

波系在液体中的弹性管梁上的 的反射和辐射*

宋家骅

(复旦大学应用力学系, 1986年8月28日收到)

摘 要

本文研究入射波系在液体中的半无限弹性管梁的开口端的反射和辐射问题, 此波系由管梁上的挠曲波和管内、管外液体中相应的表面波(声波)所组成. 利用 Fourier 变换, 将这个半无限问题严格地归结为求解 Wiener-Hopf 型方程. 然后将液体和管梁的密度比作为小参数, 用摄动法求近似解. 文章着重研究了反射系数的计算, 还给出了远场的辐射型式曲线.

一、引言和问题的提法

管道开口的声散射是一个经典问题. 轴对称声波在圆截面刚性管开口端的反射和辐射问题, 已经有了详尽的研究. 关于 $a/\lambda \ll 1$ 情况 (a ——管道半径, λ ——波长), 最初的近似解是由 Helmholtz^[1] 和 Rayleigh^[2] 提出的. 而 Levine 和 Schwinger^[3] 以及 Vainstein^[4] 则给出了反射系数和辐射场的严格的显式表示式. Jones^[5] 讨论了任意入射角的平面声波在半无限刚性棒和管上的散射问题, 当入射角等于 π 时就相当于文[3]研究的情况. Williams 的论文[6]将 Jones 的研究推进到有限长度的情形. 但就作者所知, 类似本文所研究的可变形管梁开口端的散射问题尚无文章发表.

我们来考虑厚度为 h , 中面半径为 a 的浸没在液体中的半无限长薄壁管, 选坐标系如图 1 所示. 假设 $h/a \ll 1$, 在波长、半径比 $\lambda/a > 30$ 时可以应用 Euler-Bernoulli 梁理论来分析^[8],

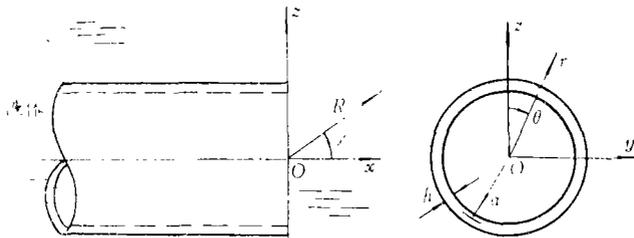


图 1

* 戴世强推荐.

于是该弹性管梁的方程可以写为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_r A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1.1)$$

式中 $w(x, t)$ 是横向 (z 方向) 位移, EI 是抗弯刚度 (E 是弹性模量), $\rho_r A$ 是单位长度管梁的质量 (A 是截面积), 而且

$$I = \pi a^3 h, \quad A = 2\pi a h \quad (1.2a, b)$$

$$p(x, t) = \int_0^{2\pi} (p_i - p_e)_{r=a} \cos \theta \cdot a d\theta \quad (1.3)$$

这里 $p_i(r, \theta, x, t)$ 和 $p_e(r, \theta, x, t)$ 分别是管内、外液体的压力. 液体压力和液体质点速度则可以分别表示为

$$p = -\rho_f \dot{\phi}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \nabla \phi \quad (1.4a, b)$$

式中 ρ_f 是液体密度, $\phi(r, \theta, x, t)$ 是液体质点运动的势函数, 它满足方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_f^2} \ddot{\phi} \quad (1.5)$$

式中 c_f 是液体中的声速. 管梁和流体的相互作用是通过相互间的压力实现的, 表现为固体和流体质点的速度的径向分量的连续性:

$$\dot{w}(x, t) \cos \theta = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (1.6)$$

根据作者等完成的文[7]的结果, 可知对于无限长的管梁, 此固体-流体系统中能够存在有形式为

$$\phi(r, \theta, x, t) = \Phi(r) \cos \theta \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.7)$$

$$w(x, t) = \frac{i}{\omega} B \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.8)$$

的波系, (1.8) 式中的因子 i/ω 是为了方便而引进的, B 是常数, 而

$$\Phi(r) = \begin{cases} B J_1(qr) / q J_1'(qa), & r \leq a \\ B H_1^{(1)}(qr) / q H_1^{(1)'}(qa), & r \geq a \end{cases} \quad (1.9a, b)$$

$$q^2 = k_f^2 - k^2, \quad k_f^2 = \omega^2 / c_f^2 \quad (1.10a, b)$$

J_1 , $H_1^{(1)}$ 分别是一阶的第一类 Bessel 函数和 Hankel 函数, 同时波数 k , 和频率 ω 应满足色散方程. 此色散方程在引进无量纲频率 Ω 和其它无量纲量 η , α , \bar{q} , ϵ

$$\Omega = (\rho_r A a^4 / EI)^{\frac{1}{2}} \omega = (\sqrt{2} a / c_r) \omega, \quad c_r = (E / \rho_r)^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

$$\eta = ka, \quad \alpha^2 = c_p^2 / 2c_f^2, \quad \bar{q}^2 = \alpha^2 \Omega^2 - \eta^2, \quad \epsilon = \rho_f / \rho_r \quad (1.12a, b, c, d)$$

