

# 两平行球面间扩散层流进口段 流动阻力的分析\*

王致清 刘震北

(哈尔滨工业大学, 1986年7月14日收到)

## 摘 要

本文首先将B. B. Голубев方法推广到两平行球面间的扩散层流流动, 由球坐标下边界层运动方程式, 导出了平行球面间进口段层流边界层动量与能量积分关系式. 再对动量积分关系式采用Picard逐次逼近法, 求得进口段通道长随边界层厚度而改变的近似表达式. 然后对进口段效应诸系数进行分析与计算.

## 符 号

$r, \theta, \varphi$ ——球坐标	$v_0$ ——边界层外侧势流速度
$R$ ——球半径	$v_m$ ——缝隙任意断面处平均速度, $v_m = Q/[\pi h(2R+h)\sin\theta]$
$y$ ——法向坐标	$V$ ——边界层外侧无因次势流速度, $V = v_0/v_m$
$2\theta_0$ ——中心圆管或油室对应的中心角	$v_{m1}$ ——球面缝隙进口( $\theta = \theta_1$ )处平均速度, $v_{m1} = Q/[\pi h(2R+h)\sin\theta_1] = v_m \sin(\xi\theta_1)/\sin\theta_1$
$2\theta_1(2\theta_2)$ ——球面缝隙进(出)口处对应的中心角	$Re$ ——进口处修正雷诺数, $Re = (\rho v_{m1} h / \mu)(h/R\theta_1)$
$2\theta_e$ ——准Poiseuille流起始位置处对应的中心角	$p_0, p_1, p_2, p_e$ 和 $p$ —— $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_e$ 和 $\theta$ 处的压力
$\xi$ ——无因次子午线长, $\xi = r\theta/r\theta_1 = \theta/\theta_1$	$Q$ ——流量
$\xi_e$ ——无因次进口长度, $\xi_e = r\theta_e/r\theta_1 = \theta_e/\theta_1$	$\mu$ ——流体粘度
$h$ ——缝隙的宽度	$\rho$ ——流体密度
$\delta$ ——边界层厚度	
$\Delta$ ——无因次边界层厚度, $\Delta = 2\delta/h$	
$u, v, w$ ——边界层内 $r, \theta, \varphi$ 向分速度	

## 一、引 言

川崎義人在文献[1]中首先对两固定平行球面间的流动, 仅考虑粘性项而忽略惯性项影响, 求得了线性解析解, 它一直在工程中广泛应用. 作者在文献[2]中考虑流动惯性时进行了较仔细的研究, 利用简化了的Navier-Stokes方程式, 采用迭代近似解法, 求得了压力分布、速度分布以及流量的解析式.

\* 吴望一推荐.  
中国科学院科学基金资助的课题.

当进口段长度与球半径的比值比较大时,即所谓子午面上的“短通道”,其进口段效应必须加以考虑。这种流动情况在液压工程中是会遇到的。对于两平行球面间流动的进口段效应,其理论分析与实验研究,这方面的文献尚未见到。本文试图把两平行圆板间径向层流进口段效应的分析方法<sup>[3]</sup>推广到球面间来,从而求出其进口段长度、速度分布和进口段效应诸系数的解析表达式。

## 二、边界层积分关系式的推导

假设球面缝隙中的流体不可压缩,流动是定常和常物性的;进口处光滑,且中心圆管的半径或若有油室的话则其半径及深度比缝隙宽度大得多( $h/R\sin\theta_0 \ll 1$ ),故进口处的速度可认为近似均匀( $v_{m1}=\text{常数}$ ),见图1;进口段形成以缝隙中心面为对称面的层流边界层,这里所说的对称,指的是边界层厚度 $\delta$ 在同一径向位置上,无论是在球的凸面处还是在球垫的

