应用数学和力学，第8卷第12期（1987年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一种经典时空理论(Ⅰ)——基础

余 燊

（中国科学院北京天文台，1986年8月12日收到）

摘 要

尽管广义相对论形式优美，成果辉煌，但在以下几个方面却未尽完善：

（1） 它不能容纳不对称的总能量-动量张量，这种不对称性已经在电磁理论中被证明是存在的。

（2） 场方程可以导出线动量平衡定律，却不能导出角动量平衡定律的精确方程。

（3） 如果没有附加（非物理）的假设，缩并的第二 Bianchi 恒等式的四度任意性使场方程无法获得唯一解。

为了解决这些问题，我们在本文提出，把纤维丛 $P[M,SU(2)]$定律作为四维时空的基本几何结构。于此，结构群 $SU(2)$ 是特殊二维复酉群的实表示。$SU(2)$ 同时使定义在整个 M 上的度规型 $dS^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ 和基本二型 $\phi=(1/2)a_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta$ 不变。以 $SU(2)$ 连络定义的爱因斯坦方程利用了时空流形以及把非齐次麦克斯韦方程作为辅助条件。于此，电磁张量与曲率张量的缩并形式是等价的。我们得到的结果是关于16个未知场变量 $(g_{\alpha\beta},a_{\alpha\beta})$ 的16个独立的基本方程。另外，角动量平衡定律恰好是推广的爱因斯坦方程的斜对称部分。这里，自旋角动量张量直接被证明与扭转张量成比例。

一、引 言

人们认为广义相对论(GR)的主要优点在于线动量平衡定律(LLMB)，即运动方程，是爱因斯坦场方程的一个几何结论。相比之下，牛顿引力理论中的场方程（Poisson 方程）和运动方程是相互独立的假定。而对于角动量平衡定律（LAMB），情况就大不相同了。事实上，到目前为止，LAMB 还不能从 GR 中导出——在这方面我们取得的最好成果就是用能量-动量张量（EMT）的对称性不那么明显地导出了 AM 在“渐平”时空中保守的结论。从开始，场方程和 GR 几何理论就缺乏关于 AM 的实质性定律。这恐怕就是在 GR 中难以定义 AM 的主要原因。时至今天，这种困难还不能认为已完全解决——Winicour 的长篇文章[1]及其参考文献为这个问题的重要性提供了证据，并说明了人们为解决这个问题付出了多大的努力。由最近的工作看来，我们处在这样的奇怪境地！我们得到的只是在渐平时空中渐近精确的近似 LAMB。无疑，近似定律总能从一个精确定律导出（例如忽略一些次要效应），反之不真：一个近似定律并不隐含一个其形式尚未为人所知的精确定律。基于这样的考虑，我们就有必要把爱因斯坦的广义相对论推广，使 LAMB 成为时空结构的几何结论，

而不是一种附设。

另一个概念相关、内容相异的问题与弯曲时空存在内在自旋角动量有关。关于这个问题，E. Cartan 早已给出自旋的扭转理论[2]，随后 Trautman[3]，Hehl 等[4] 使其进一步完善，现在 Einstein-Cartan 理论 (EC) 已臻完善。但从以下的意义上看来，这种理论还有猜测的成份。因为在这种理论中，内在自旋在弯曲时空中的存在是一个预先的假定，这种自旋又假定与扭转张量的一个线性函数相关，而这种自旋的实质尚未阐明（例如，它是否与量子力学中的自旋角动量相联系）。所提供的证据有点牵强；它们不能构成一个证明。

如果弯曲时空中的内在自旋与量子力学中的类似概念完全相关，就会出现一个等价的问题：旋量是否能嵌入广义相对论的弯曲时空中？通常赋与 GR 弯曲时空中的“旋量结构”是指“内蕴空间”结构群和覆盖在 GR 纤维丛结构上的 L 结构群之间的同构（参阅，例如 Bleeker[5]）。可是这种同构不允许旋量的嵌入，因为这种旋量结构以及 $x\in M$（时空流形）中的每一个张量，与 M 在 x 处的切空间 $T_x(M)$ 的某些旋量相对应，但并不是每个 $T_x(M)$ 中的旋量都与一个张量对应（例如，与半整数相对应的旋量在 x 处的L张量空间并没有与之等价的张量）。因此，显式解答是对旋量结构的更强要求：同构实际上应是不同构。

在解决以上提出的问题的尝试中，本文从最近的要求入手，研究了 GR 理论能否这样地“推广”使：

（1） LAMB 作为场方程的结论包含在该理论中。

（2） 内在自旋（整数或半整数）是否在某种意义上存在于得到的弯曲时空结构中。

这样构造的几何理论把电磁理论也包含在其中，于是为 Einstein 和 Weyl 意义上的经典统一场论（UFT）提供了基础。

二、宇宙旋量结构的运动学和动力学

在构造推广的理论时，我们首先把旋量嵌入在弯曲时空 M 中，然后察看这种旋量结构所提供的关于宇宙定律的线索。流形的几何就能根据加于其上的G结构来分类（参阅 Sternberg[6]），因为主纤维丛 (PFB) $P(M, G)$ 的结构群是切空间 $T_x(M)$ 的自同构群。如要求这自同构群为 $SL(2,C)$或 $SU(2)$，则四维切空间 $T_x(M)$ 可嵌入旋量的“内空间”中 ($SL(2,C)$, $SU(2)$均为二维特殊复酉群)。然而结构群的选择又要保留 GR 的外对称，GR 的几何基础是简化丛 $P[M, SO(1,3)]$，其结构群 $SO(1,3)$ 的不变量具有闵可夫斯基 (Minkowski)度规形式：

$$dS^2=-(\bar{\theta}^0)^2+(\theta^1)^2+(\theta^2)^2+(\theta^3)^2 \qquad (2.1)$$

这里，θ^a 是定义在整个 M 上的规范 1-型。如在(2.1)中令 $\bar{\theta}^0=i\theta^0(i=\sqrt{-1})$，则我们可以得到欧几里得度规形式：

$$dS^2=(\theta^0)^2+(\theta^1)^2+(\theta^2)^2+(\theta^3)^2 \qquad (2.2)$$

它在 $SO(4)$群的变换中是不变量，因此 GR 可以认为是建立在 $SO(4)$结构之上的。这说明推广理论的结构群 G 必然是 $SO(4)$的子群：$G\subset SO(4)$。现在$\widetilde{SU(2)}$的实表示 $SU(2)$ 就由下式给出（见 Kobayashi[7]）：

$$SU(2)=\{A\in GL(4,R)\,|\,AJ=JA, A^tA=I,\ \det A=1\} \qquad (2.3)$$

这里

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},\ I=\text{单位矩阵} \qquad (2.4)$$