后可写为:

$$\bar{q}^2 J_1'(\bar{q}) H_1^{(1)'}(\bar{q}) (\eta^4 - \Omega^2) = 2i\epsilon \Omega^2 / (A/a^2) \quad (1.13)$$

由[7]可知, 当频率 Ω 低于截止频率 $\Omega_c = (1 + (2\pi\epsilon / (A/a^2))^{\frac{1}{2}}) / a^2$ 时液体中的波是一种 (相对于管梁而言的) 表面波, 朝 x 方向传播. 然而当 $\Omega > \Omega_c$ 时, 因为色散方程的根 η 是复数, 所以 $\Phi(r)$ 也是复的, 液体中的波除了朝 x 方向传播外, 也朝 r 方向辐射. 对于水中的钢管梁, 密度比 $\epsilon = 0.128$, 如果取 $A/a^2 = 0.5$ (相当于 $h/a = 0.08$), 则可计算得 $\Omega_c = 0.273$, 对应的 $\eta_c = 0.664$.

本文考虑(1.7)~(1.10)所决定的入射波系在半无限管梁开口端 $x=0$ 处的反射以及从开口端以球面波形式向液体介质中辐射的问题。在下文中将加上足标0来表示入射波系,例如液体中的入射波为 $\phi_0(r, \theta, x, t) = \Phi_0(r) \cos\theta \exp[i(k_0x - \omega t)]$ 等等。本问题与[3]有两处不同,一是不把管道看作刚性的,二是入射波系非轴对称。

二、归结为 Wiener-Hopf 型方程

总的势函数(总波场)可以表示为

$$\phi' = [\Phi_0(r) \exp[i k_0 x] + \phi(r, x)] \cos\theta \exp[-i\omega t] \quad (2.1)$$

式中未知函数 $\phi(r, x)$ 代表反射场和辐射场。由于总波场 ϕ' 必须满足(1.5), $\phi(r, x)$ 就必须满足方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(k_f^2 - \frac{1}{r^2}\right) \phi = 0 \quad (2.2)$$

$\phi(r, x)$ 所对应的管梁的横向位移为

$$w(x) = \frac{i}{\omega} \phi'(a, x) \quad (2.3)$$

式中的撇号表示关于 r 的偏导数。在 $-\infty < x \leq 0$ 范围内, w 和 ϕ 应该满足方程(1.1), 因此有

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \phi'(a, x) - \rho_p A \omega^2 \phi'(a, x) = -\pi a \rho_f \omega^2 [\phi(a+0, x) - \phi(a-0, x)] \quad (-\infty < x \leq 0) \quad (2.4)$$

需要注意 $\phi'(r, x)$ 对应着质点速度, 所以在表面 $r=a$ 处是连续的; 而 $\phi(r, x)$ 对应着压力, 在 $x < 0$ 区间上在 $r=a$ 处一般是不连续的。忽略流体压力在开口端横截面上的弯矩和剪力, 我们得到边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi'_0(a, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi'(a, x) \right]_{x=0} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi'_0(a, x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi'(a, x) \right]_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\text{而} \quad \phi'_0(a, x) = \Phi'_0(a) \exp[i k_0 x] = B \exp[i k_0 x] \quad (2.6)$$

此外还要求 $\phi(r, x)$ 满足辐射条件

$$R \left(\frac{d\phi}{dR} - i k_f \phi \right) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty \text{时}) \quad (2.7)$$

式中 $R \equiv (r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ 。这样就可以唯一地确定解 $\phi(r, x)$ 。

我们用 Fourier 变换来解这个问题。记 $\phi(r, x)$ 关于 x 的 Fourier 变换为

$$\Phi(r, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k x] \phi(r, x) dx \quad (2.8)$$

对方程(2.2)作 Fourier 变换后, 可以解得 $\Phi(r, k)$:

$$\Phi(r, k) = \begin{cases} A_1(k) H_1^{(1)}(qr), & r \geq a \\ A_2(k) J_1(qr), & r \leq a \end{cases} \quad (2.9)$$

式中 q 由(1.10a)式给出, 函数 $A_1(k)$, $A_2(k)$ 待定。由函数 $\phi'(r, x)$ 在 $r=a$ 处的连续性可知

$\Phi'(r, k)$ 在 $r=a$ 处也是连续的, 于是可得 $A_1(k)$, $A_2(k)$ 之间的关系式为

$$A_1(k)H_1^{(1)'}(qa) = A_2(k)J_1'(qa) \quad (2.10)$$

定义函数 Φ_- , Φ_+ 为

$$\Phi_- = \int_{-\infty}^0 \exp[ikx]\phi(r, x)dx, \quad \Phi_+ = \int_0^{\infty} \exp[ikx]\phi(r, x)dx \quad (2.11a, b)$$

$$\text{所以 } \Phi(r, k) = \Phi_-(r, k) + \Phi_+(r, k) \quad (2.12)$$

易知 Φ_+ 和 Φ_- 分别是在复平面 k 的上半平面和下半平面上解析的函数. 然后在方程(2.4)的两端乘以 $\exp[ikx]$ 并以 $x=-\infty$ 积分到 $x=0$, 利用分部积分法可以得到关于 Φ_- 的方程为

$$\begin{aligned} EIk^4\Phi_-'(a, k) + ik^3EI\phi'(a, 0) - k^2EI \frac{\partial}{\partial x} \phi'(a, 0) - ikEI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi'(a, 0) \\ + EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi'(a, 0) - \rho_f A \omega^2 \Phi_-'(a, k) = -\rho_f \pi a \omega^2 V_-(a, k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{式中 } V_-(a, k) \equiv \Phi_-(a+0, k) - \Phi_-(a-0, k) \quad (2.14)$$

