应用数学和力学，第 12 卷第 3 期(1991年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

完全近似法的推广及其应用*

戴 世 强

（上海工业大学；上海市应用数学和力学研究所，1990年5月9日收到）

摘 要

本文提出完全近似法的一种推广形式：引用渐近线性化的概念，通过对坐标作包含因变量的非线性泛函的变换，把原有的非线性问题线性化，从而以首项渐近解和相应的坐标变换给出原问题的较高阶的近似解析解．对模型方程和若干弱非线性振动和波动问题的分析表明，本文提出的方法是简捷而有效的．

关键词 摄动法 完全近似法 渐近线性化 非线性波 非线性振动

一、引 言

正如Л．И．Седов 院士所指出的[1]，“高速电子计算机的应用大大增加了理论上近似求解具体问题的可能性，使人们有可能揭示所求得的一系列解的各种特性，并可用来迅速地进行大容量的计算和对所得到的信息进行数据处理．有鉴于此，解析的研究方法保持着它们的头等重要的意义，并且显得越来越重要．显然，求解各种问题的有效的公式化方法将来仍会是卓有成效的、有益的．”作者认为，这一真知灼见值得我们重视．

综观力学中非线性方程问题求解的解析方法研究，大致有三个方向．一是对问题的自变量和因变量进行变换，把物理空间中的非线性控制方程变成新自变量的辅助空间中的线性方程，例如速度图法、锥型流法、逆散射法等等；二是通过适当选择摄动参数，以渐近级数形式来构造问题的解，渐近方法即属于此类；三是把上述两个方向的特征结合起来，形成一系列有效的方法，例如变形坐标法、匹配法、平均法、加速收敛法、自模解法等等，正因为如此，这第三个方向引起了人们的广泛注意（参看[2～4]）．

А．Н．Панченков[5,6] 和 Г．Ф．Сигалов[7,8] 在研究气体动力学问题（特别是近声速气流问题）时，选用了同时包含自变量和因变量的常系数线性坐标变换，使得速度势的非线性方程渐近地线性化，从而在较低阶的近似（通常是首项近似）下得到了准确度较高的、较完全的近似解．据此，他们将这一方法命为完全近似法（Метод полной аппроксимации），并成功地用于求解二维、三维的定常或非定常的近声速气流问题．实际上，这一方法是PLK方的一种推广形式．

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文．国家自然科学基金和上海市自然科学基金资助的课题．

经过分析研究，我们发现А. Н. Панченков 和 Г. Ф. Сигалов 的完全近似法可作进一步推广。他们选取的含因变量的常系数线性变换限制了方法的应用范围。我们对原有坐标作更为一般的含因变量的非线性泛函形式变换，其中可以包含各种微分、积分算子，在对所研究的非线性问题进行渐近线性化处理时确定变换的具体形式，从而以线性化近似的低阶解和坐标的渐近变换给定具有较高准确度的解。下节叙述我们的修正的完全近似法的一般形式，然后分析一个模型方程来阐述方法的要旨和可用性，最后给出几个例子，阐释本方法在求解弱非线性振动和波动问题中的应用。这些分析表明，我们的方法是有效的，可望应用于更复杂的非线性问题。

二、方　　法

我们研究如下的弱非线性问题：

$$\begin{cases} L[u(x)]+\varepsilon N[u(x),\ \varepsilon]=0 & (x\in\Omega) \\ B[u(x)]=f(x) & (x\in\partial\Omega) \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 L：线性算子；N：非线性算子；B：边界算子；x：向量或标量；$f(x)$：已知函数；ε：小参数$(0<\varepsilon\ll 1)$. 引进变换

$$\begin{cases} u=u(\xi)+O(\varepsilon^{N+1}) \\ x=\xi+\sum\limits_{n=1}^{N}\varepsilon^n F_n[u(\xi)]+O(\varepsilon^{N+1}),\quad F_n[u(\xi)]\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $F_n[u(\xi)](n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 为待定的非线性泛函。在变换(2.2)下，(2.1)变成

$$\begin{cases} L[u(\xi)]+\sum\limits_{n=1}^{N}\varepsilon^n L_n[u(\xi),\ F_1,\ \cdots,\ F_n]=O(\varepsilon^{N+1}) & (\xi\in\Omega) \\ B[u(\xi)]=f(\xi) & (\xi\in\partial\Omega) \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 L_n 为由计算求得的算子。