表示式(2.3)与下式等价:

$$SU(2)=\{A\in GL(2,R)\,|\,A^tJA=J,\ A^tA=I,\ \det A=1\} \tag{2.5}$$

于是

$$SU(2)=SP(2,R)\cap SO(4) \tag{2.6}$$

于此,$SP(2,R)$表示实辛群(real symplectic group)。显然,$SU(2)\subset SO(4)$,这样选择的$SU(2)$结构保证了广义相对论(GR)的对称性在推广理论中得以保留,并且具有整数、半整数的旋量牢固地嵌在时空流形中,即在x的张量空间和在$T_x(M)$的旋量空间是一一对应的。然而$SL(2,C)$不具这种性质。由(2.6)式给出的$SU(2)$群同时保留了欧几里得度规形式不变量$dS^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$和Symplectic形式不变量$\phi=(1/2!)a_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta$,它是定义在整个$M$上的。于是$SU(2)$结构为实现$Z_2$等级李代数提供了场所。它是Hermann[8]为"费米子微分几何"定义的一种"超对称"。最后,集($g_{\alpha\beta}$,$a_{\alpha\beta}$)形成一个16元素的"超势"场。

用Ehresmann的方法(见Kobayashi和Nomizu[9]),我们定义$SU(2)$从上的连络如下:用$su(2)$表示$SU(2)$的李代数(Lie algebra),则$SU(2)$从上的连络就由$su(2)$值,1-型ω给出,它具有以下性质:

i)
$$\omega(A_p^*)=A,\quad p\in P[M,\ SU(2)] \tag{2.7}$$

这里,A是$su(2)$的元素,并有:

$$A_p^*\overset{\text{def}}{=}\frac{d}{dt}[p\exp[tA]]|_{t=0} \tag{2.8}$$

A称为在$p\in P[M,\ SU(2)]$的基本矢量场。

ii)
$$\omega_{pg}(R_{g*}x)=g^{-1}\omega_p(x)g \tag{2.9}$$

$$\forall g\in SU(2),\quad p\in P\quad 及\quad x\in T_p(P)$$

在(2.9)式中R_{g*}表示g的右微商。一个水平子空间$H_p\in(P)$可以如下定义,使

$$\omega(H_p)=0 \tag{2.10}$$

微分方程(2.10)式的解是一个曲面$\bar{\gamma}(t)$,称为$P[M,SU(2)]$的水平曲面。则切矢量在$\bar{\gamma}(t)$的射影给出具有沿着曲面平移的框架的场

$$\gamma(t)=\pi\bar{\gamma}(t) \tag{2.11}$$

于是,$SU(2)$的李代数由下式给出

$$su(2)=so(4)\cap sp(2,R) \tag{2.12}$$

这里,小写字母表示李群的相应的李代数。因此(2.7),(2.12)给出

$$\omega^t+\omega=0\qquad(正交性) \tag{2.13}$$

及

$$\omega^tJ+J\omega=0\qquad(对偶性) \tag{2.14}$$

定义对$SU(2)$-连络的绝对微分D,则由(2.13),(2.14)给出

$$Dg_{\alpha\beta}=0 \tag{2.15}$$

$$Da_{\alpha\beta}=0 \tag{2.16}$$

因为$SU(2)$-丛是一丛线性标架,它允许我们定义一个"规范1-型"$\theta=\theta^\alpha e_\alpha$。这里($e_\alpha$)是$R^4$的自然基;而这又允许我们进一步定义扭转2-型$\Theta$

$$\Theta=\mathfrak{D}\theta \tag{2.17}$$

这里$\mathfrak{D}$表示"外协变微分",类似地,曲率2-型Ω由下式定义

$$\Omega=\mathfrak{D}\omega \tag{2.18}$$

则可导出

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta \tag{2.19}$$

及

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{2.20}$$

它们被称为结构方程．根据局部坐标系统(x^α, x^α_β)，我们有：

$$\theta^\alpha = y^\alpha_\beta dx^\beta, \quad (y^\alpha_\beta) = (x^\alpha_\beta)^{-1} \tag{2.21}$$

$$\omega^\alpha_\beta = y^\alpha_\lambda (dx^\lambda_\beta + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} x^\nu_\beta dx^\mu) \tag{2.22}$$

则结构方程可以写成：

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta \tag{2.23}$$

$$\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\lambda \wedge \omega^\lambda_\beta \tag{2.24}$$

对(2.23)，(2.24)式微分，我们得到

$$\mathfrak{D}\Theta^\alpha = \Omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta \tag{2.25}$$

$$\mathfrak{D}\Omega^\alpha_\beta = 0 \tag{2.26}$$

它们分别称为 Bianchi 第一、第二恒等式．

我们定义一个局部横截面 $\sigma: U \to P[M, SU(2)]$，$U \subset M$，则可分别得到(2.21)，(2.22)式的拉回 (pull-back)

$$\sigma^* \theta^\alpha = dx^\alpha \tag{2.27}$$

$$\sigma^* \omega^\alpha_\beta = \Gamma^{\ \alpha}_{\mu\ \beta} dx^\mu \tag{2.28}$$

类似地，由(2.23)，(2.24)可得

$$\sigma^* \Theta^\alpha = \frac{1}{2!} S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\alpha} dx^\lambda \wedge dx^\mu \tag{2.29}$$

$$\sigma^* \Omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2!} R_{\lambda\mu\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} dx^\lambda \wedge dx^\mu \tag{2.30}$$