利用边界条件(2.5)和(2.6)以及 ϕ' 的连续性, 可得

$$\Phi_+(a+0, k) - \Phi_+(a-0, k) = \frac{-2B}{\pi q_0^2 a J_1'(q_0 a) H_1^{(1)'}(q_0 a)} \cdot \frac{1}{k+k_0} \quad (2.15)$$

其中 q_0 决定于 $q_0^2 = k_0^2 - k^2$, 而 k_0 是入射波的波数. 再利用(2.9), (2.10), (2.15)式可得

$$V_-(a, k) = \frac{-2iA_1}{\pi q a J_1'(qa)} + \frac{2B}{\pi q_0^2 a J_1'(q_0 a) H_1^{(1)'}(q_0 a)} \cdot \frac{1}{k+k_0} \quad (2.16)$$

然后设法再次利用(2.9)式消去上式中的 $A_1(k)$, 并将 $V_-(a, k)$ 代入(2.13)式, 就得到关于 $\Phi_+'(a, k)$ 和 $\Phi_-'(a, k)$ 的方程

$$\begin{aligned} [q^2 J_1'(qa) H_1^{(1)'}(qa) (EIk^4 - \rho_f A \omega^2) - 2i\rho_f \omega^2] \Phi_-'(a, k) = 2i\rho_f \omega^2 \Phi_+'(a, k) \\ - 2\rho_f \omega^2 \frac{q^2 J_1'(qa) H_1^{(1)'}(qa) B}{q_0^2 J_1'(q_0 a) H_1^{(1)'}(q_0 a) (k+k_0)} \\ - BEI q^2 J_1'(qa) H_1^{(1)'}(qa) [ik^3 C_1 - k^2 k_0 C_2 - i k k_0^2 + i k_0^3] \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中已经引进了两个未知常数 C_1 和 C_2

$$C_1 = \phi'(a, 0)/B \quad (2.18)$$

$$C_2 = \frac{\partial}{\partial x} \phi'(a, 0)/B k_0 \quad (2.19)$$

它们可以在求解过程中确定下来.

采用无量纲形式, 方程(2.17)可改写为

$$\begin{aligned} [L(\eta)(\eta^4 - \Omega^2) + \epsilon(a/h)\Omega^2] \Psi_-(\eta) = -\epsilon(a/h)\Omega^2 \Psi_+(\eta) \\ - \frac{i\epsilon(a/h)\Omega^2}{\eta + \xi} \cdot \frac{L(\eta)}{L(\xi)} - L(\eta)(i\eta^3 C_1 - \eta^2 \xi C_2 - i\eta \xi^2 + i\xi^3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

式中已经利用了关系式 $A = 2\pi a h$, 并引进了新的无量纲量

$$\xi = k_0 a \quad (2.21)$$

$$L(\eta) = i\pi \bar{q}^2 J_1'(\bar{q}) H_1^{(1)'}(\bar{q}) \quad (2.22)$$

$$\Psi_{\pm}(\eta) = \Phi'_{\pm}(a, k) / Ba \quad (2.23)$$

方程(2.20)中的函数 $\Psi_{+}(\eta)$ 和 $\Psi_{-}(\eta)$ 分别是复平面 η 的上半平面和下半平面上的解析函数, 而且在实轴邻近有公共的解析区域, 所以(2.20)是一个Wiener-Hopf型方程, 从而原则上可以从这个方程同时解出两个函数 $\Psi_{+}(\eta)$ 和 $\Psi_{-}(\eta)$.

三、Wiener-Hopf型方程(2.20)的摄动解

按照Wiener-Hopf型方程的一般解法, 要求将(2.20)中 $\Psi_{-}(\eta)$ 前的因子, 即方括号所包括的核函数分解成为分别在复平面 η 的上半平面和下半平面上解析的两个函数的商式. 但是这个核函数太复杂了, 看来除了表示成积分式作形式上的分解外, 实际分解是不可能的.