引用渐近线性化的概念，把(2.3)近似到$O(\varepsilon^N)$线性化，即令(2.3)中ε^n 的系数为零：

$$\begin{cases} L_n[u(\xi),\ F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n]=0 & & (\xi\in\Omega) \\ & (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N) & \\ F_n[u(\xi)]=0 & & (\xi\in\partial\Omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

依次求得$F_n[u(\xi)]$，并求出线性化问题

$$L[u(\xi)]=0\qquad (\xi\in\Omega),\qquad B[u(\xi)]=f(\xi)\qquad (\xi\in\partial\Omega) \tag{2.5}$$

的解，将所求得的$u(\xi)$ 和 $F_n[u(\xi)]$ 代入(2.2)，就可求出原问题的准确到$O(\varepsilon^N)$的解。

三、模 型 方 程

为了阐释上节中的方法，我们来研究如下的模型方程[9,10]：

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1),\ y(1)=b>0 \tag{3.1}$$

假设在解域内 Wasow 准则成立[9]，即当 $x\in[0,\ 1]$时，$q(x)$和$r(x)$ 正则，$q(x)y(x)-r(x)\neq 0$，且$q(0)\neq 0$。

如果用正则摄动法求解，则一般会在 $x=0$ 处出现不应有的奇性，因此引进变换

$$\left\{\begin{array}{l} y=y(\xi)+O(\varepsilon^2) \\ x=\xi+\varepsilon F[y]+O(\varepsilon^2),\ F[y(1)]=0 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

(3.1)就变成

$$\left\{\begin{array}{l} \xi\dfrac{dy}{d\xi}+q(\xi)y-r(\xi)+\varepsilon\Big\{(qy-r)\dfrac{dF}{d\xi}+\Big[\dfrac{dy}{d\xi}+q'(\xi)y \\ \qquad -r'(\xi)\Big]F+y\dfrac{dy}{d\xi}\Big\}=O(\varepsilon^2) \\ y(1)=b \end{array}\right. \tag{3.3}$$

渐近线性化后，我们有

$$\xi dy/d\xi+q(\xi)y=r(\xi),\ y(1)=b \tag{3.4}$$

其解为 $$y=\exp\left(-\int_1^\xi\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi\right)\left[\int_1^\xi\frac{r(\xi)}{\xi}\exp\left(\int_1^\xi\frac{q(s)}{s}ds\right)d\xi+b\right] \tag{3.5}$$

令(3.3)中 ε 的系数为零，并利用(3.4)，我们得到F应满足的方程：

$$\frac{dF}{d\xi}+\left[\frac{q-1}{\xi}+\frac{(qy-r)'}{qy-r}\right]F=\xi^{-1}y,\ F|_{\xi=1}=0 \tag{3.6}$$

其解为 $$F=\frac{1}{qy-r}\exp\left[-\int_1^\xi\frac{q-1}{\xi}d\xi\right]\int_1^\xi\xi^{-1}y(qy-r)\exp\left[\int_1^\xi\frac{q-1}{\xi}d\xi\right]d\xi \tag{3.7}$$

把(3.5)和(3.7)代入(3.2)即得所求的解。

令 $q\equiv1$，$r\equiv0$，$b=1$，即为著名的钱学森例子[11]，这时我们有

$$y=\frac{1}{\xi},\ x=\xi+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{y}-y\right)=\frac{1}{y}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{y}-y\right) \tag{3.8}$$

这正是原问题的精确解。

令 $q=2+x$，$r\equiv0$，$b=e^{-1}$，则有

$$\left\{\begin{array}{l} y=\xi^{-2}\exp[-\xi]+O(\varepsilon^2) \\ x=\xi+\dfrac{\varepsilon\xi}{2+\xi}\displaystyle\int_1^\xi\xi^{-4}\exp[-\xi](2+\xi)d\xi+O(\varepsilon^2) \end{array}\right. \tag{3.9}$$

