应用数学和力学，第12卷第3期(1991年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数和力学编委会编
重庆出版社出版

大变形非线性弹性力学的广义变分原理*

薛 大 为

(北京理工大学，1990年4月17日收到)

摘 要

本文导出了大变形非线性弹性力学的两个具有σ_{ij}，e_{ij}和u_i三类独立变量的广义变分原理，证明了当应力应变关系为约束条件时这两个广义变分原理是等价的．文中对某些特例也作了阐明．

关键词 大变形 非线性弹性力学 广义变分原理 三类独立变量

一、引 言

钱伟长教授在创导用Lagrange乘子法建立变分原理，证明了胡-鹫津广义变分原理与熟知的Hellinger-Reissner变分原理的等价性及其它的等价定理和等价条件以及用变分原理改进了不协调元的使用范围等这些对变分原理作出的巨大贡献的同时[1,2,3]，独创了高阶Lagrange乘子法[4]．钱伟长教授用他的高阶Lagrange乘子法解决了许多作为高阶Lagrange乘子法的特例的普通的Lagrange乘子法所不易解决的问题，在解决了众所周知的难题大位移非线性弹性力学的余能原理及其泛函之后，他又用高阶Lagrange乘子法建立了两类大位移非线性弹性力学的广义变分原理[5]．当然，钱伟长教授还创立了其它许多的新的变分原理[6]．

本文用Lagrange乘子法导出了大变形非线性弹性力学的两个具有σ_{ij}，e_{ij}和u_i三类独立变量的广义变分原理，并证明了当应力应变关系作为约束条件时，这两个新的广义变分原理是等价的．本文导得的这两个广义变分原理与已有的变分原理的不同之处在于：所有已有的弹性力学广义变分原理，均可以被认为是最小势能原理的推广或最小余能原理的推广，而本文的广义变分原理则可以被解释为是上述二者的代数和的推广．本文从这一观点出发、运用Lagrange 乘子法建立了大变形非线性弹性力学的两个具有三类独立自变函数的广义变分原理及其特例，克服了以前用 Lagrange 乘子法所未能解除的约束这一问题[2]．我们相信本文的这一观点，也可应用于其它问题，以建立相应的广义变分原理．

二、广义变分原理的建立

设有一非线性弹性体发生大变形而处于平衡，则它应满足下述方程和条件：

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文．

1. 在全部体积V内的平衡方程

$$[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+\bar{F}_i=0 \tag{2.1}$$

2. 应变和位移的关系式

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \tag{2.2}$$

3. 应力应变关系式

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \tag{2.3a}$$

或

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} \tag{2.3b}$$

4. 在位移已给的边界S_u上的边界条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (在S_u上) \tag{2.4}$$

5. 在外力已给的边界S_σ上的边界条件

$$(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k=\bar{p}_i \qquad (在S_\sigma上) \tag{2.5}$$

式中 σ_{ij}，e_{ij}和u_i分别代表应力、应变和位移；γ_{ij}为Kronecker符号

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}1 & (当i=j)\\ 0 & (当i\neq j);\end{cases}$$

$\bar{F}_i$，$\bar{u}_i$和$\bar{p}_i$分别代表已给体积力、已给边界位移和已给边界外力；总边界S为位移已给的边界S_u和外力已给的边界S_σ之和；$A(e_{ij})$ 和$B(\sigma_{ij})$ 分别为应变能密度和余能密度，它们有正定的二次式

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}\geqslant 0 \tag{2.6a}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}\delta \sigma_{ij}\delta \sigma_{kl}\geqslant 0 \tag{2.6b}$$

此外，文中采用了 Einstein 求和约定及 Synnge 和钱伟长拖带坐标[7]。上述内容，也可在Washizu[8]的名著中找到，又，“，”表示求导。

上述问题可以化为变分问题。定义一个泛函Π_{11}为

$$\begin{aligned}\Pi_{11}=&\int_V\left(-A+B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+\bar{F}_iu_i\right)dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&-\int_{S_u}\bar{u}_k(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_jdS+\int_V\lambda_{ij}\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]dV\\&+\int_{S_u}\mu_i(u_i-\bar{u}_i)dS+\int_V\alpha_{ij}\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)dV+\int_{S_\sigma}\xi_i\Big[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k\\&-\bar{p}_i\Big]dS+\int_V\lambda_i\{[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+\bar{F}_i\}dV\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 λ_{ij}，μ_i，α_{ij}，ξ_i和λ_i均为Lagrange乘子，则其变分为

$$\delta\Pi_{11}=\int_V\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}+u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}$$

