应用数学和力学，第12卷第8期（1991年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘性阻尼线性振动系统的复模态特征值问题的一种新的矩阵摄动分析解法*

吕振华　冯振东　方传流

（吉林工业大学，1989年11月3日收到）

摘　要

本文提出了对粘性阻尼线性振动系统的复模态二次广义特征值问题进行高效近似求解的一种新的矩阵摄动分析方法，即先将阻尼矩阵分解为比例阻尼部分和非比例阻尼部分之和，并求得系统的比例阻尼实模态特征解；然后以此为初始值，将阻尼矩阵的非比例部分作为对其比例部分的小量修改，利用摄动分析方法简捷地得到系统的复模态特征值问题的近似解。这一新方法适用于振系阻尼分布不十分偏离比例阻尼情况的问题，因此对大阻尼（非过阻尼）振动系统也有效。这是它优于以前提出的基于无阻尼实模态特征解的类似摄动分析方法的重要特点。文中建立了复模态特征值和特征向量的二阶摄动解式，并通过算例证实了其有效性。此外还讨论了利用比例阻尼假定估计阻尼系统固有振动的复特征值的可行性。

关键词　振动分析　阻尼系统　复模态　二次特征值问题　矩阵摄动法

一、引　言

工程中的许多机械和结构振动系统都可被简化为具有粘性阻尼的多自由度线性振动分析模型，其复模态二次广义特征值问题的求解技术仍是振动工程界感兴趣的研究对象。文献[1]和[3]提出了基于小阻尼振动系统的无阻尼实模态特征值问题的解对其复模态特征值问题进行近似求解的矩阵摄动法，它对于一大类小阻尼线性系统的振动分析具有重要的实用价值。但对于振系阻尼较大的问题，尚缺乏类似的高效分析方法。本文将提出一种基于比例阻尼实模态特征解对一般粘性阻尼线性振动系统的复模态二次广义特征值问题进行高效近似求解的矩阵摄动分析方法。这一新方法的适用前提是振系阻尼分布比较接近于比例阻尼情况，而不受限于阻尼的量级(但过阻尼非振动情况应被排除在外)。因此，它对具有较大粘性阻尼的振动系统的复模态特征参数分析也是有效的。文中所给算例证实了这一点。此外，本文还通过一些实际算例继续讨论了用比例阻尼实模态的复特征值近似相应的复模态特征值的可行性，这是对文[3]中有关讨论的补充。

---

* 李骊推荐。1987年11月3日第一次收到。
本文的部分内容曾在"机器动力学及其工程应用国际会议"（1988.8.27—31，西安）上交流过。

二、预备理论[2]

考虑n自由度粘性阻尼线性振动系统的复模态二次广义特征值问题

$$(s_i^2M+s_iC+K)u_i=\{0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant 2n) \tag{2.1}$$

其中M，C和K分别为质量、阻尼和刚度矩阵，现设它们均为$n\times n$阶实对称方阵，且M阵正定，K阵和C阵半正定或正定，根据代数特征值理论，对于欠阻尼且复特征向量系不亏损的系统，复特征对(s_i,u_i)共有$2n$个且以复共轭对出现，本文只考虑这种情况，并记

$$\left.\begin{aligned} &s_i=\bar{s}_{n+i}=-\sigma_i+J\omega_{di}=-\xi_i\omega_{ci}+J(1-\xi_i^2)^{1/2}\omega_{ci} \\ &u_i=\bar{u}_{n+i}=x_i+Jy_i \qquad (J=\sqrt{-1}\ ;\ 1\leqslant i\leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中σ_i和ξ_i分别为复模态阻尼因子和阻尼比，ω_{di}和ω_{ci}分别为复模态阻尼固有振频和特征固有振频(均为圆频率)；x_i和y_i均为n维实向量．复特征向量系$\{u_i\}_{i=1}^{2n}$满足如下加权正交正规化条件

$$\left.\begin{aligned} &u_i^T((s_i+s_j)M+C)u_j=a_i\delta_{ij} \\ &u_i^T((s_i+s_j)K+s_is_jC)u_j=-s_i^2a_i\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant 2n) \tag{2.3}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$a_i=-4\omega_{di}=-4(1-\xi_i^2)^{1/2}\omega_{ci} \tag{2.4}$$