此结果的形式与用 PLK 方法所得的解略有区别，但仍有

$$x=0\text{时：}\ \xi\doteq(\varepsilon/3)^{1/3},\ y\doteq(3/\varepsilon)^{2/3} \tag{3.10}$$

与用LKP方法求得的结果一致[9]。

由上述可见，我们的方法的优点在于，对于满足Wasow准则的系数 q 和 r，用首项展开解和相应的变换，给出了一般形式的解。

四、应　用

本节我们列举若干例子，说明修正的完全近似法在求解弱非线性振动和波动问题中的应用。

4.1. 单自由度弱非线性振动

考虑如下问题：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\varepsilon f\left(y,\frac{dy}{dt}\right);\ y(0)=a;\ \frac{dy}{dt}(0)=0 \tag{4.1}$$

其中 $f(y,dy/dt)$ 为宗量的非线性函数．令

$$\begin{cases} y=y(\tau)+O(\varepsilon^2) \\ t=\tau+\varepsilon F[y(\tau)]+O(\varepsilon^2), \quad F[y(0)]=0 \end{cases} \tag{4.2}$$

于是原问题化为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{d\tau^2}+y-\varepsilon\left[\dfrac{dy}{d\tau}\dfrac{d^2F}{d\tau^2}+2\dfrac{d^2y}{d\tau^2}\dfrac{dF}{d\tau}+f\left(y,\dfrac{dy}{d\tau}\right)\right]=O(\varepsilon^2) \\ y(0)=a, \qquad \dfrac{dy}{d\tau}(0)=0 \end{cases} \tag{4.3}$$

渐近线性化要求

$$\frac{dy}{d\tau}\frac{d^2F}{d\tau^2}+2\frac{d^2y}{d\tau^2}\frac{dF}{d\tau}=-f\left(y,\frac{dy}{d\tau}\right) \tag{4.4}$$

其解为

$$F=-\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\left[\dfrac{dy}{d\tau_1}(\tau_1)\right]^2}\int_0^{\tau_1}\frac{dy}{d\tau}f\left(y,\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau \tag{4.5}$$

其中 y 满足

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+y=0, \quad y(0)=a; \quad \frac{dy}{d\tau}(0)=0 \tag{4.6}$$

因此有

$$y=a\cos\tau \tag{4.7}$$

将(4.7)和(4.5)代入(4.2)，即得到问题的准确到$O(\varepsilon)$的解。利用(4.6)及其初积分，也可将F写成

$$F[y]=-\int_a^y \frac{dy_1}{a^2-y_1^2}\int_a^{y_1} f(y, \sqrt{a^2-y^2})dy \tag{4.8}$$

令 $f=-y^3$，(4.1)即为 Duffing 方程，容易算得

$$F=-\frac{3}{8}a^2\tau-\frac{1}{16}a^2\sin 2\tau \tag{4.9}$$

代入(4.2)，可求得

$$\begin{cases} y=a\cos\tau+O(\varepsilon^2) \\ \tau=T+\dfrac{\varepsilon a^2}{16}\sin 2T+O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{4.10}$$

其中

$$T=(1+3\varepsilon a^2/8)t \tag{4.11}$$

(4.11)也可写成

$$y=a\cos T+32^{-1}a^3(\cos 3T-\cos T)\varepsilon+O(\varepsilon^2) \tag{4.12}$$

与用其它方法所得的结果一致[2,3]。

4.2. 非线性弹性地基上梁的自由振动

经无量纲化后，该问题可由如下方程描述[12,13]：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+w+\varepsilon\alpha w^3=0 \tag{4.13}$$

其中 w为梁的无量纲挠度，α为$+1$或-1，视弹性地基的非线性性质而定。设梁为简支的，长度为π，问题的边界条件和初始条件为

$$\begin{cases} w(0,t)=w(\pi,t)=w_{xx}(0,t)=w_{xx}(\pi,t)=0 \\ w(x,0)=a\sin x, \quad w_t(x,0)=0 \end{cases} \tag{4.14}$$

