应用数和力学编委会编
重庆出版社出版

流动稳定性弱非线性理论的重新考虑*

周 恒

(天津大学力学系，1990年4月14日收到)

摘 要

弱非性理论已被广泛用于流动稳定性理论及其它领域。然而其应用对某些问题虽是成功的，但对另一些问题，其结果却常不令人满意，特别是对转捩或自由剪切流中涡的演化这类问题，这时理论研究的目的不是寻找稳态解，而是预测演化过程。在本文中，我们将研究不成功的原因并建议一些改进的办法。

关键词 流动稳定性 弱非线性理论 共振

一、Landau-Stuart 幅值方程

为了讨论方便，我们以二维平行流作为例子。这时Navier-Stokes方程及连续方程可写为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=\frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{u},\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{u}=\{u,v\}^T$是速度，u和v是其在直角坐标x,y方向的分量，t是时间，p是速度，∇是梯度算符。所有的变量都已适当无量纲化，而R是Reynolds数。

设解可以展为某一小参数的级数，例如该小参数可以是基本波的幅值a，

$$\{\mathbf{u},p\}^T=\{\mathbf{u}_0,p_0\}^T+a\{\mathbf{u}_1,p_1\}^T+a^2\{\mathbf{u}_2,p_2\}^T+\cdots \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{u}_0=\{u_0(y),0\}^T$及$p_0$是基本层流解，$\mathbf{u}_1$是线性化问题的解，适当地加以规一化。

在大多数情况下，我们设

$$\{\mathbf{u}_1,p_1\}^T=\{\hat{\mathbf{u}}_1(y),\hat{p}_1(y)\}^T\exp[i(\alpha x-\omega t)]+\mathrm{C.C.} \tag{1.3}$$

且以后我们写$\theta=\alpha x-\omega t$。依赖于我们用时间模式或空间模式，或是α，或是ω设为实数且为已知，而另一个则与$\mathbf{u}_1$一起由一特征值问题解出。在本文中，我们用时间模式作为例子。

根据弱非线性理论，a和θ满足下列Landau-Stuart方程

$$\frac{da}{dt}=\omega_i a+A_3a^3+A_5a^5+\cdots \tag{1.4}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\omega_r+C_2a^2+C_4a^4+\cdots \tag{1.5}$$

其中 ω_r及ω_i是ω的实部与虚部，而A_i及C_i等则是在求解过程中由某种条件，例如由可解性

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文．国家自然科学基金资助项目．

条件所确定的常数。

但仔细考察(1.2),(1.4)及(1.5)式不难发现，一旦α已知，则解就只依赖于一个实质性的参数，即基本波的幅值。但另一方面，设流动对x而言是周期性的，周期为$2\pi/\alpha$，则任一满足连续方程及边界条件，对x有同样周期性的流场，都可以是一个真实流动的初始条件。显然，由此导致的流动一般并不和弱非线理论给出的解相同。

即使我们自下列流场开始

$$\{\mathbf{u},p\}^T=\{\mathbf{u}_0,p_0\}^T+a\{\mathbf{u}_1,p_1\}^T \tag{1.6}$$

而这显然是允许的，因为它满足连续方程及边界条件，但为了解(1.2),(1.4),(1.5)成立，在(1.2)中自a^2项开始的项，必须在一瞬间被激发，而这在真实情况，例如一个实验中，是不可能的。如果我们考察Kachanov[1]实验中的数据，就可发现在各处二次谐波的幅值总比我们用弱非线性理论中的摄动法，在a取自实验数据时所算出的要小得多。例如，算得的值比实验的值要大2至3倍。且越是靠近激发不稳定波所用的振动条件，其差别越大。如果我们从物理角度来观察，则在Nishioka等人[2]及Kachanov[1]的实验中，在发展的初始阶段，并不存在谐波。因此谐波必是通过非线性作用所激发的，而这不能是突发性的。因此，二次谐波幅值不一定正比于a^2，三次谐波幅值不一定正比于a^3，等等，如弱非线性理论给出的那样，补救的办法是我们应该给每一谐波以一个独立的幅值，并导出其演化方去，以使其逐渐的演变过程得以考虑。

