

文章编号: 1000-0887(2005) 01-0077-06

# 简单剪切有限塑性内时理论分析\*

江五贵<sup>1,2</sup>, 黄明挥<sup>2</sup>

(1. 南昌航空工业学院 材料系, 南昌 330034; 2. 南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330029)

(我刊原编委何福保推荐)

摘要: 在有限塑性内时理论中引入 Jaumann 率、广义 Jaumann 率、扶率及 Wu 率, 并以此分析了简单剪切大变形问题。结果验证了简单剪切变形中, 采用次弹性或内时刚塑性材料的 Jaumann 率客观模型, 随单调递增的剪切变形剪切应力和法向应力都会出现振荡现象。这说明振荡现象的出现不取决于弹塑性模型, 而与选取不同的客观率有很大的关系。同时指出在简单剪切大变形时, 法向应力并不为零。

关键词: 有限变形; 内时理论; 简单剪切振荡; 客观率

中图分类号: O344.3 文献标识码: A

## 引 言

近年来, 材料经历有限变形时的应力应变关系引起了许多数学工作者、力学工作者及工程界工作者的重视, 并且在现象学逼近和物理逼近方面获得了很大的发展。利用连续介质力学和塑性力学来促进现象学的发展有它的优势, 它可以通过由此获得的简单方程同与此对应的物理理论相比较, 从而解决复杂问题。

大多数现象学取决于共旋率的定义。在有限变形过程中, 应力的物质导数不具备客观性, 为了解决这个问题, Jaumann 首先提出了有名的 Jaumann 客观率。Dienes (1919) Nagtegaal 和 De Jong (1982) 等意外发现常用的有限变形线性随动强化模型随单调递增的剪切应变出现剪切振荡现象, 而这种现象是不可能发生的。随后 Green\_Naghdi, Sower\_Chu 和扶等发展了一系列的客观率<sup>[1]</sup>, Wu 从内时理论提出 Wu 客观率, 并分析了薄壁圆管的扭转问题<sup>[2]</sup>, 陈讨论了次弹性材料简单剪切现象及弹塑性本构的限制条件<sup>[3]</sup>。内时理论从一出现就倍受争议, 然而它深厚的理论基础还是引起了大家的注意, 并且它无须通过经验假设, 可直接从数学上退化到经典塑性中的各种强化模型<sup>[4]</sup>。

在内时理论分析中, 其材料常数的确定较为繁琐, 这也制约了该理论体系在工程界的应用。Valanis 和范镜泓等采用分段拟合的方法<sup>[4]</sup>, 本文则利用 MATLAB 进行数据拟合, 得到了很好的结果, 并且使用也很简单。结果验证了简单剪切变形中, Jaumann 率客观模型随单调递

\* 收稿日期: 2002\_05\_09; 修订日期: 2004\_07\_07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19762002); 江西省自然科学基金资助项目; 教育部骨干教师基金资助项目; 江西省材料中心基金资助项目

作者简介: 江五贵(1975—), 男, 江西婺源人, 博士, 讲师(联系人。Tel: + 86\_791\_8211519, Fax: + 86\_791\_8224727; E\_mail: michaeljiangw@ sina. com)。

增的剪切变形, 剪切应力和法向应力会出现振荡现象。相比于 Jaumann 率, 扶率、广义 Jaumann 率和 Wu 率满足弹塑性本构模型限制性条件, 同实验吻合较好。这说明了振荡现象的出现不取决于弹塑性模型, 而与不同的客观率有很大的关系。同时指出在简单剪切大变形时, 法向应力并不为零。

## 1 旋率和应力本构导数

假设应力的演化率为

$$\dot{T} = \overset{*}{T} + T\Omega - \Omega T, \quad (1)$$

$T$  为 Cauchy 应力张量,  $\overset{*}{T}$  为应力本构导数, 分别可为 Jaumann 本构导数, 广义 Jaumann 本构导数, Sowerby-Chu 本构导数, Wu 本构导数及扶本构导数等, 其相应的旋率  $\Omega$  分别记为  $W^J$ 、 $W^{GJ}$ 、 $W^{SC}$ 、 $W^W$  及  $W^F$ , 定义如下:

$$W^J = (L - L^T)/2, \quad L = D + W, \quad D^J = (L + L^T)/2, \quad (2)$$

$D$  为变形率, 为客观率。上式  $W^J = W$

$$W^{GJ} = R \cdot R^T, \quad F = R \cdot U = V \cdot R, \quad (3)$$

其中  $F$  为变形梯度,  $R$  为旋转张量,  $W^{GJ}$  为相对旋率。

$$W^F = W + W^D, \quad W^D = De - e - e - eD, \quad (4)$$

$W^D$  是变形率  $D$  在非主向上的旋率  $W^F$  上的贡献,  $e$  为非主向的物质矢量线方向。

$$W^W = W - W^P, \quad (5)$$

其中  $W^P$  塑性旋率,

$$W^P = K(\alpha D - D\alpha), \quad K = C_1/S_y f(z), \quad (6)$$

其中,  $C_1$  为材料参数, 其他符号说明见下面的篇幅。

## 2 有限塑性内时理论

假定材料塑性不可压缩, 据 Valanis(1980) 所提出的内时理论, 小变形的内时本构方程为:

$$S = S_y d\varepsilon^P/dz + \int_0^z \rho(z - z') (d\varepsilon^P/dz') dz', \quad (7)$$

其中  $S$  为偏应力张量;  $\varepsilon$  为应变;  $\varepsilon^P = \varepsilon - S/(2G)$  是塑性应变;  $G$  是剪切模量;  $S_y = \sqrt{2} \tau_y$ , 其中  $\tau_y$  为剪切中的初始屈服应力;  $\rho(z)$  是核函数;  $z$  为记载塑性变形历史的内蕴时间。上式可写为

$$S - \alpha = S_y d\varepsilon^P/dz = S_y f(z) d\varepsilon^P/d\zeta, \quad (8)$$

其中  $f(z) = d\zeta/dz = c - (c - 1)e^{-\beta z}$ ,  $(9)$

$$d\zeta = d\varepsilon^P \cdot d\varepsilon^P. \quad (10)$$

背应力  $\alpha$  表示为

$$\alpha = \int_0^z \rho(z - z') \frac{d\varepsilon^P}{dz'} dz'. \quad (11)$$

从(8)式可得

$$d\varepsilon^P = S_y^{-1}(S - \alpha) dz. \quad (12)$$

把上面的模型扩展到有限变形领域。式(10)和(12)可写为,

$$\zeta^2 = D \cdot D, \quad (13)$$

$$D = S_y^{-1}(S - \alpha) z \gg \quad (14)$$

简单起见, 取核函数

$$\rho(z) = \mu_1 e^{-\lambda_1 z} + \mu_2 \quad (15)$$

$$\rho(0) = \mu_1 + \mu_2 \quad (16)$$

式(11)可表示为

$$\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}, \quad (17)$$

其中

$$\alpha^{(1)} = \mu_1 \int_0^z e^{-\lambda_1(z-z')} \frac{D}{z'} dz', \quad (18)$$

$$\alpha^{(2)} = \mu_2 \int_0^z \frac{D}{z'} dz'. \quad (19)$$

应力的客观率为应力在物质标架下的物质导数, 有

$$\alpha = \frac{d\alpha}{dz} dz = z \left[ \rho(0) \frac{D}{z} - \lambda_1 \alpha^{(1)} \right] = (\mu_1 + \mu_2) D - \lambda_1 \alpha + \lambda_1 \alpha^{(2)} z \quad (20)$$

式(20)就是为用塑性变形率  $D$ , 背应力  $\alpha$  和内蕴时间  $z$  表示的背应力演化方程。

### 3 简单剪切大变形分析

简单剪切运动方程能够表示为<sup>[5]</sup>

$$x = X + r(t)X_2 \quad (21)$$

变形率  $D$ , 旋率  $W$  和旋转张量  $R$  分别为

$$D = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中  $\theta = \arctan(r/2)$ 。

应用式(1)与式(20),

$$\alpha = \alpha - \alpha \Omega + \Omega \alpha = (\mu_1 + \mu_2) D - \lambda_1 \alpha + \lambda_1 \alpha^{(2)} z - \alpha \Omega + \Omega \alpha \quad (23)$$

上式, 旋率  $\Omega$  分别可取为  $W^J$ 、 $W^{GJ}$ 、 $W^W$  及  $W^F$  等。我们不妨取扶旋率  $W^F$

$$W^F = \frac{r}{1+r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

注意到, 对于简单剪切变形, 由式(19),  $\alpha^{(2)}$  可直接积分为

$$\alpha^{(2)} = \mu_2 \varepsilon^P, \quad (25)$$

其中  $\varepsilon^P$  为塑性 Cauchy 应变张量。

据式(9),

$$z = \frac{\dot{\zeta}}{f(z)} = \frac{\dot{\zeta}}{c - (c-1)e^{-\beta z}}, \quad (26)$$

$$dz = \frac{d\zeta}{f(z)} = \frac{d\zeta}{c - (c-1)e^{-\beta z}} = \frac{\|d\varepsilon^P\|}{c - (c-1)e^{-\beta z}} = \frac{dr}{\sqrt{2}(c - (c-1)e^{-\beta z})}. \quad (27)$$