这里，扭转张量 $S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\alpha}$ 及曲率张量 $R_{\lambda\mu\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ 分别由下面两式给出：

$$S_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\alpha} = (\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}) \tag{2.31}$$

$$R_{\lambda\mu\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \partial_\lambda \Gamma^{\ \alpha}_{\mu\ \beta} - \partial_\mu \Gamma^{\ \alpha}_{\lambda\ \beta} + \Gamma^{\ \alpha}_{\lambda\ \rho} \Gamma^{\ \rho}_{\mu\ \beta} - \Gamma^{\ \alpha}_{\mu\ \rho} \Gamma^{\ \rho}_{\lambda\ \beta} \tag{2.32}$$

根据 E. Cartan，对 (**S**,**R**) 完全表征流形 M 的曲率，我们称之为宇宙场(UF)．

(2.25)，(2.26)的拉回(pull-back)分别是

$$\sigma^* \mathfrak{D}\Theta^\alpha = \sigma^* \Omega^\alpha_\beta \wedge \sigma^* \theta^\beta \tag{2.33}$$

$$\sigma^* \mathfrak{D}\Omega^\alpha_\beta = 0 \tag{2.34}$$

再由(2.27)～(2.30)给出

$$R_{[\lambda\nu\mu]}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \overset{*}{\nabla}_{[\nu} S_{\mu\lambda]}{}^{\cdot\cdot\alpha} \tag{2.35}$$

$$\overset{*}{\nabla}_{[\lambda} R_{\nu\mu]\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0 \tag{2.36}$$

这里，方括号表示斜对称，算子$\overset{*}{\nabla}$由下式定义

$$\overset{*}{\nabla}_{[\lambda} R_{\nu\mu]\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \overset{*}{\nabla}_{[\lambda} R_{\nu\mu]\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + S_{[\lambda\nu}{}^{\cdot\cdot\sigma} R_{|\sigma|\mu]\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \tag{2.37}$$

其中，∇ 是协变微分算子．

以上所述的是时空的运动学图景，关系式 (2.13)、(2.14) 表示 $SU(2)$ 在丛标架上的效应，并暗示了超势 ($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$) 协变守恒．结构方程根据连络系数表示了宇宙场(**S**,**R**)，并且 Bianchi 恒等式是宇宙场必须满足的基本关系式．然而，宇宙的运动学图象如果没有物理

学要求的约束就依然不完善。广义相对论的支柱之一，就是等效原理（PE）。根据等效原理，时空流形 M 必须是局部欧几里得的（闵可夫斯基的）。特别地，每个局部的欧几里得标架（或普通坐标系统）必须满足（见 Misner et al.[10]和 Stephani[11]）：

$$g_{\alpha\beta}(P_0)=\eta_{\alpha\beta} \tag{2.38}$$

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(P_0)=0 \tag{2.39}$$

及

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}(P_0)=0 \tag{2.40}$$

其中，P_0 表示普通坐标系的原点，$\eta_{\alpha\beta}$ 是欧几里得（洛伦兹）度规。条件(2.39)要求相当独立于(2.40)使（闵可夫斯基）切空间 $T_P(M)$ 在 $P_0\in M$ 和 M 相会，并使普通坐标和它们在切空间的射影在 M 的 P_0 处只是二次项不同。条件(2.40)要求局部欧几里得标架是局部内标架。对在非扭转黎曼流形中的普通坐标架，(2.39)可以从(2.40)导出（根据度规条件）。然而宇宙以 $SU(2)$ 作为其三维结构群，根据 Weyl 和 Cartan 的基本定理（见 Hermann[12]），没有一种自然方式来定义具有零扭转的连络，因此(2.39) 不能从 (2.40) 导出。相反，对于 $SU(2)$ 连络，一个在 P_0 的普通坐标系给出：

$$g_{\alpha\beta}(P_0)=\eta_{\alpha\beta} \tag{2.41}$$

$$\Gamma_{(\alpha\beta)}^{\lambda}(P_0)=0 \tag{2.42}$$

而且由度规条件(2.15)可以看到，(2.42)给出

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(P_0)=S_{\gamma\alpha\beta}(P_0)+S_{\gamma\beta\alpha}(P_0) \tag{2.43}$$

因此，等价原理要求

$$S_{\gamma\alpha\beta}(P_0)=-S_{\gamma\beta\alpha}(P_0) \tag{2.44}$$

但(2.44)是一个张量关系式，它在一切坐标系的一切点均成立，因此有

$$S_{\gamma\alpha\beta}=S_{[\gamma\alpha\beta]} \tag{2.45}$$

条件(2.45)是根据等效原理加于 $SU(2)$-连络上的基本约束关系式。不然该条件就为另一重要的物理考虑所要求。因为费马最小光程原理(FPLT)似乎在弯曲空间中依然成立，但这个原理能被证明，当且仅当具有同一端点的 extremal 曲线和测地线在 M 上重合（见 Frankel[13]）。这与我们的直觉经验是一致的：最平直的曲线同样是局部“最短”的，否则是难以置信的。可是在扭转出现之下，extremal 曲线和测地线一般是不重合的，如果没有特殊约束的话。条件(2.45)恰好是 extremal 曲线和测地线等价所要求的约束，因此它也是费马原理在现在提及的宇宙中成立的必要条件。

一个重要的直接推论是象 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}$ 那样的协变常量 4-矢量成为可能（见 Schouten[14]）：

$$\nabla_\alpha\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}=0 \tag{2.46}$$

没有(2.45)，在扭转出现的情况下，条件(2.46)是不能成立的。

广义相对论的基石之一，几何化的物理学的严格定律这样陈述：给定世界的物质内容，则它的时空几何结构完全确定；相反给定时空的几何结构，这个结构的结论必须具有物理意义。特别是 UF 的基本几何关系 Bianchi 恒等式，必须或是一个陈述自然的定律，或对导出这样的定律起根本性作用。在广义相对论中我们已经看到，缩并的 Bianchi 第二恒等式和爱因斯坦方程一起给出了运动方程；我们现在就要看到，Bianchi 第一恒等式同样扮演一个角色——塑造出角动量平衡定律。而且，Bianchi 第二恒等式的另一种缩并给出推广的齐次麦克斯韦方程。