按照Stuart[3]或Zhou(周)[5]，则在弱非线性理论的框架中，可以写

$$\begin{aligned}\{\mathbf{u}_2,\ p_2\}^T&=\{\hat{\mathbf{u}}_{20}(y),\hat{p}_{20}(y)\}^T\exp[-2\theta_i]+\{\hat{\mathbf{u}}_{22}(y),\hat{p}_{22}(y)\}^T\exp[2i\theta]\\&\equiv\{\mathbf{u}_{20},p_{20}\}^T+\{\mathbf{u}_{22},p_{22}\}^T\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中右端指数中出现θ_i是因为线性化问题对应的特征值问题可能不是中性情况，否则$\theta_i=0$。因为$\mathbf{u}_{20}$等的幅值不一定正比于a^2，(1.2)式右端的第三项应代之以

$$b_{20}\{\hat{\mathbf{u}}_{20},\hat{p}_{20}\}^T\exp[-2\theta_i]+b_{22}\{\hat{\mathbf{u}}_{22},\hat{p}_{22}\}^T\exp[2i\theta]. \tag{1.8}$$

根据弱非线性理论的摄动法，$\mathbf{u}_{20}$等满足的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{u}_{20}}{\partial t}+u_0\frac{\partial\mathbf{u}_{20}}{\partial x}+v_{20}\frac{d\mathbf{u}_0}{dy}+\nabla p_{20}-\frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{u}_{20}=-2\mathrm{Re}[(\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_1^*]\\&\nabla\cdot\mathbf{u}_{20}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{u}_{22}}{\partial t}+u_0\frac{\partial\mathbf{u}_{22}}{\partial x}+v_{22}\frac{d\mathbf{u}_0}{dy}+\nabla p_{22}-\frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{u}_{22}=-2\mathrm{Re}[(\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_1]\\&\nabla\cdot\mathbf{u}_{22}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

其中 ＊表示取共轭数，Re表示取复数的实数部分。

按照Zhou(周)[5]的写法，实际求解$\hat{\mathbf{u}}_{20}$等的方程为

$$\left.\begin{aligned}&2\omega_i\hat{u}_{20}-\frac{1}{R}\frac{d^2\hat{u}_{20}}{dy^2}=-2\mathrm{Re}\left(\hat{v}_1\frac{d\hat{v}_1^*}{dy}\right)\\&\hat{v}_{20}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&-2i\omega\hat{\mathbf{u}}_{22}+2i\alpha u_0\hat{\mathbf{u}}_{22}+\hat{v}_{22}\frac{d\mathbf{u}_0}{dy}+\left\{2i\alpha,\frac{d}{dy}\right\}^T\hat{p}_{22}-\frac{1}{R}\left(\frac{d^2}{dy^2}-4\alpha^2\right)\hat{\mathbf{u}}_{22}\\&\qquad=-2\mathrm{Re}\left[\left(i\alpha\hat{u}_1+\hat{v}_1\frac{d}{dy}\right)\hat{\mathbf{u}}_1\right]\\&\left\{2i\alpha,\frac{d}{dy}\right\}\mathbf{u}_{22}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

且若我们取$\hat{u}_{20}$等的幅值为a^2，就恢复为原来的弱非线性理论的结果。

如上所述，应给$\hat{u}_{20}$等以独立的幅值。但我们设其速度分布形状可借用上述述动法所得的结果。这样，下式就是可用以取代(1.2)式右端第三项的适当表达式

$$b_{20}(t)\{\hat{u}_{20}(y),\hat{p}_{20}(y)\}^T+b_{22}(t)\{\hat{u}_{22}(y),\hat{p}_{22}(y)\}^T \tag{1.13}$$

