应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0072_05

一般形式的一阶椭圆组的非线性 Riemann 问题*

李明忠[1], 宋 洁[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436;
2. 华东理工大学 数学系, 上海 200237)

(我刊编委江福汝推荐)

摘要: 讨论一般形式的一阶线性和拟线性椭圆型方程的非线性 Riemann 问题, 通过把这些问题转化为奇异积分方程, 利用压缩原理和广义压缩原理来证明在某些假设条件下所讨论问题的解的存在性•

关 键 词: Riemann 问题; 椭圆型方程; 奇异积分方程
中图分类号: O175; O231 文献标识码: A

引 言

弹性力学和机械工程中的许多实际问题可以转化为一阶或二阶椭圆组的边值问题, 很多学者以及本作者对它们进行了讨论[1~6]•

本文, 我们进一步讨论一般形式的一阶线性和拟线性椭圆型方程的非线性 Riemann 问题•

1 线性方程的非线性 Riemann 问题

设 G^+ 是复平面 E 上由有限条封闭的不相交曲线 $\Gamma_k \in C^{1,\alpha}(k = 0, \cdots, m)$, 围成的有界多连通区域, Γ_0 把所有的 Γ_k 包含在它的内部• 用 G_k^-, $k = 0, \cdots, m$ 来表示 G^+ 在 E 内的补集, G_0^- 是无界的, $G^- = \bigcup_{k=0}^{m} G_k^-$• 定义逆时针方向为 Γ_0 的正方向, 对其它的 Γ_k 顺时针方向是正方向• 如果 $w(z)$ 是定义在 E_Γ 上的函数, $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m}\Gamma_k$, 对 $t \in \Gamma$ 用 $w^+(t)$ 表示 $w(z)$ 当 z 从 G^+ 内部趋于 t 时的值, 用 $w^-(t)$ 表示 $w(z)$ 当 z 从 G^- 内部趋于 t 时的值•

复表面 E 上的任意线性一阶椭圆型方程组都可以化为下面的复形式:

$$\partial w/\partial z - q_1(z)(\partial w/\partial z) - q_2(z)\partial w/\partial z + A(z)w + B(z)w = F(z)• \tag{1}$$

假设 A

1) $q_i(z)$ $(i = 1, 2)$ 是平面 E 上的有界可测函数, 在无穷远处为零, 并且满足下面的条件

* 收稿日期: 2002_12_29; 修订日期: 2004_10_08
基金项目: 上海市科委科技发展基金资助项目(01ZA14023)
作者简介: 李明忠(1935—), 男, 福州人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel/Fax: + 86_21_65115979; E_mail: mzhli@public8.sta.net.cn);
宋洁(1972—), 女, 河南人, 讲师, 博士(Tel: + 86_21_64108169; E_mail: songjie@ecust.edu.cn).

$$|q_1(z)|+|q_2(z)|\leqslant q_0<1 \qquad (z\in E); \tag{2}$$

2) $A(z), B(z)$ 和 $F(z)$ 属于 $L_{p,2}(E), p>2;$

3) $G(t)$ $(t\in\Gamma)$ 满足Hölder条件, $g(t,w)$ 对 $t\in\Gamma, |w|\leqslant M$($M$ 是一个充分大的正常数) 满足 Hölder_Lipschitz 条件

$$|G(t_1)-G(t_2)|\leqslant K_G|t_1-t_2|^{\beta}, \tag{3}$$

$$|g(t_1,w_1)-g(t_2,w_2)|\leqslant K_g[|t_1-t_2|^{\beta}+|w_1-w_2|], \tag{4}$$

其中 $K_G, K_g, \beta(1/2<\beta<1)$ 是常数.

我们考虑下面的非线性 Riemann 问题.

