应用数学和力学，第8卷第12期（1987年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

随机积分和微分方程在弱拓扑下解的存在性和比较结果*

丁 协 平

（四川师范大学，1986年7月26日收到）

摘 要

在本文中，我们对非线性随机Volterra积分方程在Banach空间的弱拓扑下的随机解证明了几个存在定理．然后作为应用，我们得到了随机微分方程的弱随机解的存在定理．还得到了这些随机方程的极值随机解的存在性和随机比较定理．我们的定理改进和推广了[4,5,10,11,12]中的相应结果．

一、引 言

最近 Vaughn[1,2] 和 Lakshmikantham[3,4] 在 Banach 空间的强拓扑下得到了非线性Volterra积分方程解的存在性和比较结果．Lakshmikantham[4] 和 Mitchell, Smith[5] 在Banach空间内研究了微分方程弱解的存在性．

熟知Banach 空间内随机积分和微分方程理论已广泛应用于许多应用科学领域之中[6,7]．在[8,9]中，我们在紧性型条件下对非线性随机积分和微分方程的随机解给出了某些存在性准则，也得到了非线性随机Volterra 方程的一比较结果．在[10]中，我们对 Banach 空间内随机微分方程的弱随机解证明了几个存在性定理．这些定理推广了[1～5]中和其它人的相应结果．

在本文中，我们在 Banach 空间的弱拓扑下研究非线性随机积分和微分方程的随机解的存在性和比较结果．利用弱紧性型条件，我们在弱拓扑下对非线性随机Volterra积分方程证明了随机解的存在性定理．作为应用，我们得到了随机微分方程弱随机解的存在性定理．同时还得到了这些随机方程极值随机解的存在性和比较结果．我们的定理改进和推广了[4,5,10,11,12]中的相应结果．

二、预 备 知 识

令$(\Omega,\mathcal{A},P)$是一完备概率测度空间，$(X,\mathcal{B})$是一可测空间，其中X是一可分Banach空

* 中国科学院科学基金资助的课题．

间，$\mathscr{B}$是X的一切Borel子集的σ-代数．$CC(X)$表X的一切非空有界闭凸子集的族，$CL(X)$是X的一切非空闭子集的族．

定义2.1 称映射$E:\Omega\to CL(X)$是可测的（弱可测的），如果对每一闭（开）子集$A\subset X$

$$E^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:E(\omega)\cap A\neq\phi\}\in\mathscr{A}$$

由[13]的定理Ⅲ30，可测性和弱可测性是等价的，我们用

$$G_r(E)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X:x\in E(\omega)\}$$

表E的图．

定义2.2 称映射$x:\Omega\to X$是X-值随机变量，如果对每一$B\in\mathscr{B}$

$$x^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:x(\omega)\in B\}\in\mathscr{A}$$

定义2.3 称映射$x:\Omega\to X$是弱（或Pettis）随机变量，如果对每一$x^*\in X^*$(X的对偶空间)，$x^*(x(\omega))$是一实值随机变量．

由[6,p.16]知在我们的假设下X-值随机变量和弱随机变量是等价的．

引理2.1（[6,p.19]） 设X-值随机变量序列$\{x_n(\omega)\}$几乎处处弱收敛于$x(\omega)$，则$x(\omega)$是一X-值随机变量．

定义2.4 令$E:\Omega\to CC(X)$是可分和可测的映射，称映射$T:G_r(E)\to X$是具有随机定义域E的一弱连续随机算子，如果

（i）对每一$\omega\in\Omega,T(\omega,\cdot):E(\omega)\to X$是弱连续的，

（ii）对每一$x\in X$和$B\in\mathscr{B}$

$$\{\omega\in\Omega:\ x\in E(\omega),\ T(\omega,x)\in B\}\in\mathscr{A}$$

令$S=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$是$X$的闭单位球，$A$是$X$的一非空有界子集，我们定义$A$的弱非紧性测度$\beta$如下：

$$\beta(A)=\inf\{t>0:\text{存在弱紧子集}C\subset X\text{使得}A\subset C+tS\}$$

对弱非紧性测度β的性质，读者可参考[4,第1章]．

引理2.2（[10]） 令$T:G_r(E)\to X$是具有随机定义域E的一弱连续随机算子．如果

（i）对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot)$，$E(\omega)\to E(\omega)$

（ii）对每一$\omega\in\Omega$和$B\subset E(\omega)$

$$\beta(T(\omega,B))\leqslant\varphi(\omega,\beta(B))$$

其中$\varphi:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$，$\varphi(\omega,\cdot)$是非减的和$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(\omega,t)=0$，$\varphi^n(\omega,t)=\varphi(\omega,\varphi^{n-1}(\omega,t))$，$\forall n\geqslant 1$，$\varphi^0(\omega,t)=t$．则$T$有一随机不动点，即存在一$X$-值随机变量$x^*(\omega)\in E(\omega)$使得$x^*(\omega)=T(\omega,x^*(\omega))$，$\forall\omega\in\Omega$．