(23)式可写为

$$\alpha_1 = -\lambda_1 \alpha_{11} z + 2r \alpha_{12} / (1+r^2), \quad (28)$$

$$\alpha_2 = (\mu_1 + \mu_2) \frac{r}{2} - \lambda_1 \alpha_{12} z + \lambda_1 \mu_2 \frac{r}{2} z + \frac{r}{1+r^2} (\alpha_{22} - \alpha_{11}), \quad (29)$$

$$\alpha_3 = -\lambda_1 \alpha_{22} z - 2r \alpha_{12} / (1+r^2). \quad (30)$$

考虑初始背应力  $\alpha$ , 则有  $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ , (29) 式可写为,

$$\alpha_{12} = (\mu_1 + \mu_2) \frac{r}{2} - \lambda_1 \alpha_{12z} + \lambda_1 \mu_2 \frac{r}{2} z > \frac{2r}{1+r^2} \alpha_{11} \cdot \quad (31)$$

把(28)、(31)写成增量形式

$$d\alpha_{11} = -\lambda_1 \alpha_{11} dz + (2r/(1+r^2)) \alpha_{12} dr, \quad (32)$$

$$d\alpha_{12} = \left[ (\mu_1 + \mu_2) \frac{1}{2} - \frac{2r}{1+r^2} \alpha_{11} \right] dr + \left[ -\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_1 \mu_2 \frac{r}{2} \right] dz \cdot \quad (33)$$

当  $\Omega = W^J$  及  $\Omega = W^W$  同理可求得

$$d\alpha_{11}^J = -\lambda_1 \alpha_{11}^J dz + \alpha_{12}^J dr, \quad (34)$$

$$d\alpha_{12}^J = \left[ (\mu_1 + \mu_2)(1/2) - \alpha_{11}^J \right] dr + \left[ -\lambda_1 \alpha_{12}^J + \lambda_1 \mu_2 (r/2) \right] dz, \quad (35)$$

$$d\alpha_{11}^W = -\lambda_1 \alpha_{11}^W dz + 2 \left[ 1/2 - K\alpha_{11}^W \right] \alpha_{12}^W dr, \quad (36)$$

$$d\alpha_{12}^W = \left[ (\mu_1 + \mu_2) \frac{1}{2} - 2 \left[ \frac{1}{2} - K\alpha_{11}^W \right] \alpha_{11}^W \right] dr + \left[ -\lambda_1 \alpha_{12}^W + \lambda_1 \mu_2 \frac{r}{2} \right] dz \cdot \quad (37)$$

以上求得背应力  $\alpha$  后, 利用(7) 式求得偏应力  $S$

$$S = \alpha + S_y (d\epsilon^P/dz) = \alpha + S_y f(z) (d\epsilon^P/dz) \cdot \quad (38)$$

### 4 理论与实验数据比较

为了便于比较, 本文列出用次弹性模型给出的几种背应力表达式。其客观应力率为

$$T = 2\mu D \cdot \quad (39)$$

$\Omega = W^J$  时,

$$S_{11} = \alpha_{11} = \mu [1 - \cos(2\tan\theta)] = -S_{11} = -\alpha_{22}, \quad (40)$$

$$\sigma_{12} = S_{12} = (\sqrt{2}/2) k_0 + \alpha_{12} = (\sqrt{2}/2) k_0 + \mu \sin(2\tan\theta) \cdot \quad (41)$$

$\Omega = W^{GJ}$  时,

$$S_{11} = \alpha_{11} = 2\mu [\cos(2\theta) \ln(\cos\theta) + \sin(2\theta) - \sin^2\theta] = -S_{11} = -\alpha_{22}, \quad (42)$$

$$\sigma_{12} = S_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} k_0 + \alpha_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} k_0 + \mu \cos(2\theta) [\theta - 2\tan(2\theta) \ln(\cos\theta) - \tan\theta], \quad (43)$$