问题 R 在 $G^+\cup G^-$ 内寻找方程(1) 的解, 它在 $\overline{G^+}=G^+\cup\Gamma$ 和 $\overline{G^-}=G^-\cup\Gamma$ 内部Hölder连续, 关于 z 的偏导数属于 $L_{p,2}(E), p>2$, 在无穷远处为零, 并且在 Γ 上满足下面的跳跃条件

$$w^+(t)-G(t)w^-(t)=\mu g(t,w), \tag{5}$$

μ 是一个正的实常数.

定理 1 如果 $\kappa=\operatorname{Ind}G(t)\geqslant 0$, 在假设 A 下, 且当 $q_0, A_0=\|A(z)\|_{L_{p,2}}, B_0=\|B(z)\|_{L_{p,2}}, \mu$ 都取的足够小, 则问题R对任意给定的右端项 $F(z)\in L_{p,2}(E), p>2$ 都可解, 解依赖于 κ 次多项式而有唯一确定.

证明 令 $\rho=\partial w/\partial z\in L_{p,2}(E)$, 则有

$$w(z)=\Phi(z)+T\rho, \tag{6}$$

$T\rho=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_E\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$, Φ 是一个分块解析函数, 并且在 Γ 上满足下面的边界条件

$$\Phi^+(t)-G(t)\Phi^-(t)=[G(t)-1]T\rho+\mu g(t,\Phi+T\rho). \tag{7}$$

因为 $T\rho$ 在 E 内对任意的 $\rho(z)\in L_{p,2}(E), p>2$ 是连续的, 因此(参考文献[5])

$$\begin{aligned}\Phi(z)={}&\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[G(t)-1]T\rho+\mu g(t,\Phi+T\rho)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z)=\\&\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[G(t)-1]T\rho}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu g(t,\Phi+T\rho)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z)=\\&-\frac{X(z)}{\pi i}\iint_E\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[1-G(t)]\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)(t-\zeta)}\right)\rho(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\&\frac{\mu X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(t,\Phi+T\rho)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z),\end{aligned} \tag{8}$$

记

$$\theta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{[G(t)-1]\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)},\quad \Gamma_g=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(t,\Phi+T\rho)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t,$$

$$T_0\rho=T\rho+X[T(\theta\rho)-\theta T\rho],\quad \Gamma_g'=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(t,\Phi+T\rho)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t,$$

$$S\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

$$T_1\rho=X(z)[S(\theta\rho)-\theta(z)S\rho]+X'(z)[T(\theta\rho)-\theta(z)T\rho]-X\theta'T\rho,$$

$\Phi(z)$ 可以表示为

$$\Phi(z)=X[T(\theta\rho)-\theta T\rho]+\mu X(z)\Gamma_g+\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z), \tag{9}$$

因此

$$w(z)=\Phi(z)+T\rho+\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z)=T_0\rho+\mu X(z)\Gamma_g\sum_{j=0}^{k-1}a_jz^jX(z), \tag{10}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \rho,\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial z} = T_1 p + S\rho + \mu X'\Gamma_g + \mu X\Gamma_g' + \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j X'(z) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j j z^{j-1} X(z)\text{•}\end{cases} \tag{11}$$

把(10), (11) 代入(1) 可以得到关于未知密度 $\rho \in L_{p,2}(E)$ 的奇异积分方程

$$\rho - P\rho = f(z), \tag{12}$$

其中

$$P\rho = q_1 S\rho + q_2\overline{S\rho} + q_1 T_1\rho + q_2\overline{T_1\rho} - AT_0\rho - \overline{BT_0\rho} + \mu[q_1 X'\Gamma_g + q_1 X\Gamma_g' - AX\Gamma_g + q_2\overline{X'\Gamma_g} + q_2\overline{X\Gamma_g'} - B\overline{X\Gamma_g}]\text{•}$$

而 $f(x)$ 仅依赖于方程的右端项 $F(x)$ 和任意给定的多项式 $\sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j$, 同未知函数 $\rho(x)$ 无关•