其中形状为已知的，但幅值b_{20}及b_{22}则可随时间而慢变，如a那样。

如我们将(1.13)式的第一项代入(1.9)，用$b_{20}\hat{u}_{20}$点乘(1.9)式的第一式，然后积分，按照流动稳定性理论中推导能量方程的步骤，就可导出下列b_{20}的方程

$$\frac{db_{20}}{dt}=B_{01}b_{20}+B_{02}a^2 \tag{1.14}$$

用同样的方法，可以导出b_{22}的方程

$$\frac{db_{22}}{dt}=B_{21}b_{22}+B_{22}a^2 \tag{1.15}$$

而且考虑到(1.11)及(1.12)，不难证明

$$B_{01}+B_{02}=B_{21}+B_{22}=2\omega_i \tag{1.16}$$

如我们继续做到下一步，则原来的Landau-Stuart方程将成为

$$\frac{da}{dt}=\omega_i a+(A_{31}b_{20}+A_{32}b_{22})a \tag{1.17}$$

且可类似地导出θ的方程。因此，到此为止，我们将有三个方程(1.14)，(1.15)及(1.17)以取代原来的一个方程(1.4)，而二次谐波及平均流修正的演化则已考虑在内。

显然，上述步骤可继续做下去，越来越多的谐波将带来越来越多的幅值方程。

在令(1.14)，(1.15)及(1.17)右端等于零时，我们可用以求出平衡解。这里应注意，若令

$$b_{20}=b_{22}=a^2$$

则(1.17)式就回到原来的 Landau-Stuart 方程。但由于有(1.16)式，当$b_{20}=b_{22}=a^2$时，$db_{20}/dt\neq0$及$db_{22}/dt\neq0$。因此，除非$\omega_i=0$，否则由(1.14)，(1.15)及(1.17)求得的平衡解与由原来的 Landau-Stuart 方程求得的并不一致。由于原来的 Landau-Stuart 方程是现在形式的一种特例，而(1.14)及(1.15)是在形状假设下用能量法导出的，这对弱非线性理论本身显然是正确的，因此不难得出一个结论，即原来的弱非线性理论只有在其线性化问题对应的是中性情况，如Stuart[3]，Watson[4]那样，或人为的使之如此，如Zhou (周)[5]那样，才能给出从分析观点和从能量传输观点出发彼此相容的解。当然，如果我们将摄动法继续到无穷多阶且能证明其级数收敛，则或者即使在$\omega_i\neq0$时也能得到自恰的解，但至今并没有人能做到这一点。

一旦求出平衡解，我们就可以用自平衡解加以小扰动的办法研究其稳定性。我们曾计算了平面 Poiseuille 流的若干例子，其参数均很接近于中性情况，以至我们可以自中性的线性问题开始摄动。对这些例子，其稳定性与原来Landau-Stuart方程给出的结果是一样的。这些例子中既有超临界的，也有亚临界的。

我们也试用(1.15)式，在a取自 Kachanov 实验值的条件下，计算二次谐波的演化过程。Kachanov 的实验中的激振条置于$x=250$mm 处，故我们设二次谐波的幅值在该处为零。我们计算了式(1.15)式中的系数，然后用数值积分的方法求二次阶波的幅值b_{22}。我们发现直至$x=350$处，计算所得与实验相比是相当不错的。注意这是一个演化问题，实际上二

次谐波的形状也不能简单地取为当地算出的分布，因此某种演化积累的作用被考虑进去了，否则结果不会那样好。

我们没有继续向下游计算，因为那里量出的二次谐波形状已经有扭曲了。

二、弱非线理论中的共振概念

共振概念在流动稳定性理论及其它领域起着重要的作用。在上一节讨论的范围内，可以考虑两个问题。

我们以共振三波[6~8]作为一个例子。下列三波

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(y)\exp[i(\alpha_1 x-\omega_1 t)],\ \phi_2(y)\exp[i(\alpha_2 x+\beta z-\omega_2 t)]\\ \phi_3(y)\exp[i(\alpha_2 x-\beta y-\omega_2 t)]\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