因此，n个线性独立的复特征向量$u_i(1\leqslant i\leqslant n)$张成一$n$维复向量空间$C^n$，并有关于任意$n$维复向量$u$的展开定理

$$u=\sum_{i=1}^{n}e_iu_i \tag{2.5}$$

$$e_i=u_i^T(s_iM+MU[s]U^{-1}+C)u/a_i \tag{2.6}$$

其中 $U=[u_1,u_2,\cdots,u_n]$，$[s]=\mathrm{diag}(s_1,s_2,\cdots,s_n)$

当不计振系阻尼时，方程(2.1)成为无阻尼实模态线性广义特征值问题

$$(s_{0i}^2M+K)u_{0i}=\{0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant 2n) \tag{2.7}$$

其解为

$$s_{0i}=\bar{s}_{0,n+i}=J\omega_{0i},\ \ u_{0i}=\bar{u}_{0,n+i}=(1+J)v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.8}$$

令$\lambda_i=-s_{0i}^2=\omega_{0i}^2$，方程(2.7)即成为它的经典形式

$$(K-\lambda_iM)v_i=\{0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.9}$$

这里，ω_{0i}即为振系的无阻尼固有振频，v_i为无阻尼固有振型实向量．实特征向量系$\{v_i\}_{i=1}^{n}$满足如下加权正交正规化条件

$$v_i^TMv_j=\delta_{ij},\ \ v_i^TKv_j=\omega_{0i}^2\delta_{ij} \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant n) \tag{2.10}$$

式(2.3)与(2.10)是相一致的．又若振系阻尼矩阵C具有在如下意义上的特殊形式C_0

$$v_i^TC_0v_j=2\sigma_{0i}\delta_{ij}=2\xi_{0i}\omega_{0i}\delta_{ij} \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant n) \tag{2.11}$$

则方程(2.1)成为所谓的比例阻尼实模态二次广义特征值问题

$$(s_{0i}^2M+s_{0i}C_0+K)u_{0i}=\{0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant 2n) \tag{2.12}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} s_{0i}&=\bar{s}_{0,n+i}=-\sigma_{0i}+J\omega_{d0i}=-\xi_{0i}\omega_{0i}+J(1-\xi_{0i}^2)^{1/2}\omega_{0i} \\ u_{0i}&=\bar{u}_{0,n+i}=(1+J)v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

这种比例阻尼实模态振动系统实际上一般并不存在，因此它只不过是一种理论上的概念。尽管如此，这种特殊形式的解析模态分析理论在数学处理方面的简明性一直受到重视，并在许多工程振动问题的计算分析中起到了重要作用。下面将要给出的求解问题(2.1)的矩阵摄动法，是又一个受益于比例阻尼模态分析理论的成功实例。

三、粘性阻尼复模态特征值问题的矩阵摄动新解法

如前所述，对于一般粘性阻尼线性振动系统，虽有式(2.10)，但式(2.11)一般并不成立，即有

$$\left.\begin{aligned} M_N&=V^TMV=I_n \ (n\text{阶单位阵}) \\ C_N&=V^TCV=C_{N0}+\Delta C_N \\ K_N&=V^TKV=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中 $V=[v_1,\cdots v_n]$

$$C_{N0}=\mathrm{diag}(c_{N11},\cdots,c_{Nnn}),\ \ \Delta C_N=C_N-C_{N0} \tag{3.2}$$

若令 $$C_0=V^{-T}C_{N0}V^{-1}=MVC_{N0}V^TM,\ \ \Delta C=C-C_0 \tag{3.3}$$

则可知C_0是C中满足比例阻尼条件(2.11)的部分，而ΔC则为C中不满足比例阻尼条件的部分。将方程(2.1)中的C改记为$C_0+\Delta C$，并略去ΔC，即给出比例阻尼实模态特征值问题(2.12)，其解(2.13)可通过求解线性实特征值问题(2.9)而简单地得到，其中

$$\sigma_{0i}=\xi_{0i}\omega_{0i}=c_{Nii}/2 \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.4}$$