其中  $k_0$  为材料参数。

- 实验结果
- ▲— Fu 率内时模型
- Wu 率内时模型
- Jaumann 率次弹性模型
- ◆— 广义 Jaumann 率次弹性模型

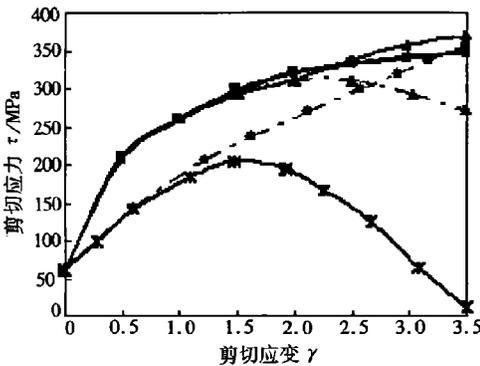


图 1 客观模型的剪切应力应变关系曲线

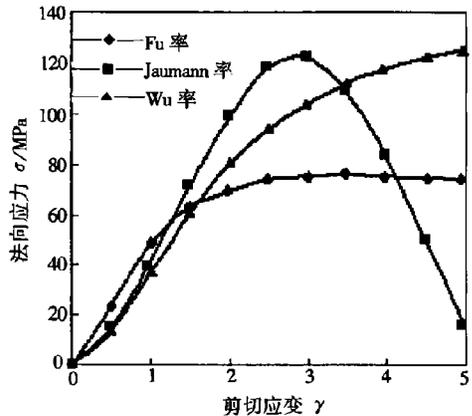


图 2 法向应力剪切应变曲线

在内时理论分析中, 其材料常数的确定较为繁琐, 这也制约了该理论体系在工程界的应用。Valanis 和范镜泓等采用分段拟合的方法<sup>[4]</sup>, 鉴于核函数在  $z = 0$  的领域内从充分大迅速衰减, 而在该区域内强化函数变化十分缓慢的特点, 利用该区域的实验数据, 取  $f(z) = 1$ , 先拟合  $S_y$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\lambda_1$  及  $C_1$ , 然后利用经历较大塑性变形的数据拟合  $c$  和  $\beta$ 。然而对于大变形问题, 材料经历很大的塑性变形, 当采用客观率模型时, 采用上述方法拟合的常数用来分析大变形问题时偏差较大, 无法获得全局最优解。利用 Matlab 进行数据拟合, 得到了很好的结果, 并且使用也很简单, 可直接由增量计算式 (35)、(36), 取目标函数为

$$f = \sum (\sigma_{\text{计算}} - \sigma_{\text{实测}})^2 \quad (44)$$

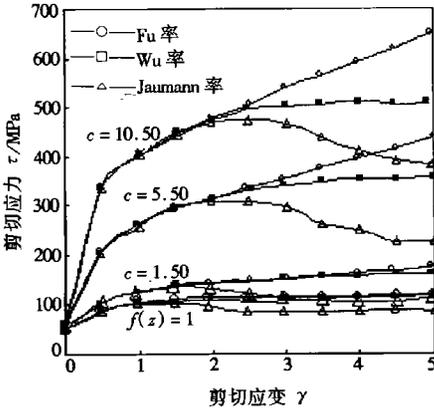


图 3 c 对应力应变曲线的影响

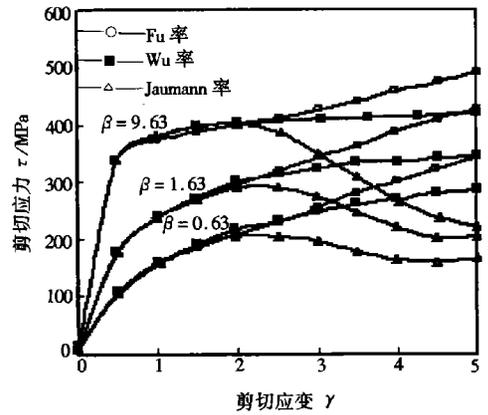


图 4 beta 对应力应变曲线的影响

由于材料常数  $S_y$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\lambda_1$ 、 $c$ 、 $\beta > 0$ , 约束方程为

$$- \text{Vari} + PE \leq 0, \quad (45)$$

其中变量 Vari 可为  $S_y$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\lambda_1$ 、 $c$ 、 $\beta$ ; PE 为一正无穷小量。

对材料 70: 30 黄铜的实验数据 (Im 和 Atluri (1987) 通过简单扭转实验获得<sup>[6]</sup>) 进行拟合。对应于不同的客观本构模型都应有不同的材料常数, 简单起见, 在此选用相同的常数。当选取次弹性模型时,  $k_0 = 85 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 146 \text{ MPa}$ 。对于内时本构模型,  $c = 5.5$ ,  $\beta = 1.636$ ,  $C_1 = 0.936$ ,  $S_y = 85 \text{ MPa}$ ,  $\mu_1 = 122.86 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $\lambda_1 = 1.325$ 。