三、宇宙的动力内容

以上的方程并不足以确定 M 的几何特性．然而我们要求时空动力内容和它的几何满足一个关系，使得它的结构可以被决定．推广的爱因斯坦方程(GEE)就提供这个关系式：

$$G_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

这里，

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R-2\Lambda) \tag{3.2}$$

及

$$R_{\mu\nu}=R_{\alpha\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha},\quad R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

上面所有元素均是根据 $su(2)$-连络定义．包括电磁场的总能量-动量张量(EMT)的不对称，使我们必须推广爱因斯坦方程．因为 De Groot 和 Suttorp[15] 已经毫无疑问地显示物质和电磁场的总 EMT 无论在宏观介质、还是在微观磁畴都是不对称的；Heyde 和 Hehl[16] 亦已显示狄拉克电子也有总 EMT 不对称现象．$SU(2)$-流形中存在非零的扭转张量就保证了爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 的不对称性．运动学图象的 $SU(2)$性质由(2.15)，(2.16)给出，或

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta}=0 \tag{3.4}$$

及

$$\nabla_\mu a_{\alpha\beta}=0 \tag{3.5}$$

因此方程(3.1)，(3.4)和(3.5)一起构成关于 80 个未知量 ($\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$, $g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$)的 80 个方程．它们完全确定了 $SU(2)$-时空流形的几何性质．

为了以 16 个势能元素 ($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$) 来表示$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$，我们需要下面的式子：

$$S_{\lambda\mu\nu}=S_{[\lambda\mu\nu]} \tag{3.6}$$

因此

$$S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\alpha}=S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}=0 \tag{3.7}$$

由(3.4)式可解出 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$：

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}+\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(S_{\mu\lambda\nu}-S_{\lambda\nu\mu}+S_{\nu\mu\lambda}) \tag{3.8}$$

其中

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_\mu g_{\lambda\rho}+\partial_\lambda g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\lambda}) \tag{3.9}$$

S 的完全斜对称给出：

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}+\frac{1}{2}S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \tag{3.10}$$

类似地，(3.5)式给出

$$\phi_{\alpha\mu\lambda}=a_{\rho\alpha}S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}+a_{\rho\lambda}S_{\alpha\mu}^{\cdot\cdot\rho}+a_{\rho\mu}S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\rho} \tag{3.11}$$

这里

$$\phi_{\alpha\mu\lambda}=\frac{1}{2}(\partial_\mu a_{\lambda\alpha}+\partial_\alpha a_{\mu\lambda}+\partial_\lambda a_{\alpha\mu}) \tag{3.12}$$

方程(3.11)可解 S 给出（见附录 I）：

$$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\beta}=-\frac{1}{3!}A^{\beta\alpha}\phi_{\alpha\mu\lambda} \tag{3.13}$$

这里

$$A^{\mu\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{\mu\lambda}}=-A^{\lambda\mu},\quad a=\det|a_{\mu\lambda}| \tag{3.14}$$

把(3.13)代到(3.10)式中，我们有

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}=\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}-\frac{1}{3!}A^{\alpha\beta}\phi_{\beta\mu\lambda} \tag{3.15}$$

现在连络系数 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}$ 就单独由超势 ($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$) 的 16 个元素表示了。把(3.15) 代到 (3.1) 中并由(2.32)和(3.3)，只要能量-动量张量(EMT)$T_{\mu\nu}$ 预先描述，我们就可以得到关于16个未知量($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$)的 16 个元素的爱因斯坦方程。因此只要($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$)在“时空边缘”的边界条件给出，超势以及 UF(**S**,**R**) 就能完全确定，时空结构也就因此而确立。缩并的第二 Bianch 恒等式给出决定场量($g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$) 的四种任意性（由(2.36)得到）。

$$\nabla_{\mu}G^{\mu}_{\lambda}=S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}R_{\rho}^{\cdot\mu}-\frac{1}{2}S_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\rho}R_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\mu\alpha} \tag{3.16}$$

对 Bianchi 第一恒等式(2.35)作适当的缩并，并考虑到(3.6)，我们有

$$R_{[\lambda\mu]}=\frac{1}{2}\nabla_{\rho}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}+\nabla_{[\lambda}S_{\mu]\rho}^{\cdot\cdot\rho}+\frac{1}{2}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta\rho}^{\cdot\cdot\rho} \tag{3.17}$$

考虑到(3.7)式，上式可得

$$R_{[\lambda\mu]}=\frac{1}{2}\nabla_{\rho}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} \tag{3.18}$$

而且，(2.35)的另一种缩并给出：

$$R_{\lambda\mu}=\mathring{R}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2}\nabla_{\rho}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}+\frac{1}{4}S_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\rho} \tag{3.19}$$

这里再次用到了(3.6)式，$\mathring{R}_{\lambda\mu}$ 是根据连络(3.9)定义的 Ricci 张量。方程 (3.18)及(3.19)一起给出

$$R_{(\lambda\mu)}=\mathring{R}_{\lambda\mu}+\frac{1}{4}S_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\rho} \tag{3.20}$$

其中下标的圆括号表示对称化。根据(3.18)，(3.20)式，GEE (3.1) 的对称和斜对称部分分别给出

$$\mathring{R}_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}(\mathring{R}-2\Lambda)+\frac{1}{4}\left(S_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\rho}-\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}S_{\rho\alpha}^{\cdot\cdot\beta}S_{\beta}^{\cdot\alpha\rho}\right)=\kappa T_{(\lambda\mu)} \tag{3.21}$$

及

$$\nabla_{\rho}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}=2\kappa T_{[\lambda\mu]} \tag{3.22}$$