令G是X的一开子集，$J=[t_0,t_0+a]\subset R$，记

$C[\Omega\times J,G]=\{x:\Omega\times J\to G\mid\forall\omega\in\Omega,x(\omega,\cdot)$连续和$\forall t\in J,x(\cdot,t)$是$X$-值随机变量$\}$

$C^w[\Omega\times J\times J\times G,G]=\{x:\Omega\times J\times J\times G\to G\mid\forall\omega\in\Omega,K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$弱连续和$\forall(t,s,x)\in J\times J\times G,K(\cdot,t,s,x)$是$X$-值随机变量$\}$

$C[J,G]=\{x:J\to G\mid x$连续，$\|x(t)\|_J=\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|\}$．显然$(C[J,G],\|\cdot\|_J)$是一可分Banach空间．

对于抽象函数弱连续、弱可积、弱可微等概念的定义和性质，读者可参见[4,第一章]和[5,Ⅱ]．

引理2.3（[8]） 令$x_0\in C[\Omega\times J,G]$．如果对每一$\omega\in\Omega$存在$\sigma(\omega)>0$使得$S(x_0(\omega,t_0),$

$\sigma(\omega))\subset G$,($S(x,r)$表中心在x半径为$r>0$的开球),则存在一实值随机变量$\eta:\Omega\to(0,\infty)$使得$S(x_0(\omega,t_0),\ \eta(\omega))\subset G$。而且如果存在函数$\theta:\Omega\to(0,\infty)$使得$S(x_0(\omega,t_0),\theta(\omega))\subset G$,则$\eta(\omega)\geqslant\theta(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$。

引理2.4 ([8]) 令$x_0\in C[\Omega\times J,G]$和$\eta:\Omega\to(0,\infty)$是一实值随机变量,则存在一实值随机变量$\delta:\Omega\to(0,\infty)$使得

$$|t-t_0|<\delta(\omega)\Longrightarrow\|x_0(\omega,t)-x_0(\omega,t_0)\|<\frac{\eta(\omega)}{2}$$

引理2.5 ([14]) $x\in C[\Omega\times J,G]$的充要条件是映射$\omega\mapsto x(\omega,\cdot)$是一$C[J,X]$-值随机变量。

引理2.6 ([10]) 令$M,\eta:\Omega\to(0,\infty)$和$\gamma:\Omega\to(0,a)$是实值随机变量并令

$$\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]=\{x\in C[\Omega\times J_0,G]:\|x(\omega,t_1)-x(\omega,t_2)\|\leqslant M(\omega)|t_1-t_2|,\ \forall t_1,t_2\in J_0\}$$

其中$J_0=J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$。假设$x_0\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$,则由

$$E(\omega)=\left\{x\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]:\|x(\omega,t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0}\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}\right\}$$

定义的映射$E:\Omega\to CC(C[\Omega\times J_0,G])$是可测的。

显然对每一$\omega\in\Omega$, $E(\omega)$是$C[J_0,X]$的一强闭凸子集,因此它也是$C[J_0,X]$的弱闭凸子集(见[15,定理2.9.3])。

三、弱拓扑下随机解的存在性

在本节中,我们将考虑非线性随机Volterra积分方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{3.1}$$

其中$x_0\in\mathrm{Lip}_{M_1(\omega)}[\Omega\times J,G]$, $K\in C^w[\Omega\times J\times J\times G,G]$, $J=[t_0,t_0+a]$, $G\subset X$是一开子集,$M_1:\Omega\to(0,\infty)$是一实值随机变量和此积分是弱积分。

定理3.1 假设

(i) 存在实值随机变量$M_2:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$,

$$\|K(\omega,t,s,x)\|\leqslant M_2(\omega),\ \forall(t,s,x)\in J\times J\times G$$

(ii) 存在实值随机变量$M_3:\Omega\to(0,\infty)$使得对一切$\phi\in X^*$, $\omega\in\Omega$,有界$B\subset G$,区间$I\subset J$, $x\in C[\Omega\times I,B]$和$t,\tau\in J$,

$$\left|\int_I\phi[K(\omega,t,s,x(\omega,s))-K(\omega,\tau,s,x(\omega,s))]ds\right|\leqslant\frac{M_3(\omega)}{|I|}|t-\tau|$$

其中$|I|$表区间I的长度。

(iii) 对每一$\omega\in\Omega$和有界$B\subset G$

$$\beta(K(\omega,J,J,B))\leqslant\varphi(\omega,\beta(B))$$

其中函数φ满足引理2.2内假设。

则存在一实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,a)$使得非线性随机积分方程(3.1)有一随机解

$$x^*(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$$

其中 $M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$ 和 $J_0=J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$