如果矩阵C_N是主对角占优的，即ΔC_N的元素相对于C_{N0}的主对角元均为小量(按绝对值)，则ΔC将按模小于甚至远小于C_0。因此，若将ΔC作为对C_0的一个小量修改，则可从比例阻尼实模态特征值问题(2.12)的解(2.13)出发，利用矩阵摄动分析方法简捷地求得一般粘性阻尼复模态特征值问题(2.1)的解(2.2)的近似值。

设方程(2.1)的特征解s_i和u_i是非比例阻尼矩阵ΔC的元素的连续函数，按照摄动理论的基本方法，可将s_i和u_i展开成级数形式

$$\left.\begin{aligned} s_i&=s_{0i}+\Delta s_i+\Delta^2 s_i+\cdots \\ u_i&=u_{0i}+\Delta u_i+\Delta^2 u_i+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.5}$$

其中$(\Delta^r s_i,\ \Delta^r u_i)$为第$i$个特征对$(s_i,u_i)$的第$r$阶摄动量，一般只需确定到第2阶，引入记号

$$\left.\begin{aligned} \Delta^r s_i&=-\Delta^r\sigma_i+J\Delta^r\omega_{di} \\ \Delta^r u_i&=\Delta^r x_i+J\Delta^r y_i \end{aligned}\right\} \quad (1\leqslant i\leqslant n;\ \ r=1,2) \tag{3.6}$$

将近似到二阶摄动量的式(3.5)代入方程(2.1)，仅考虑其前n个特征对，有

$$\begin{aligned} &((s_{0i}+\Delta s_i+\Delta^2 s_i)^2M+(s_{0i}+\Delta s_i+\Delta^2 s_i)(C_0+\Delta C) \\ &\quad +K)(u_{0i}+\Delta u_i+\Delta^2 u_i)=\{0\} \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \end{aligned} \tag{3.7}$$

展开上式，按各摄动量级分别得出相应的摄动方程：

Δ^0阶： $$(s_{0i}^2M+s_{0i}C_0+K)u_{0i}=\{0\} \tag{2.12}$$

Δ^1阶：　$(s_{0i}^2M+s_{0i}C_0+K)\Delta u_i+(2s_{0i}\Delta s_iM+\Delta s_iC_0+s_{0i}\Delta C)u_{0i}=\{0\}$　(3.8)

Δ^2阶：　$(s_{0i}^2M+s_{0i}C_0+K)\Delta^2u_i+(2s_{0i}\Delta s_iM+\Delta s_iC_0+s_{0i}\Delta C)\Delta u_i$
$+((2s_{0i}\Delta^2s_i+(\Delta s_i)^2)M+\Delta^2s_iC_0+\Delta s_i\Delta C)u_{0i}=\{0\}$　(3.9)

…… $(1\leqslant i\leqslant n)$

此外，还需要u_i的正规化条件作为补充方程，即将近似到二阶摄动量的式(3.5)代入式(2.3)的第一式中，有

$$(u_{0i}^T+\Delta u_i^T+\Delta^2u_i^T)(2(s_{0i}+\Delta s_i+\Delta^2s_i)M+C_0+\Delta C)\cdot(u_{0i}+\Delta u_i+\Delta^2u_i)=a_i\qquad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{3.10}$$

其中　$a_i=-4(\omega_{d0i}+\Delta\omega_{di}+\Delta^2\omega_{di}+\cdots)$　(3.11)

展开方程(3.10)，仍按各摄动量级分别给出：

Δ^0阶：　$u_{0i}^T(2s_{0i}M+C_0)u_{0i}=-4\omega_{d0i}$　(3.12)

Δ^1阶：　$2u_{0i}^T(2s_{0i}M+C_0)\Delta u_i+u_{0i}^T(2\Delta s_iM+\Delta C)u_{0i}=-4\Delta\omega_{di}$　(3.13)

Δ^2阶：　$2u_{0i}^T(2s_{0i}M+C_0)\Delta^2u_i+\Delta u_i^T(2s_{0i}M+C_0)\Delta u_i+2u_{0i}^T(2\Delta s_iM$
$+\Delta C)\Delta u_i+u_{0i}^T(2\Delta^2s_iM)u_{0i}=-4\Delta^2\omega_{di}$　(3.14)