方程(3.22)是基本场方程的斜对称部分，只要我们把扭转张量 **S**$=(S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho})$理解成规范自旋角动量张量，则(3.22)表示角动量平衡定律，的确，方程的形式不允许有其他解释。因此，LAMB 是 $SU(2)$-结构的自然几何结论，而 GEE 根据 $su(2)$-连络定义。方程(3.21)是对称部分，与 GR 中的爱因斯坦方程不同于一项，它包括自旋角动量张量的乘积，而这乘积必须确实小得可以忽略。

LLMB 可由(3.21)的普通形式，联立缩并的 Bianchi 第二恒等式(3.16)得到。

$$P_{\lambda}-\nabla_{\mu}\mathring{G}_{\lambda}^{\cdot\mu}+\frac{1}{4}\nabla_{\mu}\left[S_{\rho}^{\cdot\lambda\beta}S_{\beta}^{\cdot\mu\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\lambda}S_{\rho}^{\cdot\alpha\beta}S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\rho}\right]=\kappa\nabla_{\mu}\mathring{T}_{\lambda}^{\cdot\mu} \tag{3.23}$$

其中，

$$P_{\lambda}=S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}R_{\rho}^{\cdot\mu}-\frac{1}{2}S_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\rho}R_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\mu\alpha} \tag{3.24}$$

$$\hat{G}_{\lambda}^{\cdot\mu}=g^{\rho\mu}G_{[\lambda\rho]}=g^{\rho\mu}R_{[\lambda\rho]} \tag{3.25}$$

及

$$\mathring{T}_{\lambda}^{\cdot\mu}=g^{\mu\rho}T_{(\lambda\rho)} \tag{3.26}$$

方程(3.22)及(3.23)是弯曲时空中的运动方程，它们分别由第一、二 Bianchi 恒等式及GEE(3.1)导出。看起来，时空象是产生自己的力并推动自己运动，但是“力”当然是牛顿理论中的概念，这概念在这里只能提供不同项可能含义的直觉理解。

四、电 磁 场

构造广义的爱因斯坦方程(3.1)的主要理由之一，是由于电磁场的作用而导致总能量-动量张量(EMT)存在非对称性。人们自然要问：$SU(2)$-结构作用于时空流形是否也意味着电磁场的存在？如果时空曲率(**S**, **R**)是对物质和场存在的反应，那么对于(**S**, **R**)的恒等式，则必须是时空中相同的物质和场的表征。我们已经知道，LLMB 和 LAMB 是 BI 和 GEE 的几何结果。我们又要问：是否这同一模式也能得出电动力学的规律呢？

首先我们注意到，鉴于缩并的 Bianchi 恒等式(3.16)，确定$(g_{\alpha\beta},a_{\alpha\beta})$的 16 个变量的16个方程式(3.1)不全是彼此独立的。为使 16 个未知量$(g_{\alpha\beta},\ a_{\alpha\beta})$唯一地确定，4 度的任意性自然地需要 4 个额外的场方程。在广义相对论的情况下，微变(diffeomorphisms)所需的 4 个自由度是由假设“协坐标条件”而除去（见 Fock[17] 和 Weinberg[18]）；无论这些条件有什么优点，它们不是张量关系，并且这些条件不具一般的可应用性。例如，它们不能应用到宇宙学问题，那里，时空的曲率对长距离仍是重要的[17]。因此它们不能上升到场方程的地位，我们不采用它们。我们假设额外的场方程以取而代之：

$$\mathscr{D}^{*}F=J \tag{4.1}$$

其中，

$$^{*}F=\frac{1}{2!}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}dx^{\nu}\wedge dx^{\rho} \tag{4.2}$$

$$F_{\lambda\mu}\overset{\text{def}}{=}Qa_{\alpha\beta}R_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha\beta},\qquad Q=\text{物质常量} \tag{4.3}$$

J 是总流 3-型，它由下式给出：

$$J=\frac{\beta}{3!}\sqrt{|g|}\,J^{\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\rho} \tag{4.4}$$

其中 β 是物理常数，J^{λ} 是规定的总流量 4-矢量。鉴于 **S** 的完全非对称性，(4.1)式可化为（见(5.1)）：

$$\mathring{\nabla}_{\mu}F^{\lambda\mu}=\beta J^{\lambda},\quad \mathring{\nabla}_{\mu}\overset{\text{def}}{=}\partial_{\mu}+\{\quad\} \tag{4.5}$$

方程(3.1)和(4.5)便构成了确定 16 个场变量$(g_{\alpha\beta},\ a_{\alpha\beta})$的 16 个函数上相互独立的方程式。只要规定了合适的边界条件，数学模型便构成了。

场方程(4.1)的假设，其物理证明如下：对比 BI(2.36)与 $a_{\alpha\beta}$，并考虑到(3.5)式，我们有

$$\overset{*}{\nabla}_{\lambda}F_{\mu\nu}+\overset{*}{\nabla}_{\mu}F_{\nu\lambda}+\overset{*}{\nabla}_{\nu}F_{\lambda\mu}=0 \tag{4.6}$$

其中 $F_{\lambda\mu}$ 由(4.3)确定，而

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda F_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} F_{\rho\nu} \tag{4.7}$$

(4.6)式等价于

$$\mathcal{D} F = 0 \tag{4.8}$$

其中，

$$F = \frac{1}{2!} F_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \tag{4.9}$$

(4.6)与(4.8)的等同性是建立在将结构方程(2.17)的局部方式用之于(4.8)，亦即

$$\mathcal{D}(dx^\lambda) = \frac{1}{2!} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{4.10}$$

所以，如果 F 与电磁 2-型一致，那么(4.8)立即可看为齐次的麦克斯韦方程的协变型。换言之，考虑到(4.8)，F 仅只能解释为电磁 2-型。在 Einstein-Cartan-Maxwell 理论基础上 Prassanna[19]已证明，于非黎曼流形上齐次的麦克斯韦方程应取(4.6)式的形式。然而，尽管在形式上等同于(4.6)式，Prassanna 所得到的结果在概念上是不同的。在 Prassanna 的处理中，电磁张量 $F_{\lambda\mu}$ 是在给定的几何形状之外独立被假定的；而在(4.6)式中，$F_{\lambda\mu}$ 是 $SU(2)$ 结构的时空的表现形式。结果，方程(4.1)自然地可看为非齐次的麦克斯韦方程。