首先考虑下面的齐次方程

$$\rho - P\rho = 0, \tag{13}$$

对 $\rho_1, \rho_2 \in L_{p,2}(E)$, 有

$$\begin{aligned}|P\rho_1 - P\rho_2| \leqslant{} & |q_1 S(\rho_1 - \rho_2)| + |q_2\overline{S(\rho_1 - \rho_2)}| + |q_1 T_1(\rho_1 - \rho_2)| + \\ & |q_2\overline{T_1(\rho_1 - \rho_2)}| + |AT_0(\rho_1 - \rho_2)| + |BT_0(\rho_1 - \rho_2)| + \\ & \mu[|q_1 X'(\Gamma_g(\rho_1) - \Gamma_g(\rho_2))| + |q_1 X(\Gamma_g'(\rho_1) - \Gamma_g'(\rho_2))| + \\ & |q_2\overline{X'(\Gamma_g(\rho_1) - \Gamma_g(\rho_2))}| + |q_2\overline{X(\Gamma_g'(\rho_1) - \Gamma_g'(\rho_2))}| + \\ & |AX(\Gamma_g(\rho_1) - \Gamma_g(\rho_2))| + |B\overline{X(\Gamma_g(\rho_1) - \Gamma_g(\rho_2))}|],\end{aligned}$$

所以

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_{L_{p,2}} \leqslant K_p \|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}}, \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}& K_P = q_0(\Lambda_p + K_1) + (A_0 + B_0)K_0 + \mu[q_0(L'H_g + LH_g') + (A_0 + B_0)LH],\\ & \Lambda_p = \|S\|_{L_{p,2}},\quad L = \sup_E |X(z)|,\quad L' = \sup_E |X'(z)|,\\ & |T_1(\rho_1 - \rho_2)| \leqslant K_1\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}},\quad |T_0(\rho_1 - \rho_2)| \leqslant K_0\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}},\\ & A_0 = \|A(z)\|_{L_{p,2}},\quad B_0 = \|B(z)\|_{L_{p,2}},\\ & |\Gamma_g(\rho_1) - \Gamma_g(\rho_2)| \leqslant H_g\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}},\quad |\Gamma_g'(\rho_1) - \Gamma'(\rho_2)| \leqslant H_g'\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}},\end{aligned}$$

如果 q_0, A_0, B_0 和 μ 都充分小, 有 $K_P < 1$, 即得方程(13) 只有零解, 而方程(14) 对于任意右端项 $f(z)$ 有唯一解• 定理 1 得证•

2 拟线性方程的非线性 Riemann 问题

现在我们考虑下面一阶拟线性方程的非线性 Rimann 问题

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q_1(z, w)\frac{\partial w}{\partial z} - q_2(z, w)\overline{\frac{\partial w}{\partial z}} + F(z, w) = 0\text{•} \tag{15}$$

假设对任意固定的 $M > 0$, 存在实常数 $q_0 = q_0(M) < 1$, 对 $z \in E$, $|w| \leqslant M$ 有下面的椭圆型条件

$$|q_1(z, w)| + |q_2(z, w)| \leqslant q_0 < 1\text{•} \tag{16}$$

假设 B

1) $q_i(z)$ $(i = 1, 2)$ 满足下面的条件

$$|q_i(z, w_1) - q_i(z, w_2)| \leqslant M_i |w_1 - w_2| \qquad (i = 1, 2)\text{•} \tag{17}$$

2) $F(z)$ 属于 $L_{p,2}(E)$, $p>2$ 并且满足

$$|F(z,w_1)-F(z,w_2)|\leqslant F_0(z)|w_1-w_2|,\quad F_0(z)\in L_{p,2}(E)\qquad (p>2),\tag{18}$$