…… $(1\leqslant i\leqslant n)$

根据方程(3.8)、(3.9)、(3.13)和(3.14)，即可依次解出第一阶摄动量(Δs_i, Δu_i)和第二阶摄动量(Δ^2s_i, Δ^2u_i)。本文仅考虑方程(2.12)无重复特征值的情况，即设

$$s_{0i}\neq s_{0j}\qquad(i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)\tag{3.15}$$

事实上，尽管实特征值问题(2.9)存在重特征值$\lambda_i=\omega_{0i}^2$的情况较多，但问题(2.12)存在重特征值$s_{0i}=\omega_{0i}(-\xi_{0i}+J(1-\xi_{0i}^2)^{1/2})$的情况是极少的。因此，基于假定(3.15)得出的结果已可满足一般实际应用的需要。但万一遇到方程(2.12)有重复复特征值s_{0i}的例外情况，也易于仿照文献[4]和[5]关于实特征值问题(2.9)对应于重特征值的摄动分析方法建立相应的摄动计算公式，而不存在任何理论上的困难。这里略去该部分内容，可节省较多的篇幅，但不影响对所提出的矩阵摄动分析方法的阐述。

对方程(3.8)前乘u_{0i}^T，有

$$2J(2s_{0i}\Delta s_i+2\sigma_{0i}\Delta s_i+s_{0i}v_i^T\Delta Cv_i)=0$$

由式(3.1)～(3.3)知

$$v_i^T\Delta Cv_i=\Delta c_{Nii}=0\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

则得　$\Delta s_i=0\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$　(3.16)

取特征向量系$\{u_{0i}\}_{i=1}^n$作为n维复向量空间C^n的加权正交正规化基，则可将Δu_i和Δ^2u_i表示为

$$\Delta^ru_i=\sum_{j=1}^ne_{ji}^{(r)}u_{0j}\qquad(r=1,\ 2;\ 1\leqslant i\leqslant n)\tag{3.17}$$

再对方程(3.8)前乘$u_{0j}^T(j\neq i)$，并引入式(3.17)，可得

$$e_{ij}^{(1)}=-\frac{s_{0i}\Delta c_{Nji}}{s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2}\qquad(j\neq i)\tag{3.18}$$

其中　$\Delta c_{Nji}=v_j^T\Delta Cv_i=v_j^TCv_i=c_{Nji}\qquad(j\neq i)$

为确定$e_{ii}^{(1)}$，利用方程(3.13)和(3.17)，有

$$4J(2s_{0i}+2\sigma_{0i})e_{ii}^{(1)}+2J(2\Delta s_i+\Delta c_{Nii})=-4\Delta\omega_{di}$$

因$\Delta s_i=\Delta\omega_{di}=\Delta c_{Nii}=0$，则得

$$e_{ii}^{(1)}=0 \tag{3.19}$$

于是，可给出Δu_i的计算公式

$$\Delta u_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{-s_{0i}\Delta c_{Nji}}{s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2}\cdot u_{0j}\qquad(1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.20}$$

对方程(3.9)前乘u_{0i}^T，并利用结果(3.16)，可得

$$s_{0i}u_{0i}^T\Delta C\Delta u_i-4\omega_{d0i}\Delta^2 s_i=0$$

对所考虑的欠阻尼振动系统，显然应有

$$\Delta^2 s_i=\begin{cases}s_{0i}\Delta^2 c_{Nii}/4\omega_{d0i} & (\omega_{0i}\neq 0)\\ 0 & (\omega_{0i}=0)\end{cases}\qquad(1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.21}$$

其中

$$\Delta^2 c_{Nii}=u_{0i}^T\Delta C\Delta u_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{-2Js_{0i}(\Delta c_{Nji})^2}{s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2}=2J\sum_{j=1}^{n}e_{ij}^{(1)}\Delta c_{Nji}$$

再对方程(3.9)前乘$u_{0j}^T(j\neq i)$，并引入式(3.17)，同时利用结果(3.16)，又可得

$$e_{ji}^{(2)}=\frac{Js_{0i}\Delta^2 c_{Nji}}{2(s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2)}\qquad(j\neq i) \tag{3.22}$$