作变换：

$$\begin{cases} w=w(\xi,\tau)+O(\varepsilon^2) \\ t=\tau+\varepsilon F[w(\xi,\tau)]+O(\varepsilon^2), \quad F|_{\tau=0}=0 \\ x=\xi+\varepsilon G[w(\xi,\tau)]+O(\varepsilon^2), \quad G|_{\xi=0,\pi}=0, \quad G_{\xi\xi}|_{\xi=0,\pi}=0, \quad G_\tau|_{\tau=0}=0 \end{cases} \tag{4.15}$$

方程(4.13)就化为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}+w-\varepsilon\left[\frac{\partial^4(w_\tau F+w_\xi G)}{\partial \xi^4}+\frac{\partial^2(w_\tau F+w_\xi G)}{\partial \tau^2}\right.$$
$$\left.+(w_\tau F+w_\xi G)-\alpha w^3\right]=O(\varepsilon^2) \qquad (4.16)$$

定解条件为

$$\begin{cases} w(0,\tau)=w(\pi,\tau)=w_{\xi\xi}(0,\tau)=w_{\xi\xi}(\pi,\tau)=0 \\ w(\xi,0)=a\sin\xi,\ w_\tau(\xi,0)=0 \end{cases} \qquad (4.17)$$

渐近线性化后，准确到$O(\varepsilon)$，我们有

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}+w=0 \qquad (4.18)$$

在定解条件(4.17)下，其解为

$$w=a\sin\xi\ \cos\sqrt{2}\,\tau \qquad (4.19$$

渐近线性化条件为

$$(w_\tau F+w_\xi G)_{\xi\xi\xi\xi}+(w_\tau F+w_\xi G)_{\tau\tau}+(w_\tau F+w_\xi G)=\alpha w^3 \qquad (4.20)$$

利用(4.19)可以解得

$$w_\tau F+w_\xi G=-\frac{\alpha a^2}{5120}\{5\sqrt{2}[(15-4\sin^2\xi)\sin 2\sqrt{2}\,\tau$$
$$+720\tau]w_\tau+34(\sin 2\xi)w_\xi\} \qquad (4.21)$$

因此有

$$\begin{cases} F=-\alpha a^2\left[\frac{\sqrt{2}}{1024}(15-4\sin^2\xi)\sin 2\sqrt{2}\,\tau+\frac{9}{64}\tau\right] \\ G=-\frac{17}{2560}\alpha a^2\sin 2\xi \end{cases} \qquad (4.22)$$

将(4.19)和(4.22)代入(4.15)，我们得到

$$w=a\sin\left[x+\frac{17}{2560}\alpha a^2\varepsilon\sin 2x\right]$$
$$\cdot\cos\left[\sqrt{2}\,s+\frac{\sqrt{2}}{1024}\alpha a^2\varepsilon(15-4\sin^2 x)\sin 2\sqrt{2}\,s\right]+O(\varepsilon^2) \qquad (4.23)$$

其中 $s=1+\alpha a^2\sqrt{2}\,\varepsilon/128$ (4.24)

将(4.23)中的表达式在$(x,\sqrt{2}\,s)$附近作 Taylor 展开，所得的结果与[12]一致。

4.3. 杆中的非线性波与纵振动

考虑弹性杆中的纵波与纵振动，计及应力-应变关系中的立方非线性后，无量纲化控制方程为[14]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) \qquad (4.25$$

我们讨论振幅为小而有限的波动和振动，设$\psi=\varepsilon u$，则(4.25)可写成

$$u_{tt}-u_{xx}=-\varepsilon^2 u_x^2 u_{xx} \qquad (4.26)$$

设初始条件为

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \qquad (4.27)$$

引进特征坐标

$$\xi=x-t,\ \eta=x+t \qquad (4.28)$$

则(4.26)(4.27)可写成

$$\begin{cases} u_{\xi\eta}=\varepsilon^2(u_\xi+u_\eta)^2(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})/4 \\ u(\xi,\xi)=f(\xi),\quad u_\xi(\xi,\xi)=u_\eta(\xi,\xi) \end{cases} \tag{4.29}$$

作变换

$$\begin{cases} u=u(r,s)+O(\varepsilon^4) \\ \xi=r+\varepsilon^2P_1[u(r,s)]+O(\varepsilon^4),P_1u(r,r)=0 \\ \eta=s+\varepsilon^2P_2[u(r,s)]+O(\varepsilon^4),P_2u(r,r)=0 \end{cases} \tag{4.30}$$