注意到密度比 ϵ 一般是小量(对水中钢管梁 $\epsilon=0.128$), 我们可以将未知函数 Ψ_{+} 和 Ψ_{-} 以及未知常数 C_1, C_2 展开为 ϵ 的幂级数:

$$\Psi_{\pm} = \Psi_{\pm}^{(0)} + \epsilon \Psi_{\pm}^{(1)} + \epsilon^2 \Psi_{\pm}^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

$$C_j = C_j^{(0)} + \epsilon C_j^{(1)} + \epsilon^2 C_j^{(2)} + \dots \quad (j=1, 2) \quad (3.2)$$

另外利用关于 $\eta(\Omega)$ 的色散方程(1.13), 将(2.20)中的因子 $(\eta^4 - \Omega^2)$ 改写为

$$\eta^4 - \Omega^2 = (\eta^4 - \xi^4) - \epsilon \frac{a}{h} \frac{\Omega^2}{L(\xi)} \quad (3.3)$$

将(3.1)~(3.3)代入(2.20), 并令所得结果两端 $\epsilon^0, \epsilon, \epsilon^2$ 等等的系数相等, 我们可以得到一系列Wiener-Hopf型方程.

3.1 零阶摄动解

由 ϵ^0 的系数可得零阶方程为

$$L(\eta)(\eta^4 - \xi^4)\Psi_{-}^{(0)}(\eta) = -L(\eta)(i\eta^3 C_1^{(0)} - \eta^2 \xi C_2^{(0)} - i\eta \xi^2 + i\xi^3) \quad (3.4)$$

这个Wiener-Hopf型方程是退化的, 因为方程中不出现 $\Psi_{+}^{(0)}(\eta)$. 消去因子 $L(\eta)$ 并注意到 $\Psi_{-}^{(0)}(\eta)$ 在 $\eta = -\xi$ 和 $\eta = -i\xi$ 是解析的, 可解出 $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ 并得到

$$\Psi_{-}^{(0)}(\eta) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1-i}{\eta - i\xi} \quad (3.5)$$

于是

$$\Phi'^{(0)}(a, k) = \left[\frac{B}{k - k_0} + \frac{B(1-i)}{k - ik_0} \right] + \Phi_+'^{(0)}(a, k)$$

由Fourier反变换得

$$\phi'^{(0)}(a, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ikx] \left\{ \left[\frac{B}{k - k_0} + \frac{B(1-i)}{k - ik_0} \right] + \Phi_+'^{(0)}(a, k) \right\} dk$$

利用留数定理, 易得

$$\phi'^{(0)}(a, x) = iB \exp[-ik_0 x] + (1+i)B \exp[k_0 x] \quad (x \leq 0)$$

和(2.6)式作比较, 可见反射系数为 i , 端点共振(end resonance)系数为 $1+i$. 这个结果与不存在液体时的熟知结论(注意到 $\phi'(a, x)$ 相当于梁的横向位移)是完全一致的(例如参

见[9])，此外也说明作(3.3)形式的改写是必要。

3.2 一阶摄动解

一阶方程的形式为

$$sL(\eta)(\eta^4 - \xi^4)\Psi_{-}^{(1)}(\eta) = \Psi_{+}^{(0)}(\eta) + \Psi_{-}^{(0)}(\eta)[1 - L(\eta)/L(\xi)] \\ + \frac{iL(\eta)}{L(\xi)(\eta + \xi)} - sL(\eta)(i\eta^3 C_1^{(1)} - \eta^2 \xi C_2^{(1)}) \quad (3.6)$$

$$\text{式中常数} \quad s \equiv -[2\pi\Omega^2 a^2/A]^{-1} = -(h/a)/\Omega^2 \quad (3.7)$$

这是个标准的Wiener-Hopf型方程，其中 $\Psi_{-}^{(0)}(\eta)$ 已求得，而两个未知函数 $\Psi_{-}^{(1)}$ 和 $\Psi_{+}^{(0)}$ 有待求解。尽管核函数 $L(\eta)(\eta^4 - \xi^4)$ 仍然很复杂，但已有了重大的简化，这就是摄动法所起的关键作用所在。

先将函数 $L(\eta)$ 分解为

$$L(\eta) = L^{-}(\eta)/L^{+}(\eta) \quad (3.8)$$

式中 L^{-} 和 L^{+} 分别是复平面 η 的下半平面和上半平面上解析的函数。函数 $L(\eta)$ 比[3]中的核函数更复杂，但有相似之处。附录中将简略地叙述 $L(\eta)$ 的分解的过程。

在方程(3.6)两端乘以 $L^{+}(\eta)$ 并相加或相减一些相同的项，我们有

$$sL^{-}(\eta)(\eta^4 - \xi^4)\Psi_{-}^{(1)}(\eta) + sL^{-}(\eta)[i\eta^3 C_1^{(1)} - \eta^2 \xi C_2^{(1)}] + \frac{L^{-}(\eta)}{L(\xi)} \Psi_{-}^{(0)}(\eta) \\ - \frac{i[L^{-}(\eta) - L^{-}(-\xi)]}{L(\xi)(\eta + \xi)} - \frac{L^{+}(\xi)}{\eta - \xi} - \frac{1-i}{\eta - i\xi} L^{+}(i\xi) = L^{+}(\eta)\Psi_{+}^{(0)}(\eta) \\ + \frac{iL^{-}(-\xi)}{L(\xi)(\eta + \xi)} + \frac{L^{+}(\eta) - L^{+}(\xi)}{\eta - \xi} + \frac{1-i}{\eta - i\xi} [L^{+}(\eta) - L^{+}(i\xi)] \quad (3.9)$$