$$+\lambda_k\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}\Big\}dV+\int_V\{[(\gamma_{ji}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta\lambda_k dV$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\delta[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]dS+\int_{S_\sigma}[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]\delta\xi_i dS$$

$$+\int_{S_\sigma}\xi_i n_k\delta[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}]dS+\int_V\Big[\Big(-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-a_{ij}\Big)\delta e_{ij}+\bar{F}_i\delta u_i\Big]dV$$

$$+\int_V\Big(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\Big)\delta a_{ij}dV+\int_V a_{ij}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{mn}}\delta\sigma_{mn}dV$$

$$+\int_V\Big[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Big]\delta\lambda_{ij}dV+$$

$$+\int_V\Big[\lambda_{ij}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{mn}}\delta\sigma_{mn}-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_{k,j}\Big]dV$$

$$+\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS+\int_{S_u}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i+\mu_i\delta u_i]dS \tag{2.8}$$

因为

$$\int_V[u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}]dV$$

$$=\int_V[u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+(u_{i,j}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}]dV$$

$$=\int_V[u_{k,j}\sigma_{ij}\delta(\gamma_{ki}+u_{k,i})+u_{k,j}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma_{ij}]dV$$

$$=\int_V u_{k,j}\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dV$$

$$=\int_{S_\sigma+S_u}u_k n_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS-\int_V u_k\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}dV \tag{2.9}$$

$$-\int_V(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_{k,j}dV=\int_V[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}\delta u_k dV$$

$$-\int_{S_\sigma+S_u}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_k n_j dS \tag{2.10}$$

将它们代入 (2.8) 式后，有

$$\delta\Pi_{i1}=\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta\lambda_k dV$$

$$+\int_V\Big[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Big]\delta\lambda_{ij}dV+\int_V\Big(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\Big)\delta a_{ij}dV$$

$$+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i dS+\int_{S_\sigma}[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]\delta\xi_i dS$$

$$+\int_V\Big[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})+(\lambda_{mn}+a_{mn})\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{mn}}\Big]\delta\sigma_{ij}dV$$

$$+\int_V(\lambda_k-u_k)\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}dV$$

$$+\int_{S_\sigma}(\xi_i+u_i)n_k\delta[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}]dS-\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\alpha_{ij}\right)\delta e_{ij}dV$$

$$+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta u_k dV$$

$$+\int_{S_u}[\mu_k-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j]\delta u_k dS$$

$$-\int_{S_\sigma}[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j-\bar{p}_k]\delta u_k dS$$

$$+\int_{S_u}(u_k-\bar{u}_k)n_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS \tag{2.11}$$

当λ_i，λ_{ij}，α_{ij}，ξ_i，μ_i，σ_{ij}，e_{ij} 和u_i这八组变量均为独立自变函数时，则由（2.11）式有

$$[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (在V内) \tag{2.12a}$$

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (在V内) \tag{2.12b}$$

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}=0 \qquad (在V内) \tag{2.12c}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (在S_u上) \tag{2.12d}$$

$$(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i=0 \qquad (在S_\sigma上) \tag{2.12e}$$

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})+(\lambda_{mn}+\alpha_{mn})\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{mn}}=0 \qquad (在V内) \tag{2.12f}$$

$$\lambda_k=u_k \qquad (在V内) \tag{2.12g}$$

$$\xi_i=-u_i \qquad (在S_\sigma上) \tag{2.12h}$$

$$\alpha_{ij}=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \qquad (在V内) \tag{2.12i}$$

$$[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (在V内) \tag{2.12j}$$

$$\mu_k-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j=0 \qquad (在S_u上) \tag{2.12k}$$

$$(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j-\bar{p}_k=0 \qquad (在S_\sigma上) \tag{2.12l}$$

由（2.12b）及（2.12c）式可得

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \tag{2.12m}$$

则（2.12a）、（2.12m）、（2.12c）、（2.12d）和（2.12e）即分别为（2.1）、（2.2）、(2.3b)、(2.4）及（2.5）式。将（2.12b）式代入（2.12f）式，并注意到（2.12i）式，即得

$$\lambda_{ij}=-\alpha_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \tag{2.12n}$$

将（2.12n）式代入（2.12j）、（2.12k）和（2.12 l）式，得

$$\mu_i=(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}n_j \tag{2.12 o}$$

应用数学朱

$$\left[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \tag{2.12p}$$

$$n_j(\gamma_{ki}+u_{k,i})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\bar{p}_k \tag{2.12q}$$

