学基金资助项目。

我们将需要由 Petryshyn 和 Fitzpatrick 在[10]中引入的下列概念.

定义2.1 令C是具有极小元0的一格. 称映象$\Phi: 2^D \to C$是Φ 非紧性测度, 如果对 $K\subset D$ 和$B\subset D$下列性质成立:

(i) $\Phi(\overline{\mathrm{co}}(K))=\Phi(K)$;

(ii) $\Phi(K)=0$当且仅当K是相对紧的;

(iii) $\Phi(K\cup B)=\max\{\Phi(K),\ \Phi(B)\}$.

由此立即可得如果$K\subset B$, 则$\Phi(K)\leqslant\Phi(B)$.

此非紧性测度概念首先出现在 Sadovskii 的文章[11]中, 他从由 Kuratowski[6] 引入的集非紧性测度和在[5]中引入的球非紧性测度中抽出了这一概念. 后两个概念仅定义在度量空间上且集C是具有通常序的有向集$R^+=\{r\in R: r\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$, 在局部凸拓扑矢量空间内, 由 Petryshyn 和 Fitzpatrick[10]引入的χ-非紧性测度和γ-非紧性测度都是定义2.1内的Φ-非紧性测度的特例.

定义2.2 令Φ是E上的Φ-非紧性测度, 称多值选择映象$P: D\to 2^E$是Φ-凝聚的, 如果对一切非相对紧集$K\subset D$, $\Phi(P(K))\not\geqslant\Phi(K)$. 在$C=R^+$时, 上述条件化归对一切非相对紧集$K\subset D$, $\Phi(P(K))<\Phi(K)$.

三、极 大 元

为证明主要定理, 我们将需要下面引理.

引理3.1 令E是局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间和D是E 的一非空闭凸子集. 假设$T: D\to 2^D$是一Φ-凝聚映象. 则存在D的一非空紧凸子集K使得$T: K\to 2^K$.

证明 我们用归纳法定义一超限序列$\langle K_\alpha\rangle$ 如下: 令 $K_0=\overline{\mathrm{co}}(T(D))$. 假设 α 是一序数使得对任何$\beta<\alpha$, K_β已有定义. 如果α 是第一类序数, 令 $K_\alpha=\overline{\mathrm{co}}(T(K_{\alpha-1}))$; 如果 α 是第二类序数, 令$K_\alpha=\bigcap\limits_{\beta<\alpha}K_\beta$.

容易看出$\langle K_\alpha\rangle$有下列性质:

(1) 对每一序数α, $T(K_\alpha)\subset K_\alpha$;

(2) 每一K_α是闭凸集且对$\alpha\geqslant\beta$有$K_\alpha\subseteq K_\beta$.

因为超限序列$\langle K_\alpha\rangle$是非增的; 存在一序数γ使得$K_\gamma=K_{\gamma+1}$, 且因此$K_\gamma=K_\beta$对一切 $\beta\geqslant\gamma$ 成立. 定义$K=K_\gamma$. 则显然有$T(K)\subset K$, 事实上我们有

$$\overline{\mathrm{co}}\,(T(K))=K \tag{*}$$

余下需证明K是紧的. 由定义2.1的条件(i)和(*)式, 有

$$\Phi(K)=\Phi(\overline{\mathrm{co}}(T(K)))=\Phi(T(K))$$

从T是Φ-凝聚映象的假设推得K是一相对紧集. 又由K是闭集知K是紧集, 证毕.

注 引理3.1推广 Mehta[9]的引理到局部凸 Hausdorff 空间.

现在我们证明下列极大元的存在性定理.

定理3.1 令E是局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间和D是E的非空闭凸子集. 假设 $P: D\to 2^D$是一多值选择映象使得

(a) 对每一$x\in D$, $x\notin\mathrm{co}(P(x))$;

(b) 对每一使得$P(x)\neq\phi$的$x\in D$, 存在$y\in D$使得 $x\in\mathrm{int}(P^{-1}(y))$ 其中 $P^{-1}(y)=\{x\in D: y\in P(x)\}$;

(c) P是Φ-凝聚的.

则P在D内存在极大元.

证明 假设结论不真，则对每一$x\in D$，$P(x)\neq\phi$. 由引理3.1，存在一非空紧凸集$K\subset D$使得$P:K\to 2^K$. 对每一$x\in K$，由$T(x)=\mathrm{co}(P(x))$定义映象$T:K\to 2^K$. 显然每一$T(x)$是非空凸集.

其次我们证明对每一$x\in K$，存在$y\in K$使得在K的相对拓扑下$x\in\mathrm{int}(T^{-1}(y))$. 令$x\in K$任意给定. 因$P(x)\neq\phi$，条件(b)蕴含存在$y\in D$使得$x\in\mathrm{int}(P^{-1}(y))$. 因为$P(x)\subset\mathrm{co}(P(x))=T(x)$对每一$x\in D$成立，所以$\mathrm{int}(P^{-1}(y))\subset\mathrm{int}(T^{-1}(y))$，其中此内部是相对于$D$的内部. 因此$x\in T^{-1}(y)$蕴含$y\in T(x)\subset K$. 所以对每一$x\in K$，存在$y\in K$使得$x\in\mathrm{int}(T^{-1}(y))$，其中此内部是相对于$D$的内部. 由此推得存在$x$在$D$内的一开邻域$U$使得$U\subset T^{-1}(y)$，这蕴含$U\cap K$在$K$内是开的并且$x\in U\cap K\subset T^{-1}(y)$在$K$内的内部，这就证明了对每一$x\in K$，存在$y\in K$使得$x\in\mathrm{int}(T^{-1}(y))$在$K$的相对拓扑下成立.