证明 假设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理2.3和2.4内一样定义。当令$\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\eta(\omega)/2M_2(\omega),1\}$时，$\gamma:\Omega\to(0,a)$是一实值随机变量。由$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$和引理2.6，映射$E:\Omega\to CC(C[\Omega\times J_0,G])$是可测的且对每一$\omega\in\Omega$，$E(\omega)$是$C[J_0,G]$的一非空有界弱闭凸子集，由

$$T(\omega,x(\omega,t))=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{3.2}$$

定义算子$T:G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,G]$，其中的积分是弱积分。由$K(\omega,t,s,x(\omega,t))$的假设知此积分有定义且对每一$x\in C[\Omega\times J_0,G]$和$t\in J_0$，作为$X$-值随机变量的有限和的序列的极限，$T(\cdot,x(\cdot,t))$是一$X$-值随机变量。对每一$\omega\in\Omega$，$x\in E(\omega)$和$t\in J_0$。由Hahn-Banach定理，存在$\phi_t\in X^*$使得$\|\phi_t\|=1$和$|\phi_t[T(\omega,x(\omega,t))-x_0(\omega,t)]|=\|T(\omega,x(\omega,t))-x_0(\omega,t)\|$。因此对每一$\omega\in\Omega$

$$\|T(\omega,x(\omega,t))-x_0(\omega,t)\|=|\phi_t[T(\omega,x(\omega,t))-x_0(\omega,t)]|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\left|\phi_t[K(\omega,t,s,x(\omega,s))]\right|ds\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}M_2(\omega)ds\right|\leqslant M_2(\omega)\gamma(\omega)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}$$

另一方面，对每一$\omega\in\Omega$，$x\in E(\omega)$和t，$\tau\in J_0$，由Hahn-Banach定理存在$\phi\in X^*$使得$\|\phi\|=1$和$|\phi[T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,x,(\omega,\tau))]|=\|T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,x(\omega,\tau))\|$。因此由条件(i)和(ii)有

$$\|T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,x(\omega,\tau))\|=|\phi[T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,x(\omega,\tau))]|$$

$$\leqslant|\phi[x_0(\omega,t)-x_0(\omega,\tau)]|+\left|\int_{\tau}^{t}\phi[K(\omega,t,s,x(\omega,s))]ds\right|$$

$$+\left|\int_{t_0}^{\tau}\phi[K(\omega,t,s,x(\omega,s))-K(\omega,\tau,s,x(\omega,s))]ds\right|$$

$$\leqslant\|x_0(\omega,t)-x_0(\omega,\tau)\|+\left|\int_{\tau}^{t}M_2(\omega)ds\right|+M_3(\omega)|t-\tau|$$

$$\leqslant(M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega))|t-\tau|=M(\omega)|t-\tau| \tag{3.3}$$

因此$T:G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,G]$是一随机算子且对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):E(\omega)\to E(\omega)$。现在我们证明对任意固定的$\omega\in\Omega,T(\omega,\cdot):E(\omega)\to C[\Omega\times J_0,G]$是弱连续的。令$x\in E(\omega)$和令$N(T(\omega,x(\omega,t)),\phi,\varepsilon)$是$T(\omega,x(\omega,t))$在空间$C[J_0,X]$内的一弱邻域，其中$\phi\in C[J_0,X]^*$($C[J_0,X]$的对偶空间)。因为(3.3)式蕴含$T(\omega,E(\omega))$是$C[J_0,X]$的一等度连续子集(对每一$\omega\in\Omega$)，由[5]的引理1.9假设$\phi=\sum_{i=1}^{N}\phi_i$就足够了，其中$\phi_i$ $(i=1,\cdots,N)$是点泛函(见[5, p.394])。我们假定ϕ有此形式。因为ϕ_i是点泛函，则存在$\psi_i\in X^*$和$t_i\in J_0$使得$\phi_i[x(\omega,t)]=\psi_i[x(\omega,t_i)]$对每一$x\in C[\Omega\times J_0,G]$成立。由[5]的引理1.10，对每一$\psi_i$和$t_i$，存在有限多个点泛函$\Lambda_{ij}\in C[J_0,X]^*$ $(j=1,\cdots,N_i)$和$\lambda_i>0$使得如果$y\in N(x,\Lambda_{ij},\lambda_i,N_i)$，则对一切$s\in J_0$有

$$|\psi_i(K(\omega,t_i,s,y(\omega,s))-K(\omega,t_i,s,x(\omega,s)))|<\frac{\varepsilon}{N\gamma(\omega)}$$

因此如果 $y\in E(\omega)\cap\left[\bigcap_{i=1}^{N}N(x,\Lambda_{ij},\lambda_i,N_i)\right]$

我们有

$$|\phi(T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,y(\omega,t)))|=\left|\sum_{i=1}^{N}\phi_i(T(\omega,x(\omega,t))-T(\omega,y(\omega,t)))\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{N}\phi_i\left(\int_{t_0}^{t}(K(\omega,t,s,x(\omega,s))-K(\omega,t,s,y(\omega,s)))ds\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{N}\psi_i\left(\int_{t_0}^{t_i}(K(\omega,t_i,s,x(\omega,s))-K(\omega,t_i,s,y(\omega,s)))ds\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t_i}|\psi_i(K(\omega,t_i,s,x(\omega,s))-K(\omega,t_i,s,y(\omega,s)))|ds\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon}{N\gamma(\omega)}|t_i-t_0|\leqslant\varepsilon$$