此方程的左端和右端的函数分别是复平面 η 的下半平面和上半平面上的解析函数。采用通常的论证方法可知两端等于同一个整函数，且此整函数恒等于零。这样可解出 $\Psi_{+}^{(0)}(\eta)$ 和 $\Psi_{-}^{(1)}(\eta)$ 分别为

$$\Psi_{+}^{(0)}(\eta) = \left[-\frac{iL^{-}(-\xi)}{L(\xi)(\eta + \xi)} + \frac{L^{+}(\xi)}{\eta - \xi} + \frac{1-i}{\eta - i\xi} L^{+}(i\xi) \right] / L^{+}(\eta) - \Psi_{-}^{(0)}(\eta) \quad (3.10)$$

$$\Psi_{-}^{(1)}(\eta) = \frac{\eta^2 \xi C_2^{(1)} - i\eta^3 C_1^{(1)}}{\eta^4 - \xi^4} + \left\{ \frac{i[L^{-}(\eta) - L^{-}(-\xi)]}{L(\xi)(\eta + \xi)} + \frac{L^{+}(\xi)}{\eta - \xi} + \frac{1-i}{\eta - i\xi} L^{+}(i\xi) \right. \\ \left. - \frac{L^{-}(\eta)}{L(\xi)} \Psi_{-}^{(0)}(\eta) \right\} / sL^{-}(\eta)(\eta^4 - \xi^4) \quad (3.11)$$

由于 $\Psi_{-}^{(1)}(\eta)$ 在 $\eta = -\xi$ 和 $\eta = -i\xi$ 处解析，因此可解出 $C_1^{(1)}$ ， $C_2^{(1)}$ 并完全确定 $\Psi_{-}^{(1)}(\eta)$ 的表示式。

本文也曾考虑二阶摄动解，相应的方程将大为繁复，从而在求解过程中作了一些简化假定，有关结果将在第六节中给出。

四、管梁中的反射波和反射系数

求得 $\Psi_+(\eta)$ 和 $\Psi_-(\eta)$ 后就可以计算由反射波引起的管梁的横向位移。对于任意的 x 值，Fourier反变换为

$$\phi'(a, x) = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi_+(\eta) + \Psi_-(\eta)] \exp[-i\eta x/a] d\eta \quad (4.1)$$

对于 $x < 0$ ，涉及 $\Psi_+(\eta)$ 的积分等于零，所以管梁的位移

$$w(x) = \frac{i}{\omega} \phi'(a, x) = \frac{iB}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_-(\eta) \exp[-i\eta x/a] d\eta \quad (4.2)$$

对于零阶摄动，我们从上节的结果得($x < 0$):

$$w(x) \sim \frac{iB}{\omega} [i \exp[-ik_0 x] + (1+i) \exp[k_0 x]] \quad (4.3)$$

其中第二项是端点共振项，当 $x \rightarrow -\infty$ 时消失，因而只剩下反射波。

在一般情况下， $x \rightarrow -\infty$ 时的渐近位移为

$$w(x) \sim \frac{iB}{\omega} \mathcal{R}(\Omega) \exp[-ik_0 x] \quad (4.4)$$

式中 $\mathcal{R}(\Omega)$ 是反射系数，它是由极点 $\eta = \xi$ 处的留数得到的，亦即

$$\mathcal{R}(\Omega) = i \operatorname{Res}[\Psi_-(\eta)]_{\eta=\xi} \quad (4.5)$$

将 $\mathcal{R}(\Omega)$ 展开为 ϵ 的幂级数，我们有

$$\mathcal{R}(\Omega) = i + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots \quad (4.6)$$

式中系数 R_j 是由 $\Psi^{(j)}(\eta)$ ， $j=1, 2, \dots$ 决定的。从(3.11)可计算得 R_1 :

$$R_1 = \frac{1}{8s\xi^4} \left\{ 4i L^+(\xi) L^+(i\xi) + 2[L^+(i\xi)]^2 - [L^+(\xi)]^2 - 4i \frac{L^+(i\xi)}{L^-(\xi)} \right. \\ \left. - [L^-(\xi)]^{-2} + \frac{2i}{L(\xi)} \left[\frac{M(\xi)}{L^-(\xi)} - M(-\xi) L^+(\xi) \right] \right\} \quad (4.7)$$

$$\text{式中} \quad M(x) = x \frac{d}{dx} L^-(x) \quad (4.8)$$

五、液体中的辐射场和辐射系统

液体中的辐射场可根据Fourier反变换表示为

$$\phi(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r, k) \exp[-ikx] dk \quad (5.1)$$

其中 $\Phi(r, k)$ 可以推得为

$$\Phi(r, k) = Ba[\Psi_+(ka) + \Psi_-(ka)] \begin{cases} H_1^{(1)}(qr)/qH_1^{(1)'}(qa), & r \geq a \\ J_1(qr)/qJ_1'(qa), & r \leq a \end{cases} \quad (5.2)$$