其中

$$\Delta^2 c_{Nji}=u_{0j}^T\Delta C\Delta u_i=\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{n}\frac{-2Js_{0i}\Delta c_{Nri}\Delta c_{Njr}}{s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2}=2J\sum_{j=1}^{n}e_{ri}^{(1)}\Delta c_{Njr}$$

为确定$e_{ii}^{(2)}$，根据方程(3.14)和(3.17)，可有

$$-8\omega_{d0i}e_{ii}^{(2)}+4J\sum_{j=1}^{n}(s_{0i}+\sigma_{0j})(e_{ji}^{(1)})^2+2u_{0i}^T\Delta C\Delta u_i+4J\Delta^2 s_i=-4\Delta^2\omega_{di}$$

注意到$\Delta^2 s_i=-\Delta^2\sigma_i+J\Delta^2\omega_{di}$及所考虑的振系为欠阻尼的，即得

$$e_{ii}^{(2)}=\begin{cases}\left(\Delta^2 c_{Nii}-2J\left(\Delta^2\sigma_i-\sum_{j=1}^{n}(s_{0i}+\sigma_{0j})(e_{ji}^{(1)})^2\right)\right)\Big/4\omega_{d0i} & (\omega_{0i}\neq 0)\\ 0 & (\omega_{0i}=0)\end{cases} \tag{3.23}$$

于是，又可给出$\Delta^2 u_i$的计算公式（对非刚体型模态）

$$\Delta^2 u_i=\frac{1}{4\omega_{d0i}}\left(\Delta^2 c_{Nii}-2J\left(\Delta^2\sigma_i-\sum_{j=1}^{n}(s_{0i}+\sigma_{0j})(e_{ji}^{(2)})^2\right)\right)u_{0i}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{Js_{0i}\Delta^2 c_{Nji}}{2(s_{0i}^2+2s_{0i}\sigma_{0j}+\omega_{0j}^2)}\cdot u_{0j}\qquad(1\leqslant i\leqslant n) \tag{3.24}$$

综合以上结果，即得问题(2.1)的二阶摄动解(仅对非刚体型模态)

$$\left.\begin{aligned}s_i&=\bar{s}_{n+i}\approx s_{0i}+\Delta^2 s_i\\ u_i&=\bar{u}_{n+i}\approx u_{0i}+\Delta u_i+\Delta^2 u_i\end{aligned}\quad(1\leqslant i\leqslant n)\right\} \tag{3.25}$$

对于刚体型模态，则有可预料到的结果

$$s_i=s_{0i}=0,\ u_i=u_{0i} \tag{3.26}$$

四、算 例

设$M=\mathrm{diag}(3,2,1,1,2,3)$

$$C=\begin{bmatrix} 8 & -2 & & & & \\ -2 & 10 & -3 & & & \\ & -3 & 12 & -4 & & \\ & & -4 & 12 & -3 & \\ & & & -3 & 10 & -2 \\ & & & & -2 & 8 \end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} 120 & -50 & & & & \\ -50 & 110 & -40 & & & \\ & -40 & 100 & -30 & & \\ & & -30 & 90 & -20 & \\ & & & -20 & 80 & -10 \\ & & & & -10 & 70 \end{bmatrix}$$

先解线性实特征值问题(2.9)(本文采用了广义 Jacobi 算法)，得比例阻尼实模态二次特征值问题(2.12)的解

$$\lceil s_0 \rfloor=\mathrm{diag}(s_{01},\cdots,s_{06})$$
$$=\mathrm{diag}(-1.3286+J4.3484,\ -1.2191+J4.5642,\ -2.2212+J5.6099,$$
$$-2.5062+J6.9451,\ -4.4231+J7.8681,\ -7.9686+J8.3338)$$

$$U_0=[u_{01},\cdots,u_{06}]=(1+J)[v_1,\cdots,v_6]=(1+J)V$$
$$=(1+J)\begin{bmatrix} 0.3761 & -0.1278 & -0.1205 & -0.3694 & 0.1525 & 0.0373 \\ 0.4361 & -0.1356 & -0.0260 & 0.3217 & -0.3794 & -0.2083 \\ 0.2784 & -0.0618 & 0.1264 & 0.4695 & 0.3115 & 0.7650 \\ 0.1546 & 0.0207 & 0.3026 & 0.2829 & 0.6983 & -0.5626 \\ 0.1184 & 0.1628 & 0.6214 & -0.2023 & -0.1695 & 0.0606 \\ 0.1484 & 0.5345 & -0.1585 & 0.0216 & 0.0097 & -0.0018 \end{bmatrix}$$