所以对每一 $y\in E(\omega)\cap\left[\bigcap_{i=1}^{N}N(x,A_{ij},\lambda_i,N_i)\right]$

有 $T(\omega,y(\omega,t))\in N(T(\omega,x(\omega,t)),\phi,\varepsilon)$。由此推得对每一 $\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot)$ 弱连续。因此 T: $G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,G]$ 是一弱连续随机算子。现在证明T满足引理2.2的条件(ii)。对每一$\omega\in\Omega$，令$B\subset E(\omega)$。由β的性质

$$\beta(T(\omega,B(t)))=\beta\left(\left\{x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x(\omega,s)\in B\right\}\right)$$

$$=\beta\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x(\omega,s)\in B\right\}\right)$$
$$\leqslant\beta(|t-t_0|\overline{\text{co}}K(\omega,t,J_0,B(J_0)))$$
$$\leqslant\gamma(\omega)\,\beta(\overline{\text{co}}K(\omega,J_0,J_0,B(J_0)))$$
$$\leqslant\gamma(\omega)\beta(K(\omega,J_0,J_0,B(J_0)))$$
$$\leqslant\gamma(\omega)\varphi(\omega,\beta(B(J_0)))\leqslant\gamma(\omega)\varphi(\omega,\beta(B))$$
$$\leqslant\varphi(\omega,\beta(B)),\quad\forall t\in J_0$$

其中$B(t)=\{x(\omega,t):x\in B\}$和$B(J_0)=\{x(\omega,t):x\in B,t\in J_0\}$。因为$T(\omega,E(\omega))$是$C[J_0,X]$的一等度连续子集，由[5]的定理2,

$$\beta(T(\omega,B))=\sup_{t\in J_0}\beta(T(\omega,B(t)))\leqslant\varphi(\omega,\beta(B))$$

因此从引理2.2推得T有一随机不动点$x^*\in\text{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$它也是非线性随机积分方程(3.1)的一随机解。

定理3.2 假设定理3.1的条件(i)和(ii)成立且存在一实值随机变量 $k:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$和有界$B\subset G$

$$\beta(K(\omega,J,J,B))\leqslant k(\omega)\beta(B)$$

则定理3.1的结论成立。

证明 假设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理2.3和2.4内一样定义。令

$$\gamma(\omega)=\min\left\{a,\delta(\omega),\frac{\eta(\omega)}{2M_2(\omega)},\frac{b}{k(\omega)}\right\}$$

其中$b\in(0,1)$，则$\gamma:\Omega\to(0,a)$是一实值随机变量．利用与定理3.1的证明中相同的论证．我们能证明由(3.2)式定义的算子$T:G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,G]$是一弱连续随机算子和对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):E(\omega)\to E(\omega)$．

现在对每一$\omega\in\Omega$，令$B\subset E(\omega)$，由β的性质有

$$\beta(T(\omega,B(t)))=\beta\left(\left\{x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x(\omega,s)\in B\right\}\right)$$

$$=\beta\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x(\omega,s)\in B\right\}\right)$$

$$\leqslant\beta(|t-t_0|\overline{\mathrm{co}}K(\omega,t,J_0,B(J_0)))$$

$$\leqslant\gamma(\omega)\beta(K(\omega,J_0,J_0,B(J_0)))$$

$$\leqslant\gamma(\omega)k(\omega)\beta(B(J_0))=\gamma(\omega)k(\omega)\beta(B)$$

因此由[5]的引理2有

$$\beta(T(\omega,B))\leqslant\gamma(\omega)k(\omega)\beta(B)\leqslant b\beta(B)$$

由具有$\varphi(\omega,t)=bt$，$\forall\omega\in\Omega$，的引理2.2推得T有一随机不动点$x^*\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$．因此$x^*(\omega,t)$也是非线性随机积分方程(3.1)的一随机解．

定理3.3 假设定理3.1的条件(ii)成立．如果$K\in C^w[\Omega\times J\times J\times\bar{G},\bar{G}]$和$X$还是自反空间（$\bar{G}$表有界开集$G$的闭包）．则定理3.1的结论成立．

证明 因$\bar{G}$在X内有界，则$\bar{G}$是弱紧的．由K的弱连续性推得$K(\omega,J,J,\bar{G})$对每一$\omega\in\Omega$是弱紧的．令 $M_2(\omega)=\sup\{\|K(\omega,t,s,x)\|:(t,s,x)\in J\times J\times\bar{G}\}$