注意到σ_{ij}和e_{ij}之间满足了 (2.12c) 式也就是满足了 (2.3a)式，故 (2.12p)式和 (2.12q)式分别与 (2.12a) 式和 (2.12e) 式全同。五组Lagrange乘子已求出如 (2.12g)、(2.12h)、(2.12i)、(2.12n) 和 (2.12o) 所示。将它们代入(2.7) 式中，得

$$\begin{aligned}\Pi^*_{l1}=&\int_V\left(-A+B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+\bar{F}_iu_i\right)dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&-\int_{S_u}\bar{u}_k(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_jdS+\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}\right.\\&\left.+u_{k,i}u_{k,j})\right]dV+\int_{S_u}(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS\\&-\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)dV-\int_{S_\sigma}u_i[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]dS\\&+\int_V u_i\{[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+\bar{F}_i\}dV\end{aligned} \tag{2.13}$$

上式可化简为

$$\begin{aligned}\Pi^*_{l1}=&\int_V\left(-A+B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+\bar{F}_iu_i\right)dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&-\int_{S_u}\bar{u}_k(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_jdS+\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]dV\\&+\int_{S_u}(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS-\int_{S_\sigma}u_i[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]dS\\&+\int_V u_i\{[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+\bar{F}_i\}dV\end{aligned} \tag{2.14}$$

我们还可以定义另一泛函为

$$\begin{aligned}\Pi_{l2}=&\int_V\left(-A+B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\bar{F}_iu_i\right)dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&-\int_{S_u}\bar{u}_k\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_jdS+\int_{S_u}\mu_i(u_i-\bar{u}_i)dS\\&+\int_V\lambda_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]dV\\&+\int_V\alpha_{ij}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)dV+\int_{S_\sigma}\xi_i\left[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}n_k-\bar{p}_i\right]dS\\&+\int_V\lambda_i\left\{\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]_{,j}+\bar{F}_i\right\}dV\end{aligned} \tag{2.15}$$

式中 与以前相同，λ_{ij}，μ_i，α_{ij}，ξ_i和λ_k均为Lagrange乘子。对Π_{l2}取一阶变分，得

$$\delta\Pi_{l2}=\int_V\left(-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}dV+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta u_kdV$$

$$+\int_V\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\lambda_{ij}dV+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i dS$$

$$+\int_{S_u}[\mu_k-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j]\delta u_k dS$$

$$-\int_{S_\sigma}[-\bar{p}_k+(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j]\delta u_k dS+\int_V\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-a_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}dV$$

$$+\int_V\left[a_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{mn}}\delta e_{mn}dV$$

$$+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]dS+\int_{S_\sigma}(\xi_i+u_i)n_k\delta\left[(\gamma_{ij}\right.$$

$$\left.+u_{i,j})\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}\right]dS+\int_V(\lambda_i-u_i)\delta\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]_{,j}dV$$

$$+\int_V\left\{\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]_{,j}+\bar{F}_i\right\}\delta\lambda_i dV+\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta a_{ij}dV$$

$$+\int_{S_\sigma}\left[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}n_k-\bar{p}_i\right]\delta\xi_i dS \qquad (2.16)$$

由上式可得

$$\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17a)$$

$$(\gamma_{ij}+u_{i,j})\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}n_k-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \qquad (2.17b)$$

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17c)$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17d)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \qquad (2.17e)$$

$$\lambda_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17f)$$

$$a_{ij}=\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17g)$$

$$\lambda_i=u_i \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17h)$$

$$\xi_i=-u_i \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \qquad (2.17i)$$

$$\mu_k=(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \qquad (2.17j)$$

$$a_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17k)$$

$$(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (2.17\ l)$$

$$-\bar{p}_k+(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j=0 \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \qquad (2.17m)$$

(2.17d) 式为应力应变关系。注意到 (2.17d)，可见 (2.17a)、(2.17c)、(2.17b) 和 (2.17e) 即与 (2.17d) 一起与 (2.1)～(2.5) 式全同。再注意到 (2.17f)和 (2.17g) 式，可见 (2.17k)、(2.17 l) 和 (2.17m)各式分别为(2.17c)、(2.17a) 和(2.17b)，这是由于满足了 (2.3) 式中的一个式子，则另一式亦满足的原故。将 (2.17f) 式代入 (2.17j)，得

$$\mu_k=(\gamma_{ki}+u_{k,i})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j \tag{2.17n}$$