然后应用本文的矩阵摄动法近似求解复模态二次特征值问题(2.1)，所得复特征值为

$$\lceil s \rfloor=\mathrm{diag}(s_1,\cdots,s_6)$$
$$\approx\mathrm{diag}(-1.36+J4.41,\ -1.21+J4.57,\ -2.24+J5.63,$$
$$-2.38+J7.13,\ -4.46+J7.76,\ -8.03+J7.84)$$

再将问题(2.1)变换为状态空间中的$2n$阶矩阵特征值问题，利用HQR算法解得复特征值的精确结果

$$\lceil s \rfloor=\mathrm{diag}(-1.3671+J4.4205,\ -1.1973+J4.5570,\ -2.2345+J5.6276,$$
$$-2.3704+J7.1510,\ -4.4296+J7.6881,\ -8.0678+J7.8926)$$

可见，所求得的$s_i(1\leqslant i\leqslant 6)$的近似解的实部和虚部的误差均在1%以内。值得指出的是，本算例代表一大阻尼系统，其各阶模态阻尼比$\xi_i(1\leqslant i\leqslant 6)$中最小者为$\xi_2=0.2541$，最大者为$\xi_6=0.7148$。这表明本文的矩阵摄动算法对于大阻尼复模态振动特征值问题也是十分有效的。考察式(3.2)和(3.3)中的几个矩阵将有助于理解这一结果，现将C_N，C_0和ΔC的结果列举于下：

$$C_N=\begin{bmatrix} 2.6571 & & & & & \\ 0.8111 & 5.0124 & & \text{对} & & \\ 0.3900 & 0.6686 & 15.9372 & & \text{称} & \\ -0.0786 & 1.5698 & -1.8145 & 8.8461 & & \\ 0.0788 & -0.4459 & -0.0214 & 0.0352 & 4.4423 & \\ -0.1517 & -0.2262 & -0.1385 & 0.0616 & -0.2532 & 2.4382 \end{bmatrix}$$

$$C_0=\begin{bmatrix} 12.5284 & & & & & \\ -4.4359 & 12.1470 & & & & \\ 0.7065 & -4.9991 & 11.5763 & & & \\ 0.2095 & 0.2351 & -3.9881 & 10.2304 & & \\ -0.4986 & 0.2124 & 0.4153 & -1.9702 & 9.3401 & \\ 0.3475 & 0.1308 & -0.0125 & -0.0552 & -1.3012 & 7.8292 \end{bmatrix}$$

$$\Delta C=\begin{bmatrix} -4.5284 & & & & & \\ 2.4359 & -2.1470 & & \text{对} & & \\ & 1.9991 & 0.4237 & & \text{称} & \\ & & -0.0119 & 1.7696 & & \\ & (-) & & -1.0298 & 0.6599 & \\ & & & & -0.6988 & 0.1708 \end{bmatrix}$$

ΔC的(－)区中各元素均为C_0的对应元素的相反数. 可见，C_N是严格主对角占优的，因此ΔC相对于C_0是较小的，亦即C_0是C的主要部分. 于是可以说，凡具备此特点的粘性阻尼振动系统，不论其阻尼量级的大小如何，均可利用本文的矩阵摄动法简捷地求得其复模态特征参数的良好近似解. 这正是这一分析方法的实质和重要应用价值所在.

五、补 充 讨 论

式(3.16)和(3.21)表明，阻尼矩阵C中不满足比例阻尼条件的部分ΔC对复特征值s_i的影响仅是二阶以上的摄动量，亦即按比例阻尼假定确定的s_{0i}已是s_i的具有一阶摄动精度的近似解. 即使对上述大阻尼算例，s_{0i}与s_i的实部和虚部的误差仅达(0.2～6.0)%，这在对某些工程振动问题的研究中已是可以接受的初步结果. 为对此做进一步的考察，下面再举几例.