考虑 $r > a$ 的区域并引进坐标 R 和 χ 为(参见图1):

$$x=R \cos \chi, r=R \sin \chi \quad (5.3)$$

假设 qr 是大的量, 从而 $H_1^{(1)}(qr)$ 可以用渐近表示式

$$H_1^{(1)}(qr) \sim \left(\frac{2}{\pi qr} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[i(qr - 3\pi/4)] \quad (5.4)$$

来近似, 于是由(5.1)式表示的辐射场

$$\phi \sim \frac{Ba}{2\pi} \left(\frac{2}{k_f R \pi \sin \chi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[i\pi/4] \int_0^\pi \frac{\Psi(-k_f a \cos \gamma) \exp[ik_f R \cos(\gamma - \chi)]}{(\sin \gamma)^{1/2} H_1^{(1)'}(k_f a \sin \gamma)} d\gamma \quad (5.5)$$

在得到(5.5)的过程中已作了从 k 到 γ 的变量代换: $k = -k_f \cos \gamma$, 将原积分轨道变换到 γ 平面上的轨道 C (从 $\pi - i\infty$ 到 π , 然后沿实轴到原点, 再沿虚轴到 $i\infty$), 而式中的 $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$.

将由(3.10)和(3.5)给出的 $\Psi_+^{(0)}$ 和 $\Psi_-^{(0)}$ 代入(5.5)式, 可以得到辐射场的首次近似. 注意到(3.10)式是个复杂的式子, 在 $R \rightarrow \infty$ 时我们将(5.5)式中的积分值看成是由被积函数的极点、分支切割线以及驻相点的贡献的总和. 应用驻相法, 可知驻相点的贡献为

$$\phi_{sp}(R, \chi) = D(\chi) \exp[ik_f R] / k_f R \quad (5.6)$$

式中辐射系数 $D(\chi)$ 的表示式是

$$D(\chi) = \frac{Ba}{\pi} \frac{\Psi^{(0)}(-k_f a \cos \chi)}{\sin \chi H_1^{(1)'}(k_f a \sin \chi)} \quad (5.7)$$

函数 $\Psi^{(0)}(\eta)$ 在 $\eta = \xi$ 处的极点对应于管梁上朝 $x = -\infty$ 方向传播的反射波. 如果

$$\pi - \chi_0 < \chi < \pi, \chi_0 = \arccos \left\{ \min \left[\operatorname{Real} \left(\frac{k_0}{k_f}, \frac{k_f}{k_0} \right) \right] \right\}$$

则在应用驻相法变更轨道时将扫过这个极点. 而 $\eta = -\xi$ 处的极点在 $0 < \chi < \chi_0$ 时扫过, 它的作用正好抵消了朝 x 正方向传播的入射波. 从物理上看这是因为在 $x > 0$ 部分并无管梁存在以支持这种入射波. 最后, $\eta = i\xi$ 处的极点会给出类似于端点共振的波, 随着离端点距离的增加而迅速消失.

总之, 在 $R \rightarrow \infty$ 时辐射场的主要贡献来源于(5.6)的 ϕ_{sp} , 它和角度 χ 的关系由辐射系数 $D(\chi)$ (5.7)式决定, 其中的 $\Psi^{(0)}(\eta)$ 由(3.10)和(3.5)给出.

六、能量分析和数值计算结果

不难计算入射波在一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 内经过 $x = \text{常数}$ 平面的平均能量输入率为

$$\langle P^{\text{in}} \rangle = \langle P_p^{\text{in}} \rangle + \langle P_f^{\text{in}} \rangle \quad (6.1)$$

其中管梁上的入射挠曲波的平均能量输入率是

$$\langle P_p^{\text{in}} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+T} [\operatorname{Re}(-EIw'') \operatorname{Re}(i\dot{w}') + \operatorname{Re}(EIw'') \operatorname{Re}(i\dot{w})] dt = EIB^2 \frac{k_0^3}{\omega} \quad (6.2)$$

伴随着的液体中的平均能量输入率可计算得 (对 $\Omega < \Omega_0$)

$$\langle P_f^{\text{in}} \rangle = \langle P_p^{\text{in}} \rangle \frac{\epsilon \Omega^2}{q_0^3 \xi^2} \left\{ \frac{a}{4h} \left\{ \frac{\int_0^1 [I_1(q_0 a v)]^2 v dv}{[I_1'(q_0 a)]^2} + \frac{\int_1^\infty [K_1(q_0 a v)]^2 v dv}{[K_1'(q_0 a)]^2} \right\} \right\} \quad (6.3)$$

式中 I_1, K_1 分别是一阶的第一和第二类修正的Bessel函数。以半径为 $R(R \gg 1)$ 的球面上向外辐射的平均能量，可表示为

$$\langle P^R \rangle = \langle P_p^{in} \rangle \frac{\epsilon \Omega^2}{4 \xi^3 k_f a (Ba)^2} \cdot \frac{a}{h} \int_0^\pi |D(\chi)|^2 \sin \chi d\chi \quad (6.4)$$