则$M_2:\Omega\to(0,\infty)$是一实值随机变量．现在令对每一$\omega\in\Omega,B\subset E(\omega)$($E(\omega)$如在定理3.1一样定义)．因$K(\omega,J_0,J_0,B(J_0))\subset K(\omega,J,J,\bar{G})$和$B(J_0)\subset\bar{G}$，所以$\beta(K(\omega,J_0,J_0,B(J_0)))=0$和$\beta(B(J_0))=0$．由此推得$\beta(T(\omega,B))=0$和$\beta(B)=0$．由定理3.2知定理3.1的结论成立．

作为定理3.1，3.2，3.3的应用，我们容易得到随机微分方程弱随机解的存在定理．

下面我们将考虑随机Cauchy问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x(\omega,t))\\&x(\omega,t_0)=x_0(\omega),\qquad\forall\omega\in\Omega,t\in J=[t_0,t_0+a]\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

的弱随机解的存在性，其中$x_0:\Omega\to G$是一X-值随机变量，$f\in C^w[\Omega\times J\times G,G]$和这里的导数是弱导数．

称函数$x:\Omega\times J\to G$是随机Cauchy问题(3.4)的一弱随机解，如果

(i) $x\in C^w[\Omega\times J,G]$

(ii) $x(\omega,t_0)=x_0(\omega)$

(iii) $\dfrac{dx(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x(\omega,t)),\qquad\forall(\omega,t)\in\Omega\times J$

定理3.4 假设

(i) 存在实值随机变量$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$

$$\|f(\omega,t,x)\|\leqslant M(\omega),\qquad\forall(t,x)\in J\times G$$

(ii) 存在满足引理2.2内条件的函数$\varphi:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset G$

$$\beta(f(\omega,J,B))\leqslant\varphi(\omega,\beta(B))$$

则存在一实值随机变量 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 使得随机 Cauchy 问题（3.4）有一弱随机解 $x^*(\omega,t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$ 其中 $J_0=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$。

证明 为了寻求随机Cauchy问题(3.4)的弱随机解，我们考虑等价的随机Volterra 积分方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}f(\omega,s,x(\omega,s))ds \tag{3.5}$$

其中的积分是弱积分。当其在定理3.1中令$x_0(\omega,t)=x_0(\omega)$和$K(\omega,t,s,x)=f(\omega,s,x)$，$\forall t\in J$时，容易检验定理3.1的一切假设在$M_1(\omega)=M_3(\omega)=0$和 $M_2(\omega)=M(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$，的情形下成立。因此由定理3.1，随机Volterra积分方程(3.5)有一随机解$x^*(\omega,t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$。从[5]的引理3.1推得$x^*(\omega,t)$也是随机Canchy问题(3.4)在$J_0$上的一弱随机解。

定理3.5 假设定理3.4的条件(i)成立且存在一实值随机变量 $k:\Omega\to(0,\infty)$ 使得对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset G$

$$\beta(f(\omega,\ J,\ B))\leqslant k(\omega)\beta(B)$$

则定理 3.4 的结论成立。

证明 利用定理 3.2 和定理 3.4 证明中的相同论证，我们容易证明本定理结论成立。

注3.1 定理 3.1 和 3.2 是[1～4，8，9]中相应结果在弱拓扑下的改进和推广。定理 3.4 和 3.5 推广了[5]的定理 3，[10]的定理 4.2 和 [11]中相应结果。

定理3.6 令$x_0:\Omega\to G$是X-值随机变量，$f\in C^w[\Omega\times J\times\bar{G},\ \bar{G}]$，$G$是$X$的有界开集和$X$还是自反空间。则定理3.4的结论成立。

证明 当在定理 3.3 中令 $x_0(\omega,\ t)=x_0(\omega)$和$K(\omega,\ t,\ s,\ x)=f(\omega,\ s,\ x)$，$\forall t\in J$时从定理 3.3 推得随机 Volterra 积分方程（3.5）有一随机解 $x^*(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,G]$，其中$M(\omega)=\sup\{\|f(\omega,\ s,\ x)\|:(s,\ x)\in J\times\bar{G}\}$。因此$x^*(\omega,t)$也是随机 Cauchy 问题(3.4)在 $J_0=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$上的一弱随机解。

注3.2 定理 3.3 和 3.6 是[5，10，12]中相应结果的改进和推广。

四、弱拓扑下极值随机解的存在性

在本节中，我们将研究随机积分和微分方程在弱拓扑下极值随机解的存在性。

令$H\subset X$是一真锥，H_0表H的内部。假设$H_0\neq\phi$。对u，$v\in X$，我们定义

$u\leqslant v$，当且仅当 $v-u\in H$，

$u<v$，当且仅当 $v-u\in H_0$。

令H^*和H_0^*分别表下列泛函的集：

$$H^*=\{c\in L(X,\ R):x\in H\Rightarrow c(x)\geqslant 0\}$$

$$H_0^*=\{c\in L(X,\ R):x\in H_0\Rightarrow c(x)>0\}$$

其中$L(X,\ R)$是X到R的一切连续线性泛函的空间。

利用[4]的定理 5.5.2 的证明中相类似的论证我们容易证明下面结果。

定理4.1 令$K\in C^w[\Omega\times J\times J\times X,\ X]$和$x_0$，$u$，$v\in C^w[\Omega\times J,\ X]$。假设对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K(\omega,\ t,\ s,\ x)$关于$x$单调非减(即是若$x\leqslant y$，对每一$(\omega,\ t,\ s)\in\Omega\times J\times J$，蕴含$K(\omega,\ t,\ s,\ x)\leqslant K(\omega,\ t,\ s,\ y)$)。如果对每一$(\omega,\ t)\in\Omega\times J$，

$$u(\omega,\ t)\leqslant x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ u(\omega,\ s))ds$$

$$v(\omega,\ t)\geqslant x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ v(\omega,\ s))ds$$