若其波数及频率满足共振条件

$$\alpha_1=2\alpha_2,\quad \omega_{1r}=2\omega_{2r},\quad \omega_{1i}=\omega_{2i}=0 \tag{2.2}$$

则形成共振。有些作者不要求(2.2)式中的第三个条件，但前两个条件则大家都认为是必需的。除了其它理由外，这是因为只有满足这一条件，它们的相速度才相同，以使得它们的相对相位不变，从而保证相互激励。

但是这样严格的条件，只在我们要研究在无限长时间内的演化问题时才是必要的，而这只对严格平行流，且采用时间模式时才可能做到。但在一真实问题中，空间模式往往更合适，且演化过程常常是很短的，例如只不过经过几个波长或周期，如转捩问题或发展中的自由剪切流中涡的演化问题那样。在这些问题中，相速度的小量差别不会导致很大不同。例如，相速度之差若为3%，则在5个波长范围内，相对相位之差仅为 0.3π，这不会显著改变不同波之间的能量传递率，而在此期间，转捩可能已经发生。

另一方面，共振概念给人们一个印象，即一旦共振条件满足，则共振波的增长率比起其他参数的波要小得多。然而计算表明，波与波及波与平均流之间的能量传递率在共振参数处并无一个尖的峰值，相反，它们与参数的关系曲线是比较平坦的。因此，对共振概念的第一个修正是它并不提供一个判据，使得在众多的波中能选择出单一的一组共振波实际上我们应该在一个尽管可能是不太宽的一个波段中去计算可能形成近似共振的那些波的增长率并加以比较。

应用共振概念时的第二个修正牵涉到如何计算其演化过程。在[6,8]中，建议用弱非线理论。但如上一节所述，对演化问题，其演化方程，即幅值方程，需要重新推导，然后我们才有可能提供一种波数选择机理，其结果可能与以前的不同。

一种正确的途径可以如下所述。首先，我们可以自(2.1)式那样的三波开始，但允许其相速度有某种程度的差异。然后，由非线性作用，下列这类新的波可能被激发。

$$\begin{array}{l}\phi_4(y)\exp\{i[(\alpha_1-\alpha_2)x-(\omega_1-\omega_2^*)t+\beta z]\},\ \phi_5(y)\exp\{i[(\alpha_1-\alpha_2)x\\ \quad -(\omega_1-\omega_2^*)t-\beta z]\},\quad \phi_6\exp[2i(\alpha_2 x-\omega_2 t)]\end{array} \tag{2.3}$$

而这些波又可能与原来的波相互作用以增强或减弱彼此之间或与平均流之间的能量传递。如果我们采用第一节中的方法，就可以导出每一模式的演化方程。然后积分之，以找出增长率最大的波，这样就可提供一种波数选择机理。

三、发展中的自由剪切流的平均流修正问题

在将弱非线性理论用于发展中的自由剪切流时，还会有另一种困难。即若我们采取拟平行流假定，则我们将得到如下的二阶平均流修正$\hat{u}_{20}(y)$的方程

$$\frac{1}{R}\frac{d^2\hat{u}_{20}}{dy^2}=\frac{d}{dy}\langle u_1v_1\rangle \tag{3.1}$$