式中 $D(\chi)$ 由(5.7)式给出。

作为一种校核，也可以由能量平衡

$$\langle P^{in} \rangle = \langle P^{re} \rangle + \langle P^R \rangle \quad (6.5)$$

反算出反射系数 $|\mathcal{R}(\Omega)|$ 。因为反射波的能量可以写成

$$\langle P^{re} \rangle = |\mathcal{R}(\Omega)|^2 \langle P^{in} \rangle \quad (6.6)$$

所以

$$|\mathcal{R}(\Omega)| = \left[\frac{\langle P^{in} \rangle - \langle P^R \rangle}{\langle P^{in} \rangle} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

对于第一节所述的水中的钢管梁，在图2上示出了反射系数 $|\mathcal{R}(\Omega)|$ 的数值计算结果。零阶近似时， $|\mathcal{R}(\Omega)| = 1$ ；一阶近似时， $|\mathcal{R}(\Omega)| = |i + \epsilon R_1|$ ；对于二阶摄动解， $|\mathcal{R}(\Omega)| = |i + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2|$ 。注意到由能量考虑得到的反射系数(6.7)实质上也是一阶近似，所以与 $|i + \epsilon R_1|$ 极其接近是很自然的。这些曲线都显示出，当 Ω 接近于 Ω_0 时，反射能量迅速减少，从而有更多的能量以球面波形式辐射到液体中。

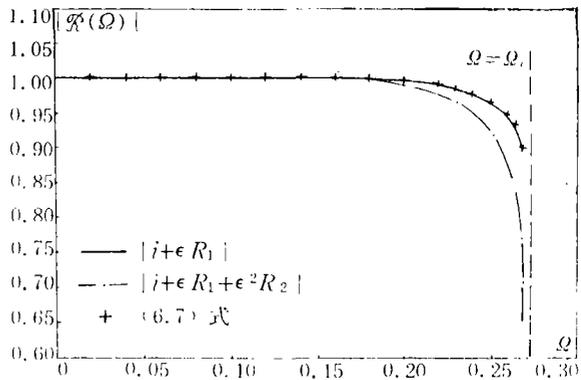


图2 反射系数曲线

在图3上对几个 Ω 值示出了辐射系数 $|D(\chi)|$ 的极坐标形式的曲线，即远场辐射型式曲线，其中取 $Ba/\pi = 1$ 。对于低频，辐射在 $\pi/4 < \chi < 3\pi/4$ 范围内最强。随着频率接近于截止频率， $|D(\chi)|$ 的最大值的方向和管梁轴线的夹角 χ 越来越小，当 $\Omega = 0.27$ 时，几乎和管梁轴线平行。从图3上还可看到当 Ω 增加时 $|D(\chi)|$ 的值急剧增加。

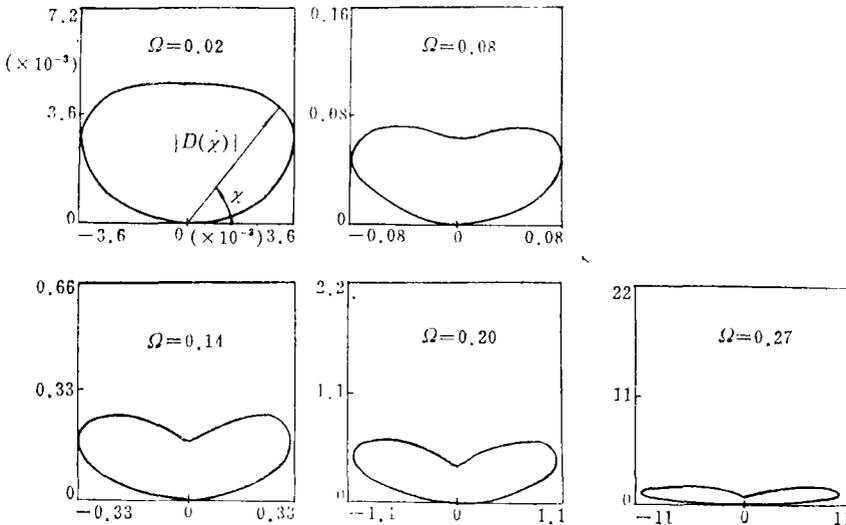


图3 不同频率下的远场辐射型式曲线

本研究是在美国工程科学院院士、Northwestern大学的 J. D. Achenbach 教授建议下进行的。作者同他以及 Rutgers 大学 A. N. Norris 副教授有意义的讨论对本文的完成有很大的帮助。在这里谨向他们表示衷心的感谢。

附录：有关(3.8)式的 $L(\eta)$ 函数分解

在本文的实际计算中取 $L(\xi) = -\pi i(k_f^2 - \xi^2)a^2 H_1^{(1)'}[(k_f^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}a] J_1'[(k_f^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}a]$ ，和(2.22)只差一负号。其分解过程的要点是：