且其中一个不等式是严格的，则 $u(\omega,\ t_0)<v(\omega,\ t_0)$，$\forall\omega\in\Omega$，蕴含 $u(\omega,\ t)<v(\omega,\ t)$，$\forall(\omega,\ t)\in\Omega\times J$。

定理4.2 假设定理3.1的所有条件成立且对每一$(\omega,\ t,\ s)\in\Omega\times J\times J$，$K(\omega,\ t,\ s,\ x)$关于$x$单调非减则存在一实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,\ a)$使得随机积分方程（3.1）有一极大随机解$x^*(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$，其中$J_0=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$和$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$。

证明 假设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理2.3和2.4内一样定义。令

$$\gamma(\omega)=\min\left\{a,\delta(\omega),\ \frac{\eta(\omega)}{4M_2(\omega)},1\right\}$$

则$\gamma:\Omega\to(0,\ a)$是一实值随机变量。由$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$和引理2.6，映射$E:\Omega\to CC(C[\Omega\times J_0,\ G])$是可测的。

定义$T:G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,\ G]$如下：

$$T(\omega,\ x(\omega,\ t))=x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x(\omega,\ s))ds$$

令$y_0(\omega)\in H_0$，$\forall\omega\in\Omega$，是一X-值随机变量使得$\|y_0(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$，$\forall\omega\in\Omega$，和令$y_n(\omega)=(1/n)y_0(\omega)$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$。定义$T_n:G_r(E)\to C[\Omega\times J_0,G]$ 如下：

$$T_n(\omega,\ x(\omega,\ t))=T(\omega,\ x(\omega,\ t))+y_n(\omega)\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

则对每一$\omega\in\Omega$，$x\in E(\omega)$和$t\in J_0$，由Hahn-Banach定理，存在$\phi_t^*\in X^*$使得$\|\phi_t^*\|=1$和$|\phi_t^*[T_n(\omega,\ x(\omega,\ t))-x_0(\omega,t)]|=\|T_n(\omega,\ x(\omega,\ t))-x_0(\omega,\ t)\|$。因此对每一$\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}\|T_n(\omega,\ x(\omega,\ t))-x_0(\omega,\ t)\|&=|\phi_t^*[T_n(\omega,\ x(\omega,\ t))-x_0(\omega,\ t)]|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\phi_t^*(K(\omega,\ t,\ s,\ x(\omega,\ s)))|ds\right|+|\phi_t^*(y_n(\omega))|\\&\leqslant\|y_n(\omega)\|+M_2(\omega)|t-t_0|\leqslant\frac{\eta(\omega)}{4n}+M_2(\omega)\gamma(\omega)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

利用定理3.1证明中同样的论证，我们能证明T_n有一随机不动点$x_n(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$。因为对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0$

$$\begin{aligned}x_1(\omega,\ t)&=x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,x_1(\omega,\ s))ds+y_1(\omega)\\&>x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x_1(\omega,\ s))ds+y_2(\omega)=T_2(\omega,x_1(\omega,\ t))\end{aligned}$$

和$x_1(\omega,\ t_0)=x_0(\omega,\ t_0)+y_1(\omega)>x_0(\omega,\ t_0)+y_2(\omega)=x_2(\omega,\ t_0)$。从定理4.1推得$x_1(\omega,\ t)>x_2(\omega,\ t)$，$\forall\omega\in\Omega$，$t\in J_0$。

类似地，我们有

$$x_n(\omega,\ t)>x_m(\omega,\ t),\ \forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0\text{ 和 }n>m$$

利用β的性质，对每一$\omega\in\Omega$有

$$\begin{aligned}\beta(\{x_n(\omega,\ t)\}_{n=1}^{\infty})&=\beta(\{T(\omega,\ x_n(\omega,\ t))+y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty})\\&=\beta\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x_n(\omega,\ s))ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\\&\leqslant\beta(|t-t_0|\overline{\mathrm{co}}K(\omega,\ t,\ J_0,\ \{x_n(\omega,J_0)\}_{n=1}^{\infty}))\\&\leqslant\gamma(\omega)\beta(K(\omega,\ J_0,\ J_0,\ \{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty}))\end{aligned}$$

$$\leqslant \gamma(\omega)\varphi(\omega,\ \beta(\{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty}))$$
$$\leqslant \varphi(\omega,\ \beta(\{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty}))$$