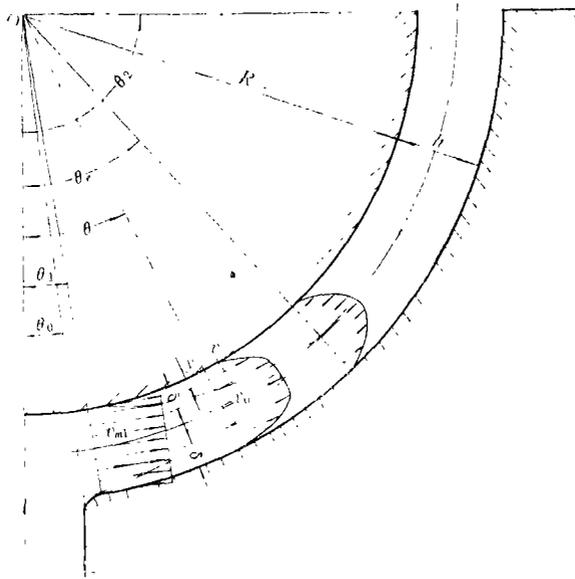


图 1

凹面处对应相等,所以边界层在靠近球的一侧形成凸边界,而靠近球垫一侧形成凹边界;边界层外侧为势流;在进口段趋于终止处形成准 Poiseuille 流。

如图1所示,采用坐标系 $r, \theta, \varphi$ 。由于子午面上的流动对称于极轴,因此 $w=0, \partial p/\partial \varphi=0$ 。则平行球面间进口段内的层流边界层运动方程和连续性方程有下列形式

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0 \quad (2.2)$$

根据假设,为了便于统一球面缝隙两侧边界层问题的分析,设 $r=R+y$ ,将径向坐标 $r$ 变换为法向坐标 $y$ ,则上二式成为

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (v\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

边界层的基本边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 时, } u=v=0 \\ y=\delta \text{ 时, } u=u_0, v=v_0, \partial v/\partial y=0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

将B. B. Голубев方法推广, 用 $v^m dy$ 乘式(2.3)的两端, 再从0到 $\delta$ 积分, 注意到 $\delta$ 是 $\theta$ 的函数. 另外, 用 $dy$ 乘式(2.4), 并从0到 $\delta$ 积分. 采用与文献[3]相类似的推导方法, 可得到如下的关系式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(m+1)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v^{m+2} dy - \frac{v_0^{m+1}}{R(m+1)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v dy \\ & = \frac{v_0}{R} \frac{dv_0}{d\theta} \int_0^\delta v^m dy - \nu \left[ \left( v^m \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} + m \int_0^\delta v^{m-1} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

在积分关系式(2.6)中, 若分别令 $m=0$ 和 $m=1$ , 就导出了平行球面间进口段层流边界层动量与能量积分方程式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v^2 dy - \frac{v_0}{R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v dy \\ & = \frac{v_0}{R} \frac{dv_0}{d\theta} \delta - \nu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

这就是动量积分方程式;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v^3 dy - \frac{v_0^2}{2R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\delta \sin\theta v dy \\ & = \frac{v_0}{R} \frac{dv_0}{d\theta} \int_0^\delta v dy - \nu \int_0^\delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \end{aligned} \quad (2.8)$$

这就是能量积分方程式.

如果引入

$$\text{排挤厚度} \quad \delta_1 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) dy$$

$$\text{动量厚度} \quad \delta_2 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) \frac{v}{v_0} dy$$

$$\text{能量厚度} \quad \delta_3 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) \frac{v}{v_0} dy$$

$$\text{壁面摩擦应力} \quad \tau_w = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0}$$

则动量积分方程式变为

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} (v_0^2 \delta_2) + \frac{\text{ctg}\theta}{R} v_0^2 \delta_2 + \frac{v_0}{R} \frac{dv_0}{d\theta} \delta_1 = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (2.9)$$

而能量积分方程式变为

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} (v_0^3 \delta_3) + \frac{\text{ctg}\theta}{R} v_0^3 \delta_3 = 2D_w \quad (2.10)$$

式中

$$D_w = \nu \int_0^\delta \left( -\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy$$

至此, 能同时得到两种积分方程式统一表达式的B. B. Голубев方法, 已被作者在文献[6, 3]和本文中, 由平板间的流动分别推广至圆管的流动、圆板间的流动和球面间的流动, 这说明该方法在不可压缩流体的流动中, 是一个切实可行的简便方法。

本文将依据动量积分方程式, 对平行球面间层流进口段长度等进行计算。

### 三、边界层内速度分布的假设

设边界层内速度分布是相似的, 其一般函数形式为

$$\frac{v}{v_0} = f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (3.1)$$

下面来讨论函数 $f(\eta)$ 应满足的条件。

根据流动连续性, 有

$$2\pi(2R+h)\sin\theta \cdot \frac{h}{2} v_m = 2\pi(2R+h)\sin\theta \left[ v_0 \left( \frac{h}{2} - \delta \right) + \int_0^\delta v dy \right]$$

把式(3.1)代入上式, 整理后得无因次势流速度

$$V = \frac{v_0}{v_m} = \frac{1}{1-A} \quad (3.2)$$

式中

$$A = \int_0^1 [1-f(\eta)] d\eta \quad (3.3)$$

从进口处开始, 壁面上边界层厚度逐渐增长至缝隙中心面时, 即 $A$ 从0趋近于1时, 再发展便形成了准Poiseuille流。此时有 $A=1$ , 且可证明 $V=1.5$ , 由式(3.2)和(3.3)得

$$A = \frac{1}{3} \quad \left. \vphantom{A} \right\} \quad (3.4)$$

或

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \frac{2}{3} \quad \left. \vphantom{\int} \right\}$$