1. 对于 $\log L(\xi)$ 在实轴邻近的狭长矩形区域上应用 Cauchy 积分公式，得 L^+ ， L^- 的积分表示式和关系式 $L^-(\xi) = 1/L^+(-\xi)$ ，这是作形式上的分解所惯用的办法。

2. 先计算 $f(\xi) = (d/d\xi)\log L^+(\xi)$ 的显式。对本文来说

$$f(\xi) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\log\{-\pi i(k_f^2 - t^2)H_1^{(1)'}[(k_f^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}a]J_1'[(k_f^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}a]\}}{(t - \xi)^2} dt \quad (1)$$

实际计算时将图4(a)的轨道 C_+ 用沿图4(b)上的轨道 Γ_1 和 Γ_2 来代替，而沿 Γ_2 的积分通过构成下半平面上的封闭积分轨道来计算。构成这围道时应避开分支切割线，亦即应避免将 J_1' 和 $H_1^{(1)'}$ 在下半平面上的零点包围在内。

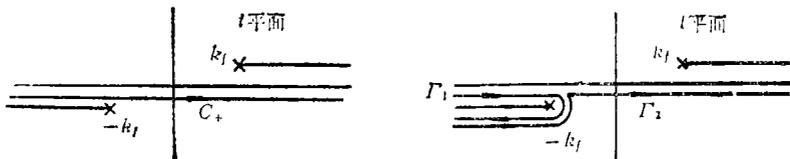


图 4

3. 再对 $f(\xi)$ 计算积分，取反对数，并决定这过程中出现的常数，就得出 $L^+(\xi)$ 的具体表达式。

在文[3]中，因为函数 $H_1^{(1)}(z)$ 的零点不在第四象限(本文作者计算 $H_1^{(1)}(z)$ 的零点得 $z_1^* = -0.4344 - 0.5595i$)，所以在复平面 t 的下半平面上不存在 $H_1^{(1)}[(k_f^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}a]$ 的零点。可是 $H_1^{(1)'}(z)$ 却有第四象限的零点(本文计算得 $z_2^* = 0.5012 - 0.6435i$)，它对应 t 平面上第三象限中 $H_1^{(1)' }[(k_f^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}a]$ 的零点 $t = t_*$ ，使得在计算与 Γ_2 有关的围道积分时，需要避开此零点 t_* 所对应的分支切割线，结果在 $f(\xi)$ 中将增加形式为 $1/(\xi - t_*)$ 的一项。顺便指出，现有的关于 $H_1^{(1)}(z)$ 和 $H_1^{(1)'}(z)$ 在复平面上的零点的讨论是不充分的，而且有许多错误。例如文[3]中“ $H_1^{(1)}(z)$ 在 $-\pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ 范围内无零点”的论断就是错误的。

对于 $L^-(\xi)$ 的导数，注意到 $f(\xi) = (dL^+(\xi)/d\xi)/L^+(\xi)$ ，可以用 f 和 L^+ 表出：

$$\frac{dL^-(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{L^+(-\xi)} \right] = \frac{-dL^+(-\xi)/d\xi}{[L^+(-\xi)]^2} = f(-\xi)/L^+(-\xi) \quad (2)$$

参 考 文 献

- [1] Helmholtz, H., Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, *Crelle's J. Reine Angewandete Math.*, 57 (1860), 1—72.
- [2] Rayleigh, Lord, *Theory of Sound*, Vol. 2, Dover (1945), 196—201, 487—491.
- [3] Levine, H. and J. Schwinger, On the radiation of sound from an unflanged circular pipe, *Phys. Rev.*, 73 (1948), 383—406.
- [4] Vainstein, L., The theory of sound waves in open tubes, *Zh. Tech. Fiz.*, 19 (1949), 911—930.
- [5] Jones, D. S., The scattering of a scalar wave by a semi-infinite rod of circular cross section, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A247 (1955), 499—528.
- [6] Williams, W. E., Diffraction by a cylinder of finite length, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52 (1956), 322—335.
- [7] Song, J., A. N. Norris and J. D. Achenbach, Acoustic radiation generated by local excitation of submerged beams and strings, *J. Sound Vib.*, 100 (1985), 107—121.
- [8] Kornecki, A., A note on beam-type vibrations of circular cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 14 (1971), 1—6.
- [9] Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State Univ. Press (1975), 154—155.

Reflection and Radiation of a Wave System at the Open End of a Submerged Elastic Pipe

Song Jia-su

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

The reflection and radiation of a wave system at the open end of a submerged semi-infinite elastic pipe are studied. This wave system consists of a flexural wave in the pipe, an acoustic surface wave in the fluid exterior to the pipe and an acoustic wave in the pipe's interior. Fourier transform techniques are used to formulate this semi-infinite geometry problem rigorously as a Wiener-Hopf type equation. An approximate solution is obtained by using a perturbation method in which the ratio of the mass-densities of the fluid and the pipe material is regarded as a small parameter. The calculation of the reflection coefficient is emphasized, and the polar plots of the radiation coefficient are also presented.