因此 Tarafdar[13]的一个不动点定理的一切条件被满足，且因此存在一点$x^*\in K\subset D$使得$x^*\in T(x^*)=\mathrm{co}(P(x^*))$. 这与假设(a)矛盾. 因此定理3.1的结论成立.

注 定理3.1改进和推广了 Mehta[8]的定理1和Mehta[9]的定理到局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间. 定理3.1也肯定地解答了由 Mehta 在[9,注2]中提出的尚未解决的问题. 我们也容易推广Mehta[8]的定理3到Φ-凝聚映象和局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间. 我们省去.

由应用 Mehta[8,定理4]，我们容易得到 Mehta[8]的定理5的下面推广.

定理3.2 令D是局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间E的非空闭凸子集. 假设选择映象$P:D\to 2^D$满足下列条件:

(a) P是非周期的，即是如果对$i=1,\cdots,n$，$x_{i+1}\in P(x_i)$，则，$x_1\notin P(x_{n+1})$;

(b) 对每一$x\in D$使得$P(x)\neq\phi$，存在$y\in D$使得$x\in\mathrm{int}(P^{-1}(y))$在$D$内成立;

(c) P是Φ-凝聚的;

则P在D内存在极大元.

证明 假设结论不成立，则对每一$x\in D$，$P(x)\neq\phi$. 应用定理3.1的证明中相同的论证，我们能证明存在一非空紧凸集$K\subset D$使得$P:K\to 2^K$和对每一$x\in K$，存在$y\in K$使得$x\in\mathrm{int}(P^{-1}(y))$，其中$\mathrm{int}(P^{-1}(y))$是$P^{-1}(y)$在$K$的相对拓扑下的内部. 显然 Mehta[8]的定理4中一切条件均被满足. 因此存在$x^*\in K\subset D$使得$P(x^*)=\phi$. 这一矛盾证明了定理3.2的结论成立.

注 定理3.2推广了 Mehta[8]的定理5到Φ-凝聚选择映象和局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间.

参 考 文 献

[1] Aliprantis, C. D. and D. Brown, Equilibria in markets with a Riesz space of commodities, *J. Math. Econom.*, 11 (1983), 189—207.

[2] Border, K., *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge Univ. Press, London (1985).

[3] Borglin, A. and H. Keiding, Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the new existence theorems, *J. Math. Econom.*, 3 (1976), 313—316.

[4] Gale, D. and A. Mas-Colell, An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences, *J. Math. Econom.*, 2 (1975), 9—15.

[5] Gohberg, I. C., L. S. Gol′denstein and A. S. Markus, Investigations of some

properties of bounded linear operators with their q-norms, *Kisinev, Gos. Univ. Ucen. Zap.*, **29** (1957), 29—36.

[6] Kuratowski, C., Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, **15** (1930), 301—309.

[7] Mehta, G., *Topological Methods in Equilibrium Analysis*, Univ. of Queensland, St. Lucia (1987).

[8] Mehta, G., Maximal elements in Banach spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **20** (1989), 690—697.

[9] Mehta, G., Maximal elements of condensing preference maps, *Applied Math. Letters*, Ed. I. Ekeland. (to appear)

[10] Petryshyn, W. V. and P. M. Fitzpatrick, A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194** (1974), 1—25.

[11] Sadovskii, B. N., Measures of noncompactness and condensing operators, *Problemy Mat. Anal. Sloz. Sistem*, **2** (1968), 89—119.

[12] Sonnenschein, H., Demand theory without transitive preferences with applications to the theory of competitive equilibrium, *Preferences, Utility and Demand*, Eds. J. Chipman et al., Harcourt, Brace Jovanovich, New York (1971).

[13] Tarafdar, E., On nonlinear variational inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **67** (1977), 95—98.

[14] Toussaint, S., On the existence of equilibriums in economies with infinitely many commodities and without ordered preferences, *J. Econom. Theory*, **33** (1984), 98—115.

[15] Tulcea, C. I., On the equilibriums of generalized games, The Center for Math. Studies in Economics and Managment Science, Paper No. 699 (1986).

[16] Tulcea, C. I., On the approximation of upper semi-continuous correspondences and the equilibriums of generalized games, *J. Math. Anal. Appl.*, **136** (1988), 267—289.

[17] Walker, M., On the existence of maximal elements, *J. Econom. Theory*, **16** (1977), 470—474.

Maximal Elements of Condensing Preference Maps in Locally Convex Hausdorff Spaces

Ding Xie-ping

(*Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

Two existence theorems of maximal elements of condensing preference maps in locally convex Hausdorff spaces are proved which generalize the recent results of Mehta. One of them positively answers the open problem mentioned by Mehta.

Key words topological vector space, condensing preference map, maximal element