3) $G(t)$ $(t\in\Gamma)$ 满足 Hölder 条件, $g(t,w)$ $(t\in\Gamma,|w|\leqslant M(M$ 是充分大的正数)) 满足 Hölder_Lipschitz 条件, 即

$$|G(t_1)-G(t_2)|\leqslant K_G|t_1-t_2|^{\beta},\tag{3}$$

$$|g(t_1,w_1)-g(t_2,w_2)|\leqslant K_g[|t_1-t_2|^{\beta}+|w_1+w_2|]\cdot\tag{4}$$

定理 2　在假设 B 下, 当 $\chi=\mathrm{Ind}\,G(t)=0$ 时, 如果 $F(z,0)$, $F_0(z,0)$ 的 $L_{p,2}(E)$ 范数及 q_0, μ 都充分小, 则拟线型椭圆型方程 Riemann 问题有唯一解•

证明　类似于定理 1 的证明, 可得(10) 和(11), 把它们代入方程(15) 可得

$$\rho-P\rho=0,\tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}P\rho=\;&q_1(z,T_0\rho+\mu X\Gamma_g)(T_1\rho+S\rho+\mu X'\Gamma_g+\mu X\Gamma_g')+\\&q_2(z,T_0\rho+\mu X\Gamma_g)\overline{(T_1\rho+S\rho+\mu X'\Gamma_g+\mu X\Gamma_g')}+\\&F(z,T_0\rho+\mu X\Gamma_g),\end{aligned}$$

对 $\rho_1,\rho_2\in L_{p,2}(E)$, 有

$$\begin{aligned}|P\rho_1-P\rho_2|\leqslant&\sum_{i=1}^{2}|q_i(z,T_0\rho_1+\mu X\Gamma_g(\rho_1))-q_i(z,T_0\rho_2+\mu X\Gamma_g(\rho_2))|\times\\&|T_1\rho_1+S\rho_1+\mu X'\Gamma_g(\rho_1)+\mu X\Gamma_g'(\rho_1)|+\sum_{i=1}^{2}|q_i(z,T_0\rho+\mu X\Gamma_g)|\times\\&|T_1\rho_1-T_1\rho_2+S\rho_1-S\rho_2+\mu X'{}_g(\rho_1)-\mu X'{}_g(\rho_2)+\mu X{}_g'(\rho_1)-\\&\mu X{}_g'(\rho_2)|+|F(z,T_0\rho_1+\mu X\Gamma_g(\rho_1))-F(z,T_0\rho_2+\mu X\Gamma_g(\rho_2))|\cdot\end{aligned}\tag{20}$$

利用(17), (18), (3), (4) 和(20), 可得

$$\|P\rho_1-P\rho_2\|_{L_{p,2}}\leqslant K_P\|\rho_1-\rho_2\|_{L_{p,2}},\tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}K_P=\;&(M_1+M_2)(K_0+\mu LH_g)\times\\&(\Lambda_p\|\rho_1\|+K_1\|\rho_1\|+\mu L'H_g\|\rho_1\|+\mu L'\Gamma_g(0)+\mu LH_g'\|\rho_1\|+\\&\mu L\Gamma_g'(0)+q_0(\Lambda_p+K_1+\mu L'H_g+\mu LH_g')+\|F_0\|(K_0+\mu L'H_g)\cdot\end{aligned}\tag{22}$$

由 Riesz_Torin 定理知 Λ_p 关于 p 是连续的, 且 $\Lambda_2=1$, 对任意固定的常数 $M>0$ 存在 $\varepsilon(M)>0$, 使得

$$q_0(M)\Lambda_p<1,\quad 0<p-2\leqslant\varepsilon(M)\cdot\tag{23}$$

对固定的满足方程(23) 的 p, 可以找到数 $r>0$ 和 $\delta>0$, 满足下面的不等式

$$(K_0+\mu LH_g)r<M,\tag{24}$$

并且

$$\begin{aligned}\alpha=\;&(M_1+M_2)(K_0+\mu LH_g)\times\\&(\Lambda_p r+K_1r+\mu L'H_gr+\mu L'\Gamma_g(0)+\mu LH_g'r+\mu L\Gamma_g'(0))+\\&q_0(\Lambda_p+K_1+\mu L'H_g+\mu LH_g')+(K_0+\mu L'H_g)\delta<1\cdot\end{aligned}\tag{25}$$