(4.3)式中的物理常量 Q 是现今的理论与传统的电磁学的关键联结所在。人们一直认为，电磁存在于 Minkowskian 时空中，此时 $\mathbf{R}=0$。这一事实与(4.3)式不符。按现今的理论，电磁的存在总伴随着电磁能的存在，而后者又引起时空弯曲：在平展时空中，除却真空状态，别无他物。可以很自然地发现，电磁就是时空的表现形式。如果曲率小，物理常数 Q 则大，电磁场就依然保持为有限。当然，Q 必须是电荷量度；若无电荷存在，Q 则为零。尽管 Q 为常量，其值由经验确定，人们可以推测，但鉴于小的空间弯曲，Q 的大小应该可与 Eddington 值比较，后者是电子与质子间电力与引力的比值。

最后，我们需要说明广义相对论中测量（gauge）条件与现今理论中的场方程(4.5)两者所起的作用有何不同。在广义相对论中，具有相同边界条件的爱因斯坦方程的所有解是相同的，测量（gauge）条件仅能决定相同的度量类的别殊值（Hawking 和 Ellis[20]）。在现今的理论中，只要适当的 Cauchy 问题被建立，便能有唯一解，而不是整个相等的解系。若时空流形作为一个超曲面嵌入高维欧几里得空间，那么广义相对论将能得出，它能等比例地变形到任何其它超曲面上，而在这变形的状态下，它们仍然表征同一宇宙；测量（gauge）条件便引出了这个超曲面的一个特殊的变形状态。另一方面，在现今的理论中，宇宙仅仅是由高维欧几里得空间中的一个特殊的超曲面表达。

五、麦克斯韦方程

时空流形中电磁场的构造叙述如下：首先，考虑到(2.16)和(2.34)的关系，齐次的麦克斯韦方程(4.8)可作为时空理论的最重要的方程，而(4.3)式则可作为电磁张量的最重要的方程。其次，在基本的场方程(3.1)中，四个自由度的存在意味着导出时空流形唯一解须四个额外的彼此独立的场方程。所缺的这些场方程必须描述物理场，它们还应是能被验证的自然法则。在量子现象领域之外，电磁场是另一个唯一的人所共知的经典场。所以场方程(4.1)的假设，对体系的关系，在逻辑上是充分必要的。在(4.1)中，采用外部的协变微商 $\mathcal{D}$ 而不同 d，或许需要证明。首先，(4.1)中用 $\mathcal{D}$ 与(4.8)是一致的，而(4.8)是背景几何的显然的

结果．其次，当写出三维欧氏空间(E^3)中麦克斯韦整体方程时，我们需要考虑“环路变形”的经典的相似：

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{A}$$

上式给出

$$\mathrm{curl}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mathrm{curl}(\vec{V}\wedge\vec{B})$$

因为

$$\frac{d}{dt}(d\vec{A})\neq 0$$

类似地，因 $\mathscr{D}(dx^\lambda\wedge dx^\mu)\neq 0$，但 $d(dx^\lambda\wedge dx^\mu)=0$，$\mathscr{D}$ 曾用于(4.1)式．这便是首先采用 $\mathscr{D}$ 的动因，而且我们将看到[(4.1)，(4.8)]形式上等同于经典的麦克斯韦方程组

$$d^*F=J \tag{5.1}$$

$$dF=0 \tag{5.2}$$

为建立此等同性，我们只须证明如下定理．

定理 对任意的定义于具有度规联络的可微流形上的 2-型

$$\Omega=\frac{1}{2!}B_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{5.3}$$

我们有

$$\mathscr{D}\Omega=d\Omega \tag{5.4}$$

证明 考虑到(4.10)我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\Omega&=\frac{1}{2!}[(DB_{\mu\nu})dx^\mu\wedge dx^\nu+B_{\mu\nu}\mathscr{D}(dx^\mu\wedge dx^\nu)]\\&=\frac{1}{2!}[(\nabla_\lambda B_{\mu\nu}+S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}B_{\rho\nu})dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu]\end{aligned} \tag{5.5}$$

但

$$\begin{aligned}&(\nabla_\lambda B_{\mu\nu})dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\&=(\partial_\lambda B_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}B_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}B_{\rho\mu})dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\&=\left(\partial_\lambda B_{\mu\nu}-\frac{1}{2}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}B_{\rho\nu}-\frac{1}{2}S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}B_{\rho\mu}\right)dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\&=(\partial_\lambda B_{\mu\nu}-S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}B_{\rho\nu})dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\end{aligned} \tag{5.6}$$

把(5.6)式代入(5.5)式中，我们就得到(5.4)式．证毕．

可见，扭转的存在并不影响电磁场方程的基本结构，不过，F 的对偶性的确定依赖于度规张量，而后者的值通过(3.21)式依赖于 **S**．换句话说，电磁场有这样的表现形式，亦即：从它无法知晓时空弯曲的存在，尽管电磁场本身就是弯曲的表现形式；并不是弯曲是否存在的问题，而只是没被注意到而已．

特别地，在垂直（局部惯性的）坐标系中，度规张量可在原点取其欧氏值，此种情况方程(5.1)与平展时空中的麦克斯韦方程相同（方程(5.2)在弯曲的和平展的时空两种情况下是相同的，因为它是度规和联络为独立的）．因此我们甚至不必知道电磁张量 $F_{\lambda\mu}$ 是否是时空弯曲的表征．很简单地，它就是我们通过实验时常观察到的电磁场．因为按照 Poynting 定理（Stratton[21]），满足麦克斯韦方程的具有相同边界条件和相同流通分布的两个

场 $F_{\lambda\mu}$ 和 $\mathring{F}_{\lambda\mu}$ 必须相等。所以我们无法区分由(4.3)给出 $F_{\lambda\mu}$ 和由实验确定的电磁场 $\mathring{F}_{\lambda\mu}$。