1. 在上述算例中将阻尼阵C改为

$$C=\begin{bmatrix} 5.0 & -1.5 & & & & \\ -1.5 & 8.0 & -2.0 & & & \\ & -2.0 & 10.0 & -2.5 & & \\ & & -2.5 & 9.0 & -2.0 & \\ & & & -2.0 & 7.0 & -1.5 \\ & & & & -1.5 & 6.0 \end{bmatrix}$$

复特征值的精确解为

$$\lceil s \rfloor=\mathrm{diag}(-1.0971+J4.5427,\ -0.8962+J4.6313,\ -1.6337+J5.7950,\ -1.9387+J7.2769,\ -3.4656+J8.0181,\ -6.0520+J9.6685)$$

各阶模态阻尼比的最大值为$\xi_6=0.5306$. 基于比例阻尼假定的复特征值为

$$\lceil s_0 \rfloor=\mathrm{diag}(-1.0649+J4.4204,\ -0.9083+J4.6360,\ -1.6356+J5.8077,\ -2.0271+J7.0998,\ -3.4326+J8.3479,\ -6.0148+J9.8373)$$

其实部和虚部的误差均为(0.1～4.6)%.

2. 将上面例1中C阵的主对角元素依次分别改为3，4，5，5，4，3，s_i和s_{0i}分别有

$$\lceil s \rfloor=\mathrm{diag}(-0.2473+J4.5479,\ -0.3734+J4.7272,\ -0.7847+J5.9971,\ -0.9065+J7.3100,\ -1.8469+J8.8437,\ -3.8412+J10.7933)$$

最大模态阻尼比为 $\xi_6=0.3353$；

$$\lceil s_0 \rfloor=\mathrm{diag}(-0.2477+J4.5401,\ -0.3766+J4.7091,\ -0.7797+J5.9830,\ -0.9105+J7.3271,\ -1.8605+J8.8323,\ -3.8251+J10.8775)$$

其实部的误差为(0.16～0.86)%，虚部的误差为(0.13～0.48)%。

3. 再考虑系统阻尼进一步减小的情况，设

$$C=\begin{bmatrix} 1.0 & -0.2 & & & & \\ -0.2 & 1.2 & -0.4 & & & \\ & -0.4 & 1.5 & -0.6 & & \\ & & -0.6 & 1.5 & -0.4 & \\ & & & -0.4 & 1.2 & -0.2 \\ & & & & -0.2 & 1.0 \end{bmatrix}$$

s_i 和 s_{0i} 将分别有

$$\lceil s \rfloor=\mathrm{diag}(-0.1623+J4.5447,\ -0.1563+J4.7213,\ -0.2548+J6.0290,\ -0.2877+J7.3808,\ -0.5294+J9.0114,\ -1.0429+J11.4748)$$

最大模态阻尼比为 $\xi_6=0.0905$；

$$\lceil s_0 \rfloor=\mathrm{diag}(-0.1622+J4.5439,\ -0.1563+J4.7216,\ -0.2548+J6.0282,\ -0.2879+J7.3779,\ -0.5298+J9.0106,\ -1.0424+J11.4832)$$

其实部和虚部的误差均为(0.01～0.08)%。

综上所述，可得出结论：利用比例阻尼假定估计某些粘性阻尼振动系统的复特征值是合理的；当振系阻尼不太大时，由此给出的复特征值的近似解具有可接受的乃至良好的精度。这对于一些机械和结构振动系统的固有特性分析和参数识别显然是有意义的。但对于不同类型的振动系统，其适用范围可能是不同的，需通过实际计算分析加以确定。应该指出，这一结论并非显而易见。因一般认为仅当振系阻尼分布接近比例阻尼情况（亦即矩阵C_N为主对角占优）时，采用比例阻尼假定才是合理的，但以上讨论预示了放松这一条件的可能性，即只要振系的阻尼较小，按比例阻尼假定一般可得出其复特征值的较好近似解。这一结论的正确性实际上已在文[3]的有关讨论中得到了证明，在那里给出的结果比上述结论更为具体，即：对小阻尼振动系统，按比例阻尼假定(2.11)近似确定的模态阻尼因子 $\sigma_i\approx\sigma_{0i}=\xi_{0i}\omega_{0i}=c_{Nii}/2$ 几乎是精确的，甚至不必考虑 $c_{Nji}(j\neq i)$ 与 c_{Nii} 的相对大小；同时对由此近似确定的阻尼固有振频 $\omega_{di}\approx\omega_{d0i}=(1-\xi_{0i}^2)^{1/2}\omega_{0i}$ 相对于其精确值的误差有如下近似估计式