式中右端代表基本波通过非线性作用产生的Reynolds应力导致的力。如果积分此方程，则将得到一个当$y\to\infty$时代数式衰减的平均流修正，这显然与实验结果不符。这一困难产生的根源是(3.1)式只适用于一种定态情况，而对一真实的自由剪切流，问题是演化型的，在某处产生的平均流修正，只是上游有限距离内扰动所产生的Reynolds应力在有限时间內作用的积累结果。这显然是与定态不同的一个演化过程。克服这一困难的办法是导出一个适用于这一非定态演化过程的方程。在一个其速度与扰动传播速度相同的坐标系內，我们将看到一个非定常的剪切流，其厚度不断增长。但若我们假设其增长率很小，则在作了若干简化后，我们将得到确定平均流修正的方程

$$\frac{\partial u_{20}(y,t)}{\partial t}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2u_{20}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\langle u_1v_1\rangle \tag{3.2}$$

由于这是一扩散型方程，其解可写为

$$u_{20}(y,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{\partial}{\partial y}\langle -u_1v_1\rangle \cdot\exp\left[-\frac{R(y-\eta)}{4(t-\tau)}\right]d\eta d\tau \tag{3.3}$$

在实际积分时，以一混合层为例，我们应自某一位置开始，在该处平均流修正设为零。然后在每一点计算扰动基波，即T-S波，其幅值或取自实验值，或由某种演化方程求出。找出扰动传播速度，利用此速度将时间变量转换为空间变量。然后对(3.3)式逐步积分，积分步长应能保证精度。这样，我们可得到一个在$y\to\infty$指数衰减的平均流修正。

人们可以提出的一个责难是在推导(3.2)式时没有考虑到剪切层厚度增加的影响。而回答是当我们逐步积分(3.3)式时，层厚已假设为已知，或者由实验给出，或者由其他方程事先或同时联立求解而得。因而实际上层厚增长的影响在计算时已经被考虑在內了。

致谢 作者在1989年上半年在教委和美国NSF资助(Grant INT85-14196)下赴美国Brown大学访问时，曾与Brown大学的J. T. C. Liu教授及正好也在该校访问的J. T. Stuart教授就文中的问题进行过有益的讨论，在此致谢。另本文的一部分将于IUTAM Symposium on Nonliear Hydrodynamic Stability and Transition(法国，1990年)上报告，作者由于得到了王宽诚教育基金会的资助，得以参加此会议，谨致谢忱。

参考文献

[1] Kachanov, Yu. S., On the resonant nature of the breakdown of a laminar boundary layer, *J. F. M.*, 184 (1987), 43—74.

[2] Nishioka, M., S. Iida, and Y. Ichikawa, An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow, *J. F. M.*, 72 (1975), 731—751.

[3] Stuart, J. T., On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1, The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. F. M.*, 9 (1960), 353—370.

[4] Watson, J., On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2, The developement of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. F. M*, 9 (1960), 371—389.

[5] Zhou, H., On the nonlinear theory of stability of plane Poiseuille flow in the subcritical range, *Pro. Roy. Soc. Lond.*, A381 (1982), 407—418.

[6] Craik, A. D. D., Nonlinear resonant instability in boundary layer, *J. F. M.*, 50 (1971), 393—413.

[7] 周恒，亚临界平面 Poiseuille 流的三维非线性稳定性问题——(Ⅰ)共振三波概念的推广，力学学报，16 (1984), 1—9.

[8] 周恒、王亦工，亚临界平面 Poiseuille 流的三维非线性稳定性问题——(Ⅱ)共振波的非线性演化问题，力学学报，16 (1984), 205—215.

The Re-examination of the Weakly Nonlinear Theory of Hydrodynamic Stability

Zhou Heng

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin)

Abstract

The weakly nonlinear theory has been widely applied in the problem of hydrodynamic stability and also in other fields. However, although its application has been successful for some problems, yet for other problems, the results obtained are not satisfactory, especially for problems like transition or the evolution of the vortex in the free shear flow, for which the goal of the theoretical investigation is not seeking for a steady state, but predicting an evolutional process. In this paper, we shall examine the reason for the unsuccessfulness and suggest ways for its amendment.

Key words hydrodynamic stability, weakly nonlinear theory, resonance