由[5]的定理 2 推得

$$\beta(\{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty})\leqslant \varphi(\omega,\ \beta(\{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty}))$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(\omega,\ t)=0$ 蕴含 $\varphi(\omega,\ t)<t,\ \forall\omega\in\Omega,\ t>0$，从上面不等式推得 $\beta(\{x_n(\omega,\ J_0)\}_{n=1}^{\infty})=0$。因此对每一 $(\omega,\ t)\in\Omega\times J_0$，$\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是弱相对紧的。容易看出对每一 $\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\ t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 J_0 上是等度连续和一致有界序列。所以由[4]的定理1.1.6，存在 $\{x_n(\omega,\ t)\}_{n=1}^{\infty}$ 的一子序列 $\{x_{n_i}(\omega,\ t)\}$ 在 J_0 上一致弱收敛于 $x^*(\omega,\ t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$（因为 $\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$ 是弱闭凸集）。因为

$$x_{n_i}(\omega,\ t)=T_{n_i}(\omega,\ x_{n_i}(\omega,\ t))=T(\omega,\ x_{n_i}(\omega,\ t))+y_{n_i}(\omega)$$

由 T 的弱连续性，有

$$x^*(\omega,\ t)=T(\omega,\ x^*(\omega,\ t))$$

即 $x^*(\omega,\ t)$ 是随机积分方程（3.1）在 $\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$ 内的一随机解。

现在令 $x(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$ 是方程（3.1）的任意一个随机解，即有

$$x(\omega,\ t)=x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x(\omega,\ s))ds$$

因为对每一 $\omega\in\Omega$，

$$x_n(\omega,\ t)=x_0(\omega,\ t)+y_n(\omega)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x_n(\omega,\ s))ds$$
$$>x_0(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,\ t,\ s,\ x_n(\omega,\ s))ds$$

和 $x(\omega,\ t_0)=x_0(\omega,\ t_0)<x_0(\omega,\ t_0)+y_n(\omega)=x_n(\omega,\ t_0)$，从定理4.1推得

$$x(\omega,\ t)<x_n(\omega,\ t),\ \forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0 \text{ 和 } n=1,\ 2,\ \cdots$$

这蕴含对每一 $\omega\in\Omega$ 和 $c\in H^*$

$$c(x^*(\omega,\ t)-x(\omega,\ t))=c(x^*(\omega,\ t)-x_{n_i}(\omega,\ t))+c(x_{n_i}(\omega,\ t)-x(\omega,\ t))$$
$$\geqslant c(x^*(\omega,\ t)-x_{n_i}(\omega,\ t))\to 0,\qquad n\to\infty$$

从[4]的引理 4.3.2 推得对每一 $\omega\in\Omega$ 和 $t\in J_0$

$$x(\omega,\ t)\leqslant x^*(x,\ t)$$

因此 $x^*(\omega,\ t)$ 是随机积分方程（3.1）在 $\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$ 内的一极大随机解。

定理4.3 假设定理 3.4 的条件(i)和(ii)成立且对每一 $(\omega,\ s)\in\Omega\times J$，$f(\omega,\ s,\ x)$ 关于 x 单调非减。则存在一实值随机变量 $\gamma:\Omega\to(0,\ a)$ 使得随机 Cauchy 问题（3.4）有一极大随机弱解 $x^*(\omega,\ t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G)$，其中 $J_0=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$。

证明 为了寻求随机 Cauchy 问题（3.4）的极大弱随机解，我们考虑等价的随机 Volterra 积分方程（3.5）。当在定理 4.2 中令 $x_0(\omega,\ t)=x_0(\omega)$ 和 $K(\omega,\ t,\ s,\ x)=f(\omega,\ s,\ x)$，$\forall t\in J$ 时，从定理 4.2 推得随机积分方程（3.5）有一极大随机解 $x^*(\omega,t)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$。因此它也是随机 Cauchy 问题在 $\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0,\ G]$ 内的一极大随机弱解。

注4.1 在定理 3.2 和 3.5 的假设下，我们也能得到随机积分方程（3.1）和随机 Cauchy 问题(3.4)的极大随机解的存在定理。我们省去。

五、弱拓扑下的比较定理

在本节中我们将对随机积分方程（3.1）和随机 Cauchy 问题（3.4）分别证明比较定理。

定理5.1　假设定理 4.2 的假设成立和令$m\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$使得

$$m(\omega, t)\leqslant x_0(\omega, t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega, t, s, m(\omega, s))ds, \qquad \forall\omega\in\Omega, t\in J_0$$

则有

$$m(\omega, t)\leqslant x^*(\omega, t), \qquad \forall\omega\in\Omega, t\in J_0$$

