应用数学和力学，第 12 卷第 3 期(1991年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

求解准确的表面张力-重力波方程的新方法*

邹啟苏　陈耀松　钱宝源

（Kansas州立大学）（北京大学力学系）

摘　　要

本文提供一个求解重力和表面张力同时作用的周期前进二维非线性波的新方法．自由表面在计算域转入单位圆后用有限项 Fourier 级数表示．动力学边界条件用的是完整的非线性形式．Fourier级数的系数用Newton-Raphson方法迭代求解．这是一个精巧的方法．所用计算工作量小而结果精度高．

关键词　表面张力波　非线性波·优化方程

一、问题的数学提法

考虑在惯性坐标系中一波长为λ、传播速度为c的无限深水二维对称周期波．相对一个与波峰同时移动的坐标系流动为定常．假定是理想不可压缩无旋流体运动．于是，运动可用流体域中空间变量$z=x+iy$的复速度位势w来表示．自由面上的动力学条件就是Bernolli方程：

$$\frac{1}{2}q\bar{q}-gy+\frac{T}{\rho R}=\frac{1}{2}c^2 \tag{1.1}$$

其中　$q=u-iv$是复速度．T是表面张力，而ρ是流体密度．y以重力加速度g作用的方向为正．仿照A．I．Nekrasov[1]的方法用复速度势

$$w=\phi+i\varphi \tag{1.2}$$

以

$$w=\frac{\lambda c}{2\pi i}\ln u \tag{1.3}$$

定义u，并以它为独立变量．于是，流域在u-平面上为一单位圆（图1～3）．假定空间变量z与位势u之间有

$$\frac{dz}{du}=\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{f(u)}{u} \tag{1.4}$$

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文．蔡树棠推荐．1990年 3 月17日收到．

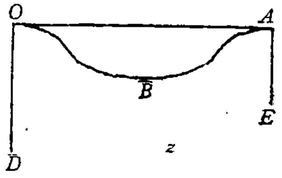

图 1

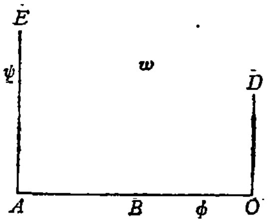

图 2

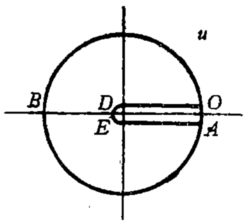

图 3

的关系$f(u)$。将$f(u)$展开成级数

$$f(u)=1+a_1u+a_2u^2+\cdots \tag{1.5}$$

它在水面$u=r\exp[i\theta]=\exp[i\theta]$的表示式为

$$\begin{aligned}f(\exp[i\theta])=f(\theta)&=1+a_1\cos\theta+a_2\cos2\theta+\cdots\\&\quad+i(a_1\sin\theta+a_2\sin2\theta+\cdots)\\&=A(\theta)+iB(\theta)\end{aligned} \tag{1.6}$$

于是，我们有

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\lambda}{2\pi}A(\theta) \tag{1.7}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\lambda}{2\pi}B(\theta) \tag{1.8}$$

和，$$q=\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{du}\Big/\frac{dz}{du}\Big|_{u=i\theta}=\frac{\lambda c}{2\pi i}\frac{1}{u}\frac{2\pi i}{\lambda}\frac{u}{f(\theta)}=\frac{c}{f(\theta)} \tag{1.9}$$

水面的曲率则是

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta}\right)\Big/\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}\\&=\frac{2\pi}{\lambda}(AB'-A'B)/(A^2+B^2)^{3/2}\end{aligned} \tag{1.10}$$

将以上各式代入Bernoulli方程(1.1)中，并对θ求微商，有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}[c^2/A^2+B^2)]\\&=2\left[\frac{g\lambda}{2\pi}B+\frac{T}{\rho}\frac{2\pi}{\lambda}(AB'-A'B)/(A^2+B^2)^{3/2}\right]\end{aligned} \tag{1.11}$$