为使基本的场方程(3.1)和(4.1)彼此显得一致，在点 $P\in M$ 的爱因斯坦方程可以改写成由 Misner 等[10]给出的形式：

$$*(\mathscr{D}\mathbf{P}\wedge\Omega)=\psi \tag{5.7}$$

其中

$$\Omega=e_\mu\wedge e_\nu R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\mu\nu}dx^\alpha\wedge dx^\beta \tag{5.8}$$

$$\mathscr{D}\mathbf{P}=e_\lambda dx^\lambda,\quad e_\lambda=\partial_\lambda \tag{5.9}$$

$$\mathscr{D}\mathbf{P}\wedge\Omega=e_\nu\wedge e_\lambda\wedge e_\mu\ R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda\mu}dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta \tag{5.10}$$

$$*(\mathscr{D}\mathbf{P}\wedge\Omega)=e_\rho\varepsilon_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho}R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda\mu}dx^\nu\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta \tag{5.11}$$

及

$$\psi=e_\beta\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}T^{\alpha\beta}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{5.12}$$

考虑到(2.26)，运动方程便为

$$*(\mathscr{D}^2\mathbf{P}\wedge\Omega)=\mathscr{D}\psi \tag{5.13}$$

另外，分别考虑到(2.17)和(2.25)，上式等同于

$$*(\Theta\wedge\Omega)=\mathscr{D}\psi \tag{5.14}$$

或

$$*(\mathscr{D}\Theta)=\mathscr{D}\psi \tag{5.15}$$

六、回　　顾

尽管形式优美，结果显著，广义相对论从没被认为已达到了完美的境界。爱因斯坦[22]在评价其广义相对论中的场方程时写道："当然，没有一刻我曾怀疑过这公式仅仅是为给出广义相对论原理一个闭合的表达而取的权宜之计，它就是引力场理论，在某种程度上，它倒象是从还未知其结构的总场中人为地分离出来的。" 另外，关于爱因斯坦-麦克斯韦理论，爱因斯坦[23]还说道："以逻辑上性质不同的结构出现的引力场和电磁场这样一种理论更为可取。" 我们发现，E-M 理论在如下几方面还不够完美：

（1） 它不能容纳非对称的总能量-动量张量。

（2） 虽然 LLMB 可以从它导出，但 LAMB 却不可。

（3） 缩并的第二 Bianchi 恒等式的四度任意性使场方程无法获得唯一解。

情况(3)或许会引起一些争论。然而我们可以从 Fock[17]得到支持，Fock 写道："为了求解爱因斯坦的 10 个引力方程须由 4 个另外的方程所取代，这一事实是显然的。而困难仅在于选择这些补充的方程式和写出边界条件。

与我们对问题的叙述相对照，爱因斯坦给出的方程摆脱了数学的不确定性，因此不存在解的唯一性的问题。"

如已经论述过的，传统的电磁理论从另一角度，亦即从场方程不能导出运动方程这一角度来看是不完整的。现阶段的任务便是将相互交错的零散的观点汇集起来，以使经典的时空流形图景趋于完美。

我们提出的用以完善爱因斯坦理论的方式是将 $SU(2)$ 结构作用于时空流形，并假定爱因斯坦方程是通过与补充的方程 (4.1) 有关的 $SU(2)$ 来定义的，而 (4.1) 式填补了由缩并的第二个 Bianchi 恒等式所致的在爱因斯坦方程中的缺陷。$SU(2)$结构的选择需要在时

空流形中置入半整数的旋量。另一方面，还需要维护度规，我们提出的场理论是经典的，但愿它不致被排除在基本粒子领域之外。而就目前来看，基本粒子理论是被量子力学所垄断的。但是时空流形至少应以这样一种方式来构造，即切空间 $T_x(M)$ 能为平展时空（量子力学的）物理提供一个合适的用武之地。由于 $SU(2)$ 作为切空间的自同构群，上述要求显然是能满足的。

宇宙场(S，R)是时空中从“平面”偏离的度量，而这偏离是由于物理场的存在所致。因此从逻辑上来说，电磁、引力以及螺旋场是同一宇宙场的不同表现方面。(4.3)式电磁场张量的选择基于以下事实：考虑到第二 Bianchi 恒等式，(4.3)式自然地满足齐次的麦克斯韦方程(4.6)。

看来，精确地满足条件的宇宙场不会是简单的函数。非齐次的麦克斯韦方程(4.5)则填补了由缩并的第二 Bianchi 等式所致的广义的爱因斯坦方程(3.1)中的不足，遗漏的部分找到了，理论的图景便完善了。而且，在这完整的横式中，LAMB 的结果是作为广义的爱因斯坦与 Bianchi 第一等式的交集(intersection)。现今的理论证明了：固有的旋转角动量与扭转张量，在(3.22)式对扭转张量无其它解释的意义上是成正比例的。

现今的理论这一套方法与没有假定作用原则这一传统的探讨方式是有点相异的。所有的内容都是从流形的几何特性导出，如结构方程和 Bianchi 等式。在时空流形 $SU(2)$ 结构的主要部分，我们作了两个更进一步的假定：〈1〉相等原则；〈2〉爱因斯坦和麦克斯韦方程在新流形上的有效性。假定〈1〉或许鲜为人知，而假定〈2〉可由“极小偶合原理”的广延得到证明：只有重力时，黎曼流形上所成立的，当新场融合时对于修正的流形亦同样成立。

人们有时认为，除非从作用原理导出，一个理论可以不用科学证明。构造一个理论时，人们可以首先假定拉格朗日乘子，并从变分原理导出场方程，或者也可以直接假定场方程。两种情况下，都要适当引入一些假定。末了，正是场方程可以由实验验证，而拉格朗日乘子则不然（它必须满足一定的对称性）。场方程从作用原理的导出，使得这理论具有一定的简洁性和统一性。但是，这一方法并非万能，特别是在如 Buchdahl[24]所示的包含有非线性的拉格朗日乘子的情况。

附　录　I

为获得(3.13)式的解答，我们有：

$$\phi=\frac{1}{2!}a_{\lambda\mu}dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu} \qquad (\mathrm{I}.1)$$