$$\omega_{di}-\omega_{d0i}\leqslant\xi_{0i}^2\omega_{0i}/2 \tag{5.1}$$

此外还有一些文献(如教科书[6])曾对上述问题进行过讨论，但文[3]和本文利用矩阵摄动法的分析结果对其所做的证明仍是十分必要的。

六、结　语

本文提出了近似求解一般粘性阻尼线性振动系统的复模态二次广义特征值问题的一种新的矩阵摄动分析方法，它以系统的比例阻尼实模态特征值问题的解为初值，只需进行一些简单的线性运算，即可给出系统的复模态特征值和特征向量的近似估计，其精度取决于振系阻尼分布接近于比例阻尼情况的程度。算例表明，即使对于大阻尼系统，这种矩阵摄动解法也

是十分有效的。与直接求解二次复特征值问题的其它算法相比，本文的解法不仅有更高的计算效率，而且可继续利用求解线性实特征值问题的标准算法，因此可十分简便地在计算机上实施，并易于被广大工程技术人员掌握和应用。另一方面，这种矩阵摄动分析方法也是深入研究阻尼线性系统的复模态振动特性的一个有效的理论工具。这也是其它计算分析方法一般所不具有的优点。

参 考 文 献

[1] 郑兆昌，多自由度复模态理论的摄动方法：一级摄动，信号处理在振动工程中的应用学术会议，南京（1983）。

[2] 吕振华、冯振东、邬惠乐，也论复模态振动分析理论的几个问题，振动与冲击，8(4)(1989)，20—27。

[3] 吕振华、冯振东、邵成，小阻尼线性振动系统的复模态固有特性的矩阵摄动分析，东北地区力学学术会议，哈尔滨（1988）。

[4] 胡海昌，《多自由度结构固有振动理论》，科学出版社，北京（1987），17—23。

[5] 吕振华、冯振东、方传流，线性特征值问题在模态坐标系中的矩阵摄动法，振动工程学报，2(2)(1989)，59—64。

[6] 郑兆昌(主编)，《机械振动》(上)，机械工业出版社，北京（1980），279—288。

A New Matrix Perturbation Method for Analytical Solution of the Complex Modal Eigenvalue Problem of Viscously Damped Linear Vibration Systems

Lü Zhen-hua Feng Zhen-dong Fang Chuan-liu

(*Jilin University of Technology, Jilin*)

Abstract

A new matrix perturbation analysis method is presented for efficient approximate solution of the complex modal quadratic generalized eigenvalue problem of viscously damped linear vibration systems. First, the damping matrix is decomposed into the sum of a proportional- and a nonproportional-damping parts, and the solutions of the real modal eigenproblem with the proportional dampings are determined, which are a set of initial approximate solutions of the complex modal eigenproblem. Second, by taking the nonproportional-damping part as a small modification to the proportional one and using the matrix perturbation analysis method, a set of approximate solutions of the complex model eigenvalue problem can be obtained analytically. The result is quite simple. The new method is applicable to the systems with viscous dampings which do not deviate far away from the proportional-damping case. It is particularly important that the solution technique be also effective to the systems with heavy, but not over, dampings. The solution formulas of complex modal eigenvalues and eigenvectors are derived up to second-order perturbation terms. The effectiveness of the perturbation algorithm is illustrated by an exemplar numerical problem with heavy dampings. In additon, the practicability of approximately estimating the complex modal eigenvalues, under the proportional-damping hypothesis, of damped vibration systems is discussed by several numerical examples.

Key words vibration analysis, damped system, complex mode, quadratic eigenvalue problem, matrix perturbation method