代入(4.26)，得到

$$u_{rs}-\varepsilon^2\Big[\frac{\partial P_1u}{\partial s}u_{rr}+\Big(\frac{\partial P_1u}{\partial r}+\frac{\partial P_2u}{\partial s}\Big)u_{rs}+\frac{\partial P_2u}{\partial r}u_{ss}$$
$$+\frac{\partial^2P_1u}{\partial r\partial s}u_r+\frac{\partial^2P_2u}{\partial r\partial s}u_s+\frac{1}{4}(u_r+u_s)^2(u_{rr}+2u_{rs}+u_{ss})\Big]=O(\varepsilon^4) \tag{4.31}$$

渐近线性化后，有

$$u_{rs}=0,\quad u(r,r)=f(r),\quad u_r(r,\ r)=u_s(r,r) \tag{4.32}$$

其解为 $$u=[f(r)+f(s)]/2 \tag{4.33}$$

渐近线性化要求

$$\frac{\partial P_1u}{\partial s}u_{rr}+\frac{\partial P_2u}{\partial r}u_{ss}+\frac{\partial^2P_1u}{\partial r\partial s}u_r+\frac{\partial^2P_2u}{\partial r\partial s}u_s=-\frac{1}{4}(u_r+u_s)^2(u_{rr}+u_{ss}) \tag{4.34}$$

比较此式两端，求得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1u}{\partial s}=-\dfrac{1}{12}u_r^2-\dfrac{1}{4}u_ru_s-\dfrac{1}{4}u_s^2 \\ \dfrac{\partial P_2u}{\partial r}=-\dfrac{1}{4}u_r^2-\dfrac{1}{4}u_ru_s-\dfrac{1}{12}u_s^2 \end{cases} \tag{4.35}$$

从而有

$$\begin{cases} P_1u=-\displaystyle\int_r^s\Big(\frac{1}{12}u_r^2+\frac{1}{4}u_ru_s+\frac{1}{4}u_s^2\Big)ds \\ P_2u=-\displaystyle\int_s^r\Big(\frac{1}{4}u_r^2+\frac{1}{4}u_ru_s+\frac{1}{12}u_s^2\Big)dr \end{cases} \tag{4.36}$$

利用(4.33)，我们得到

$$\begin{cases} P_1u=-\dfrac{1}{48}(s-r)f'^2(r)-\dfrac{1}{16}f'(r)[f(s)-f(r)]-\dfrac{1}{16}\displaystyle\int_r^s f'^2(s)ds \\ P_2u=\dfrac{1}{48}(s-r)f'^2(s)+\dfrac{1}{16}f'(s)[f(s)-f(r)]+\dfrac{1}{16}\displaystyle\int_r^s f'^2(r)dr \end{cases} \tag{4.37}$$

将(4.33)和(4.37)代入(4.30)，即得准确到$O(\varepsilon^2)$的非线性波解，这时，弯曲的特征线近似地为

$$\begin{cases} r=x-t+\dfrac{\varepsilon}{48}\Big\{2tf'^2(x-t)+3f'(x-t)[f(x+t)-f(x-t)] \\ \qquad +3\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}f'^2(s)ds\Big\} \\ s=x+t+\dfrac{\varepsilon}{48}\Big\{-2tf'^2(x+t)-3f'(x+t)[f(x+t)-f(x-t)] \\ \qquad -3\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}f'^2(r)dr\Big\} \end{cases} \tag{4.38}$$

如果$f(x)$为x的周期函数，则可得到杆中的驻波解，即纵振动解，例如，取

$$f(x)=\sin\pi x \tag{4.39}$$

则得到长度为1的杆中的纵振动解。利用以上结果，经计算可得

$$\begin{aligned} u=&\sin\left[\pi x+\frac{\pi^2\varepsilon^2}{48}\sin 2\pi x\sin\pi t(2\pi t\cos\pi t+3\sin\pi t)\right] \\ &\cdot\cos\left\{\pi t-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{96}[2\pi t(4+\cos 2\pi x\cos 2\pi t)+3\sin 2\pi t(1+2\cos 2\pi x]\right\} \\ &+O(\varepsilon^4) \end{aligned} \tag{4.40}$$