上式给出

$$d\phi=\frac{1}{2!}\partial_{\nu}a_{\lambda\mu}dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} \qquad (\mathrm{I}.2)$$

另外，辛条件(symplecticity)(3.5)给出

$$\partial_{\nu}a_{\lambda\mu}=\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}a_{\rho\mu}+\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}a_{\lambda\rho} \qquad (\mathrm{I}.3)$$

上式代入(I.2)可得

$$d\phi=\frac{1}{2!}(S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}a_{\rho\mu}-S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho}a_{\rho\lambda})dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}$$

$$=S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho}a_{\rho\mu}dx^{\nu}\wedge dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu} \qquad (\mathrm{I}.4)$$

另一方面，(I.3)可写成：

$$d\phi=\frac{1}{3!}\phi_{\lambda\mu\nu}dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} \qquad (\mathrm{I}.5)$$

因此，(Ⅰ.4)和(Ⅰ.5)给出

$$\frac{1}{3!}\phi_{\lambda\mu\nu}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu=S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}a_{\rho\mu}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{Ⅰ.6}$$

现在，我们定义一个协变矢量 v

$$\mathrm{v}=w_\beta A^{\beta\gamma}\partial_\gamma \tag{Ⅰ.7}$$

其中，w_β 是一个任意的并矢并形成 v 和 $d\phi$ 的“内积”，由(Ⅰ.4)我们有

$$i_{\mathrm{v}}(d\phi)=\frac{1}{3!}w_\beta A^{\beta\alpha}a_{\rho\alpha}S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}dx^\mu\wedge dx^\lambda \tag{Ⅰ.8}$$

由(Ⅰ.5)可得

$$i_{\mathrm{v}}(d\phi)=\frac{1}{3!}w_\beta A^{\beta\alpha}\phi_{\alpha\mu\lambda}dx^\mu\wedge dx^\lambda \tag{Ⅰ.9}$$

因此，我们有

$$w_\beta A^{\beta\alpha}a_{\rho\alpha}S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}=\frac{1}{3!}w_\beta A^{\beta\alpha}\phi_{\alpha\mu\lambda} \tag{Ⅰ.10}$$

因为 w_β 是任意的，也因为(3.14)定义

$$A^{\beta\alpha}a_{\rho\alpha}=\delta_\rho^\beta$$

因此，(Ⅰ.10)式给出(3.13)式。

参 考 文 献

[1] Winicour, J., in *General Relativity and Gravitation*, A. Held and P. Bergman, eds., **Vol.2**, Plenum, N. Y. (1980).

[2] Cartan, E., *Comptus Rendus*, **174** (1922), 593; *Ann. Ec. Norm.*, **40** (1923), 325.

[3] Trautman, A., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **20** (1972), 185, 503.

[4] Hehl, F. W., et al., *Rev. Mod. Phys.*, **48** (1976), 393.

[5] Bleeker, D., *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, Mass. (1981).

[6] Sternberg, S., *Lectures in Differential Geometry*, Prentice-Hall, N. J. (1963).

[7] Kobayashi, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[8] Hermann, R., *Quantum and Fermion Differential Geometry*, Part A, Math. Sci. Press, Brookline, Mass. (1977).

[9] Kobayashi, S. and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, **Vol.1**, Interscience, N. Y. (1963).

[10] Misner, C.W. et al., *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco (1973).

[11] Stephani, H., *General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982).

[12] Hermann, R., *Gauge Fields und Cartan-Ehresmann Connections*, Part A, Math. Sci. Press, Brookline, Mass. (1975).

[13] Frankel, S., *Gravitational Curvature*, W.H. Freeman, San Francisco (1979).

[14] Schouten, J.A., *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin (1954).

[15] De Groot, S.R. et al., *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1972).

[16] Heyde, P. von der, et al., *Proc. 1st Marcel Grosmann Meeting on G.R.*, North-Holland, Amsterdam (1977), 255.

[17] Fock, V., *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon, Oxford (1964)

[18] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, N.Y. (1972).

[19] Prassanna, A.R., *Phys. Lett.*, **54A** (1975), 17.
[20] Hawking, S., et al., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univer. Press, Cambridge (1973).
[21] Stratton, J.A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, N.Y. (1941).
[22] Einstein, A., in P.A. Schilpp, *Albert-Einstein-Philosopher-Scientist*, Library of Living Philosophers (1949).
[23] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, 6th ed., Princeton Univ. Press (1956).
[24] Buchdahl, H.A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **56** (1960), 396.

A Theory of Classical Spacetime(I)——Foundations

Yu Xin

(Beijing Astronomical Observatory, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Despite its beauty and grandeur the theory of GR still appears to be incomplete in the following ways:

(1) It cannot accommodate the asymmetric total energy momemtum tensor whose asymmetry has been shown to exist in the presence of electromagnetism.

(2) The law of angular momentum balance as an exact equation is not an automatic consequence of the field equations as is the case with the law of linear momentum balance.

(3) The four degrees of arbitrariness left by the contracted second Bianchi identity makes a unique solution of the field equations unattainable without extra (unphysical) postulates.

To answer the challenge posed by the above assertions we propose in this paper to complete Einstein's theory by postulating the principle fibre bundle $P[M, SU(2)]$ for the underlying geometry of the 4-dimensional spacetime, where the structure group $SU(2)$ is the real representation of the special complex unitary group of dimension 2; $SU(2)$ leaves concurrently invariant the metric form $dS^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ and the fundamental 2-form $\phi=(1/2!)\ a_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta$ defined globally on M. The Einstein equation defined in the terms of the $SU(2)$-connection is imposed on the spacetime manifold together with the Maxwell inhomogeneous equation as the supplementary condition where the electromagnetic tensor is identified with a contracted form of the curvature tensor. The result is a set of 16 functionally independent equations to the 16 unknown field variables $(g_{\alpha\beta},\ a_{\alpha\beta})$. Moreover, the law of angular momentum balance is just the skew-symmetric part of the generalized Einstein equation where the spin angular momentum tensor is shown directly proportional to the torsion tensor.