将 (2.17f)、(2.17g)、(2.17h)、(2.17i) 及(2.17n) 代入 (2.15) 式，我们即求得了另一泛函

$$\begin{aligned}\Pi_{i2}^*=&\int_V\left(-A+B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\bar{F}_iu_i\right)dV+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&-\int_{S_u}\bar{u}_k\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_jdS+\int_{S_u}(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS\\&+\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]dV+\int_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)dV\\&-\int_{S_\sigma}u_i\left[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}n_k-\bar{p}_i\right]dS\\&+\int_Vu_i\left\{\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right]_{,j}+\bar{F}_i\right\}dV\end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.13) 式和 (2.18) 式，为本文建立的大变形非线性弹性力学的两个具有三类独立变量的广义变分原理，众多的弹性力学的变分原理，都是它们的特例。

三、等价性及其条件

将Π_{i1}^*减去Π_{i2}^*，得

$$\begin{aligned}\Pi_{i1}^*-\Pi_{i2}^*=&\int_V\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)dV+\int_{S_u}\bar{u}_k(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_j\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)dS\\&-\int_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)dV+\int_{S_\sigma}u_i\left[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\left(\frac{\partial A}{\partial e_{jk}}-\sigma_{jk}\right)n_k\right]dS\\&+\int_Vu_i\left[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\left(\sigma_{kj}-\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}\right)\right]_{,j}dV\end{aligned} \tag{3.1}$$

上式说明当应力应变关系满足时，这两个泛函Π_{i1}^*和Π_{i2}^*是等价的。如果令$A=a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}/2$，又$B=b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2$，则可见大变形线弹性理论也有相应的等价定理。

四、非线性弹性小变形的情形

在小变形的场合，当消去小量，可由 (2.14) 式和 (2.18) 式得出：

$$\begin{aligned}\Pi_i^*=&\int_V(-A+B+\bar{F}_iu_i)dV-\int_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_jdS+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\\&+\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV+\int_{S_u}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS\\&-\int_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS+\int_Vu_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)dV\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\Pi_2^* = \int_V (-A+B+\bar{F}_i u_i) dV + \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS - \int_{S_u} \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} n_j \bar{u}_i dS$$

$$+ \int_{S_u} \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_V \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \right] dV$$

$$+ \int_V \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) dV - \int_{S_\sigma} u_i \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} n_j - \bar{p}_i \right) dS$$

$$+ \int_V \left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \right)_{,j} + \bar{F}_i \right] u_i dV \tag{4.2}$$

(4.1) 式和 (4.2) 式当然亦可由普通的Lagrange乘子法得出，它们之中的三类变量 σ_{ij}，e_{ij}和u_i都是独立的。它们的一阶变分为零相当于非线性小变形时的全套方程和边界条件，即

在体积V内的平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \tag{4.3}$$

在体积V内的应变和位移的关系式

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{4.4}$$

在体积V内的应力和应变的关系式

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{4.5a}$$

或

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij} \tag{4.5b}$$

以及边界条件：

在S_u上：$u_i = \bar{u}_i$ (4.6)

在S_σ上：$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i$ (4.7)

非线性弹性小变形时的泛函Π_1^*及Π_2^*亦有等价定理，将 (4.1) 式和 (4.2) 式相减，我们得

$$\Pi_1^* - \Pi_2^* = \int_{S_u} \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) n_j \bar{u}_i dS - \int_V \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) dV$$

$$+ \int_{S_\sigma} \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) n_j u_i dS + \int_V u_i \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \right)_{,j} dV \tag{4.8}$$

上式说明当应力应变关系作为约束时，非线性小变形的两个广义变分原理是等价的。显然，只要令$A = a_{ijkl} e_{ij} e_{kl}/2$和$B = b_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}/2$，则 (4.8) 式对线弹性小变形亦成立，这也就是说，小变形线弹性理论亦有等价定理成立。

五、主 要 结 果

1. 本文求得了有三类独立自变函数σ_{ij}，e_{ij}和 u_i 的大变形非线性弹性力学的两个广义变分原理。当应力应变关系作为约束条件时，这两个广义变分原理所对应的两个仅有两类自变函数（例如σ_{ij}和u_i）的广义变分原理是等价的。

2. 本文求得的大变形非线性弹性力学的两个广义变分原理 (2.13) 和 (2.18) 之所以是有三类独立自变函数的广义变分原理，是由于在求相应泛函时用 Lagrange 乘子法消除了 (2.1) ～ (2.5) 式的所有约束。同理，广义变分原理 (4.1) 和 (4.2) 也是具有三类独立