钱伟长曾用PLK方法解过这一问题[14]，与他的结果作比较，我们发现两种渐近解的形式不同，但达到了同样的准确度。例如，我们考察$x=1/2$时的情形，钱伟长解为

$$\begin{cases} u=\cos\pi s-\dfrac{\pi^2\varepsilon^2}{32}\sin\pi s\sin 2\pi s+O(\varepsilon^4) \\ s=t\left[1-\dfrac{\pi^2\varepsilon^2}{48}(4-\cos 2\pi t)\right]+O(\varepsilon^4) \end{cases} \tag{4.41}$$

本文的结果为

$$u=\cos\left(\pi s+\frac{\pi^2\varepsilon^2}{32}\sin 2\pi t\right)+O(\varepsilon^4) \tag{4.42}$$

其中s也由(4.41)给出，容易看到二者只有细微的差别。

五、结 束 语

通过以上分析可以看到，由于引进了含因变量的非线性泛函的坐标变换，通过渐近线性化，对于各种弱非线性问题，可以用首项渐近解及相应的变换给出较准确的结果。上述例子中只给出了二阶近似结果，对于更高阶的近似，可以用类似的步骤求解。本文提出的方法可应用于更复杂的非线性问题，甚至强非线性问题，有关结果以另文发表[15]。

致谢 本文的主要部分是作者访苏期间完成的。作者曾与伊尔库茨克大学的 Г. Ф. Сигалов 教授、А. В. Диогенов 副教授、莫斯科大学的 А. Г. Васильева 教授、В. Ф. Бутузов 教授、Н. Н. Нефёдов 副教授、列宁格勒大学的 Р. Г. Баранцев 教授进行了多次有益的讨论，谨此致谢。

参 考 文 献

[1] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, *Наука*, Москва (1966).

[2] 钱伟长，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社，北京 (1981).

[3] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley, New York (1973).

[4] Kevorkian, J. and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York (1980).

[5] Панченков А. Н., Несущая поверхность в околозвуком потоке газа, Гидродинамики больших скоростей, *Киев Наука думка*, 3 (1967), 7-20.

[6] Панченков А. Н., Теория потенциала ускорений, *Новосибирск Наука* (1975).

[7] Сигалов. Г. Ф., Об одном методе решения краевой задачи газовой динамики в околозвукой области, *Ирик. Матем.* Иркутск, 1 (1969), 239—244.

[8] Сигалов Г. Ф., Метод полной аппроксимации в теории околозвуковых течений, *Изд-во Иркутского Университета*, Иркутск (1988).

[9] 戴世强, PLK方法, 见[2] (1981), 33—86.

[10] Wasow, W., *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Jnoh Wiley, New York (1965).

[11] Tsien, H. S., The Poincaré-Lighthill-Kuo method, *Advan. in Appl. Meeh.*, 4 (1956), 281—349.

[12] Han, L. S., On the free vibration of a beam on a nonlinear elastic foundation, *J. Appl. Mech.*, 32 (1965), 445—447.

[13] 杨桂通, 固体中的非线性波, 力学进展, 12 (1982), 94—104.

[14] 钱伟长, 《奇异摄动的理论》, 清华大学(1980).

[15] 戴世强, Г. Ф. Сигалов和А. В. Диогенов, 若干强非线性问题的近似解析解, 中国科学(A辑), 2 (1990), 153—162.

Generalization of the Method of Full Approximation and Its Applications

Dai Shi-qiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

This paper presents a generalized form of the method of full approximation. By using the concept of asymptotic linearization and making the coordinate transformations including the nonlinear functionals of dependent variables, the original nonlinear problems are linearized and their higher-order solutions are given in terms of the first-term asymptotic solutions and corresponding transformations. The analysis of a model equation and some problems of weakly nonlinear oscillations and waves with the generalized method shows that it is effective and straightforward.

Key words perturbation methods, methods of full approximation, asymptotic linearization, nonlinear waves, nonlinear oscillations