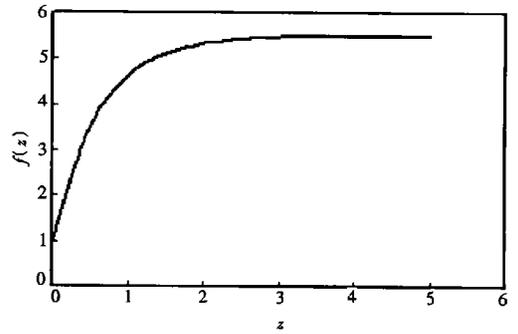


图 5  $f(z)$  随  $z$  的变化

对于现实中的弹塑性物质从任意状态开始, 经受弹性加载而后为塑性加载的变形过程, 都不能经历由软化阶段至强化阶段的变化, 从而使弹塑性物质不能出现强化和软化特性随塑性变形交替变化的现象。本文计算显示, 当选取内时本构模型或次弹性模型的 Jaumann 率时, 随单调增加的剪切应变, 剪切应力及法向应力均出现不同程度的振荡现象 (如图 1、图 2 所示), 这与我们的力学经验不符。同时也说明了振荡现象的出现不取决于弹塑性模型, 而与不同的客观率有很大的关系。图 2 说明了在简单剪切变形中, 随单调递增的剪切变形, 法向应力并不为零。

## 5 材料常数对应力应变曲线的影响

本文主要分析强化函数中  $c$  和  $\beta$  对应力应变曲线的影响, 并假定只有分析的参数在变, 从

图3,图4可知,应力应变曲线非常敏感于 $c$ 和 $\beta$ 。在有限塑性内时理论中,材料常数为 $\mu_1, \mu_2, \lambda, c, \beta$ 。 $f(z)$ 为材料的强化函数,对于小变形范围内,可近似取为1,然而当内时标度 $z$ 较大时,误差很大,如图5可知,当 $z$ 较大时,假设 $f(z) = 1$ 是不恰当的。以下的分析材料常数取为上面所计算的70-30黄铜材料值,并只假定分析的参数在变。

## 6 结 论

本文在有限塑性内时理论中引入多种客观率,并以此分析了简单剪切大变形问题。结果验证了在简单剪切变形中,Jaumann率客观模型随单调递增的剪切变形,剪切应力和法向应力会出现振荡现象,这说明振荡现象的出现不取决于弹塑性模型,而与不同的客观率有很大的关系。同时指出在简单剪切大变形时,法向应力并不为零。本文利用Matlab拟合内时材料常数,得到了很好的结果,使用也很简单,可直接在工程界使用。

### [参 考 文 献]

- [1] 杨德品,扶名福.连续介质力学[M].南昌:江西高校出版社,1992.
- [2] Wu H C, Lu J K, Pan W F. Endochronic equations for finite plastic deformation and application to metal tube under torsion[J]. Int J Solids Structures, 1995, 32(8/9): 1079-1097.
- [3] 陈良森,赵兴华,扶名福.简单剪切振荡现象及弹塑性本构的限制条件[J].应用数学和力学,1999, 20(6): 559-568.
- [4] 范镜泓,高芝晖.非线性连续介质力学基础[M].重庆:重庆大学出版社,1987.
- [5] 扶名福,杨德品,黄模佳.有限变形模糊塑性损伤弹塑性[M].北京:航空工业出版社,1995.
- [6] Im S, Atluri S N. A study of two finite strain plasticity models: an internal time theory using model's director concept and general isotropic/kinematic hardening theory[J]. Int J Plasticity, 1987, 3(2): 163-191.

## Analysis of Simple Shear Endochronic Equations for Finite Plastic Deformation

JIANG Wu-gui<sup>1,2</sup>, HUANG Ming-hui<sup>2</sup>

(1. Department of Material Science and Engineering, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, P. R. China;

2. Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P. R. China)

**Abstract:** Jaumann rate, generalized Jaumann rate, Fu rate and Wu rate were incorporated into endochronic equations for finite plastic deformation to analyze simple shear finite deformation. The results show that an oscillatory shear stress and normal stress response to a monotonically increasing shear strain occurs when Jaumann rate objective model is adopted for hypoelastic or endochronic materials. The oscillatory response is dependent on objective rate adopted, independent on elastoplastic models. Normal stress is unequal to zero during simple shear finite deformation.

**Key words:** finite deformation; endochronic equation; simple shear oscillation; objective rate