其中$x^*(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$是随机积分方程（3.1）的极大随机解。

证明　按定理 4.1 的证明，我们令 $y_0(\omega)\in H_0$ 具有 $\|y_0(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$，$y_n(\omega)=(1/n)\cdot y_0(\omega)$ $(n=1, 2, \cdots)$和$x_n(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$是随机方程

$$x_n(\omega, t)=x_0(\omega, t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega, t, s, x_n(\omega, s))ds+y_n(\omega) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

的一随机解。不失一般性，我们能假定对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega, t)\}_{n=1}^{\infty}$弱一致收敛于$x^*(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$。因为对每一$\omega\in\Omega$，$m(\omega, t_0)\leqslant x_0(\omega, t_0)<x_0(\omega, t_0)+y_n(\omega)=x_n(\omega, t_0)$和

$$x_n(\omega, t)>x_0(\omega, t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega, t, s, x_n(\omega, s))ds$$

所以定理 4.1 蕴含$m(\omega, t)<x_n(\omega, t)$，$\forall\omega\in\Omega$，$t\in J_0$，$n\geqslant1$。利用定理 4.1 证明中同样的论证，我们有

$$m(\omega, t)\leqslant x^*(\omega, t), \qquad \forall\omega\in\Omega, t\in J_0$$

定理5.2　假设定理 4.3 的假设成立。令$m(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$使得

$$\frac{dm(\omega, t)}{dt}\leqslant f(\omega, t, m(\omega, t)), \qquad \forall\omega\in\Omega, t\in J_0 \tag{5.1}$$

其中$dm(\omega, t)/dt$是弱导数。如果$m(\omega, t_0)\leqslant x_0(\omega)$，则有$m(\omega, t)\leqslant x^*(\omega, t)$，$\forall\omega\in\Omega$，$t\in J_0$，其中$x^*(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$是随机 Cauchy 问题（3.4）的一极大随机弱解。

证明　由弱导数的定义和[4]的引理 4.3.2，容易证明微分不等式（5.1）等价于下面积分不等式：

$$m(\omega, t)\leqslant m(\omega, t_0)+\int_{t_0}^{t} f(\omega, s, m(\omega, s))ds \tag{5.2}$$

其中的积分是弱积分。因为$m(\omega, t_0)\leqslant x_0(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$，我们有

$$m(\omega, t)\leqslant x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t} f(\omega, s, m(\omega, s))ds$$

从具有$x_0(\omega, t)=x_0(\omega)$，$K(\omega, t, s, x)=f(\omega, s, x)$，$\forall(\omega, t)\in\Omega\times J$的定理 5.1 推得对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0$有

$$m(\omega, t)\leqslant x^*(\omega, t)$$

其中$x^*(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$是随机积分方程(3.5)的一极大随机解。因此$x^*(\omega, t)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0, G]$也是随机 Cauchy 问题(3.4)的一极大随机解。

参 考 文 献

[1] Vaughn, R. L., Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Appl. Anal.*, 7 (1978), 337—348.

[2] Vaughn, R. L., Criteria for the existence and comparison of solutions to nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, in *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 463—468.

[3] Lakshmikantham, V., Existence and comparison results for Volterra integral equations in Banach spaces, in *Volterra Integral Equations*, Springer-Verlag, **737** (1979), 120—126.

[4] Lakshmikantham, V. and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York (1981).

[5] Mitchell, A. R. and C. Smith, An existence theorem for weak solutions of differential equations in Banach spaces, in *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 387—403.

[6] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Acad. Press, New, York (1972).

[7] Tsokos, C. J. and W. J. Padgett, *Random Integal Equations with Applications to Life Science and Engineering*, Acad. Press, New York (1974).

[8] 丁协平，随机积分和微分方程解的存在性准则，应用数学和力学，**6**，3 (1985), 265—270.

[9] 丁协平，随机积分方程和微分方程解的存在性和比较结果，应用数学和力学，**7**，7 (1986), 597—604.

[10] Ding Xie-ping, A general random fixed point theorem of weak continuous random operators and its applications. (to appear)

[11] Cramer, E. J., V. Lakshmikantham and A. R. Mitchell, On existence of weak solutions of differential equations in nonreflexive Banach spaces, *Nonlinear Anal.*, 2 (1978), 169—177.

[12] Szep, A., Existence theorem for weak solutions of ordinary differential equations in reflexive Banach spaces, *Studia Scientiarum Math. Hungarica*, **6** (1971), 197—203.

[13] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag (1977), 580.

[14] De Blasi, F. S. and J. Myjak, Random differential equations on closed subsets of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **90** (1982), 273—285.

[15] Hille, E. and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1957).

Existence and Comparison Results of Solutions for Nonlinear Random Integral and Differential Equations Relative to Weak Topology

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we prove several existence theorems of random solutions to nonlinear random Volterra integral equations under the weak topology of Banach spaces. Then, as applications, we obtain the existence theorems of weak random solutions to random differential equations. Existence of extremal random solutions and a random comparison theorem for these random equations are also obtained. Our theorems improve and extend the corresponding results in [4, 5, 10, 11, 12].