在这里我们假设

$$\|F_0\|_{L_{p,2}}<\delta,\tag{26}$$

对于任意属于区域

$$S(0, r) = \left\{ \rho \in L_{p,2}(E): \|\rho\|_{L_{p,2}} < r \right\} \tag{27}$$

的 ρ_1、ρ_2, 由(21)、(22), (25)、(26)和(27)有

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_{L_{p,2}} \leqslant \alpha \|\rho_1 - \rho_2\|_{L_{p,2}}, \quad K_P \leqslant \alpha < 1. \tag{28}$$

对于零元素 $\theta = 0$, 有

$$P\theta = q_1(z, \mu X\Gamma_g)(\mu X'\Gamma_g + \mu X\Gamma_g') + q_2(z, \mu X\Gamma_g)(\overline{\mu X'\Gamma_g + \mu X\Gamma_g'}) + F(z, \mu X_g),$$

$$\|P\rho\|_{L_{p,2}} \leqslant q_0(\mu L'H_g + \mu LH_g') + \|F(z, \mu X\Gamma_g) - F(z,0)\|_{L_{p,2}} + \|F(z,0)\|_{L_{p,2}} \leqslant$$

$$q_0(\mu L'H_g + \mu LH_g') + \mu LH_g\|F_0(z)\|_{L_{p,2}} + \|F(z,0)\|_{L_{p,2}},$$

所以当 μ 及$F(z,0)$ 在 $L_{p,2}(E)$ 中的范数适当小时, 又有

$$\|P\theta\|_{L_{p,2}} < (1-\alpha)r \tag{29}$$

由此利用广义压缩原理, 同样可知方程(19) 在空间 $L_{p,2}(E)$ 中有唯一解 ρ.

而当 $x = \operatorname{Ind}G(t) > 0$ 时, 类似可得此问题同样有解, 并且解依赖于一个 k 次多项式.

[参 考 文 献]

[1] 宋洁, 李明忠. 双解析函数的线性和非线性 Riemann 边值问题[A]. 见: 程昌钧, 戴世强, 刘宇陆 主编. 现代数学和力学(Ⅷ)[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997, 533—538.

[2] Abduhamid Dzhuraev, Lasisa Kopp. On the Riemann problem for general first order elliptic systems in the plane[J]. Complex Variables, 1992, **18**(2): 109—118.

[3] Vekua I N. Generalized Analytic Functions[M]. Oxford: Pergamon, 1962.

[4] 李明忠, 温晓琴. 一般形式的一阶椭圆型偏微分方程组拟线性 Riemann_Hilbert 问题[J]. 数学年刊, A 辑, 2002, **23**(1): 13—20.

[5] 侯宗义, 李明忠, 张万国. 奇异积分方程理论及其应用[M]. 上海: 上海科技大学出版社, 1990.

[6] 李明忠, 侯宗义, 徐振远. 椭圆型方程组理论和边值问题[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1990.

[7] Wolfersdorf L V. A class of nonlinear Riemann_Hilbert problems for holomorphic functions[J]. Math Nachr, 1984, **116**(1): 89—107.

On the Nonlinear Riemann Problems for General First Elliptic Systems in the Plane

LI Ming_zhong[1], SONG Jie[2]

(1. Mathematics Department, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Mathematics Department, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, P. R. China)

Abstract: The nonlinear Riemann problem for general systems of two first order linear and quasi_linear equations in the plane are considered. It translates them to singular integral equations and proves the existence of the solution by means of contract principle or general contract principle. The known results are generalized.

Key words: Riemann problem; elliptic system; singular integral equation