利用Wilton引入的表面张力参数

$$\kappa=\frac{4\pi^2T}{\rho g\lambda^2} \tag{1.12}$$

和波速参数

$$\mu=\frac{2\pi c^2}{g\lambda} \tag{1.13}$$

我们得到比较紧凑的公式

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{A^2+B^2}\right)\\&=\frac{2}{\mu}B+\frac{2\kappa}{\mu}\frac{d}{d\theta}[(AB'-A'B)/(A^2+B^2)^{3/2}]\end{aligned} \tag{1.14}$$

在[0,θ]区间求积分，得

$$\frac{1}{A^2+B^2}-\frac{1}{(1+a_1+a_2+\cdots)^2}=\frac{2}{\mu}\left[a_1(1-\cos\theta)+\frac{a_2}{2}(1-\cos2\theta)+\cdots\right]$$
$$+\frac{2\kappa}{\mu}\left[(AB'-A'B)/(A^2+B^2)^{3/2}-(a_1+2a_2+\cdots)/(1+a_1+a_2+\cdots)^2\right] \tag{1.15}$$

令

$$D(\theta)=a_1(1-\cos\theta)+\frac{a_2}{2}(1-\cos2\theta)+\cdots \tag{1.16}$$

$$E=\left[1-\frac{2\kappa}{\mu}(a_1+2a_2+\cdots)\right]/(1+a_1+a_2+\cdots)^2 \tag{1.17}$$

于是，可得最后的方程式

$$G(\theta,a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$=\frac{2\kappa}{\mu}(AB'-A'B)/(A^2+B^2)^{3/2}-\frac{1}{A^2+B^2}+\frac{2}{\mu}D+E\equiv0 \tag{1.18}$$

二、数 值 算 法

我们在$f(u)$中留下$n+1$项，即包括系数$a_1,a_2,\cdots,a_n$。显然，要求它在整个 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 区域都满足方程(1.18)是不可能的。代之，转向求解下列积分J

$$J(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\int_0^{2\pi}G^2(\theta,a_1,a_2,\cdots,a_n)d\theta \tag{2.1}$$

的最小点。由此求得a_i，并将它代入 $f(u)$的公式(1.5)中，就得到我们所要求的数值解。有了它，所有的流动参数便可依次求出。图4～7是相当于$\kappa=2$而$\mu=1.0$，2.0，2.4 和2.8时的水波面曲线。

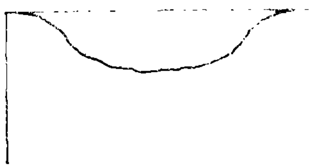

图 4

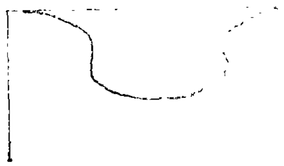

图 5

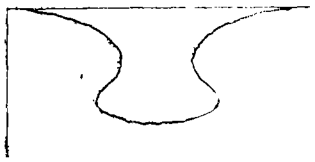

图 6

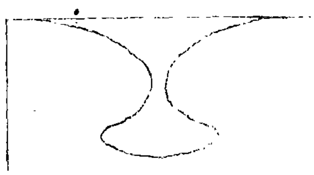

图 7

三、讨 论

我们的方法不但比[2]中的要简单，而且更准确。我们保留了谱方法的所有优点，而可得到文献[2]中的全部结果。数值计算用 PC 机，一根曲线仅花数分钟（文献[2]的计算用CYBER173大型机）。

参考文献

[1] Nekrasov, A. I., *Izv. Ivanovo-Voznesensk.*, Politekhn. Inst., 3 (1921), 52.

[2] Schwartz, L.W., Numerical solution of the exact equations for capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 95, Part 1 (1979), 119—139.

A Novel Method of Solving the Exact Equations for Capillary-Gravity Waves

Zou Qi-su

(*Kansas State University, Manhattan, Kansas, USA*)

Chen Yao-song Qian Bao-Yuan

(*Peking University, Beijing*)

Abstract

A new method is presented for the computation of two-dimensional periodic progressive surface waves propagating under the combined influence of gravity and surface tension. The nonlinear surface is expressed by Fourier series with finite number of terms, after the computational domain is transformed into a unit circle. The dynamic boundary equation is used in its exact nonlinear form and the coefficients of Fourier series are found by the Newton-Raphson method successively. This is a neat method, yielding high precision with little computational effort.

Key words Capillary wave, non-linear wave, optimization method