自变函数的关于非线性弹性小变形的广义变分原理，因为它们也是由 Lagrange 乘子法解除了 (4.3) ～ (4.4) 式的约束而求得，它们对应的泛函分别为

$$\Pi_1=\int_V(-A+B+\bar{F}_iu_i)dV-\int_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_jdS+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS$$
$$+\int_V\lambda_{ij}^{(1)}\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)dV+\int_{S_u}\beta_i^{(1)}(u_i-\bar{u}_i)dS+\int_V\alpha_{ij}^{(1)}\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV+\int_{S_\sigma}\alpha_i^{(1)}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS+\int_V\mu_i^{(1)}(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)dV \tag{5.1}$$

和

$$\Pi_2=\int_V(-A+B+\bar{F}_iu_i)\,dV-\int_{S_u}\bar{u}_i\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_idS+\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS$$
$$+\int_V\lambda_{ij}^{(2)}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)dV+\int_{S_u}\beta_i^{(2)}(u_i-\bar{u}_i)dS$$
$$+\int_V\alpha_{ij}^{(2)}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV+\int_{S_\sigma}\alpha_i^{(2)}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-\bar{p}_i\right)dS$$
$$+\int_V\mu_i^{(2)}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]dV \tag{5.2}$$

其中 $\lambda_{ij}^{(1)}$，…，$\mu_i^{(2)}$ 为10个Lagrange乘子．为了节省篇幅，本文未列出这些运算过程．

3．因此，我们可得：

大变形非线性弹性理论的广义变分原理：设σ_{ij}，e_{ij}和u_i为不受任何限制的自变函数，则大变形非线性弹性理论的精确解使泛函 (2.13) 或泛函 (2.14) 或泛函 (2.18) 取驻值．

非线性弹性理论小变形的广义变分原理：设σ_{ij}，e_{ij}和u_i为不受任何限制的自变函数，则非线性小变形弹性理论的精确解使泛函 (4.1) 或泛函 (4.2) 取驻值．

线弹性小变形弹性理论的广义变分原理：当$A(e_{ij})=2^{-1}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$，$B(\sigma_{ij})=2^{-1}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$，其中$a_{ijkl}$和$b_{ijkl}$为常数时，如$\sigma_{ij}$，$e_{ij}$和$u_i$为不受任何限制的自变函数，则线弹性小变形弹性理论的精确解使泛函 (4.1) 或泛函 (4.2) 取驻值．

4．本文中所有的广义变分原理，均可以根据文献[9]的思路求得．长沙铁道学院黄速建[1)]即曾根据文[9]的思路求得过另一种不同于本文的大变形线弹性理论的广义变分原理．在本文中，对于此同一问题，我们有：

大变形线弹性理论的广义变分原理：当$A(e_{ij})=a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}/2$，$B(\sigma_{ij})=b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2$，其中$a_{ijkl}$和$b_{ijkl}$均为常数时，如$\sigma_{ij}$，$e_{ij}$和$u_i$为不受任何限制的自变函数，则大变形线弹性理论的精确解使泛函 (2.13) 或泛函 (2.14) 或泛函 (2.18) 取驻值．

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，机械工程学报，15，2，(1979)，1—23．

[2] 钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷，力学学报(1983)，325—340．

---

1) 已由本文作者于1986年推荐到《应用数学和力学》

[3] 钱伟长, Incompatible elements and generalized variational principles, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, 24 (1984), 93—153.
[4] 钱伟长, 高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理, 应用数学和力学, 4, 2, (1983), 137—150.
[5] 钱伟长, 大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理, 应用数学和力学, 9, 1, (1988), 1—11.
[6] 钱伟长, 《钱伟长科学论文选集》, 福建教育出版社, 福州 (1989).
[7] Synge, J.L. and W. Z. Chien, The Intrinsic theory of elastic shells and plates, *Th. Von Kármán Anniversary Volume* (1940), 103—120.
[8] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, London (1968).
[9] 薛大为, 建立广义变分原理的一种方法, 应用数学和力学, 6, 6 (1985), 481—488.

Generalized Variational Principles on Nonlinear Theory of Elasticity with Finite Displacements

Hsueh Dah-wei

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

Two generalized variatinal principles on nonlinear theory of elasticity with finite displacements in which the σ_{ij}, e_{ij} and u_i are all three kinds of independent functions are suggested in this paper. It is proved that these two generalized variational principles are equivalent to each other if the stress-strain relation is satisfied as constraint. Some special cases, i. e. generalized variational principles on nonlinear theory of elasticity with small deformation, on linear theory with finite deformation and on linear theory with small deformation together with the corresponding equivalent theorems are also obtained. All of them are related to the three kinds of independent variables.

Key words finite displacement, nonlinear theory of elasticity generalized variational principle, three kinds of independent variables