此即函数 $f(\eta)$ 所应满足的附加条件; 当然, 函数 $f(\eta)$ 还应满足边界层的基本边界条件式(2.5)。换句话说, 因为所选择的边界层内速度分布函数总是要自动地满足条件式(2.5)和(3.4), 所以式(3.2)可以改写为

$$V = \frac{v_0}{v_m} = \frac{v_0 \sin(\xi\theta_1)}{v_{m1} \sin\theta_1} = \frac{3}{3-A} \quad (3.5)$$

另外, 为计算上方便, 引入无因次排挤厚度 $A_1$ 和无因次动量厚度 $A_2$ , 它们与 $A$ 间的关系经简单推导, 得

$$A_1 = \frac{2\delta_1}{h} = \frac{2}{h} \int_0^\delta \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) dy = A A = \frac{A}{3} \quad (3.6)$$

$$A_2 = \frac{2\delta_2}{h} = \frac{2}{h} \int_0^\delta \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) \frac{v}{v_0} dy = (B-A) A = \left( B - \frac{1}{3} \right) A \quad (3.7)$$

式中

$$B = \int_0^1 [1 - f^2(\eta)] d\eta \tag{3.8}$$

### 四、层流进口段长度与速度分布

现在来导出平行球面间层流进口段长度及速度分布沿流程改变的关系，或者说随 $\Delta$ 而变化的表达式。

#### 1. 层流进口段长度

首先将动量积分方程式(2.9)换写为下列形式

$$\frac{1}{R} \frac{d\delta_2}{d\theta} + \frac{1}{R} (2\delta_2 + \delta_1) \frac{1}{v_0} \frac{dv_0}{d\theta} + \frac{\text{ctg}\theta}{R} \delta_2 = \frac{\tau_w}{\rho v_0^2}$$

进行 $\theta = \xi\theta_1$ 的代换，并以 $2R\theta_1/h$ 遍乘上式，同时在其右端考虑 Newton 摩擦定律，无因次化后化简整理，有

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_2}{d\xi} + \frac{1}{V} \left[ \frac{dV}{d\xi} - \frac{V\theta_1}{\text{ctg}(\xi\theta_1)} \right] (2\Delta_2 + \Delta_1) + \theta_1 \Delta_2 \text{ctg}(\xi\theta_1) \\ = \frac{4f'(0)}{Re} \frac{1}{\Delta} \frac{1}{V} \frac{\sin(\xi\theta_1)}{\sin\theta_1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

式中

$$f'(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \tag{4.2}$$

将式(3.5)、(3.6)和(3.7)以及式(3.5)、(3.7)对 $\xi$ 微分后一并代入式(4.1)，经整理即得无因次通道长与无因次边界层厚度间的一阶非线性常微分方程式

$$\frac{d\xi}{d\Delta} = \frac{3Re\Delta\sin\theta_1\sin(\xi\theta_1)(3B-1+B\Delta)}{(3-\Delta)\{4f'(0)(3-\Delta)\sin^2(\xi\theta_1) + Re\Delta^2\theta_1\sin\theta_1 \cdot 3B\cos(\xi\theta_1)\}} \tag{4.3}$$

其初始条件为

$$\xi(0) = 1 \tag{4.4}$$

尽管对该方程求其数值解已非难事，这里仍将用Picard法导出其 $\xi$ 与 $\Delta$ 间的显函数表达式。把初始条件 $\xi(0)=1$ 作为一级近似解代入式(4.3)，求其二级近似解

$$\xi = 1 + \int_0^\Delta \frac{3Re\sin\theta_1\Delta(3B-1+B\Delta)}{(3-\Delta)\{4f'(0)(3-\Delta)\sin\theta_1 + Re\Delta^2\theta_1 \cdot 3B\cos\theta_1\}} d\Delta$$

将上式右端第二项中的被积函数分解为部分分式，而后积分，即可求得

$$\xi = 1 - \frac{6B-1}{E} \ln\left(1 - \frac{\Delta}{3}\right) + \frac{3B-1}{2E} \ln\left(1 - \frac{\Delta}{3} + \frac{ReE}{12f'(0)} \Delta^2\right) + D \tag{4.5}$$

式中

$$D = \frac{1-9B}{2E} \sqrt{\frac{f'(0)}{f'(0)-3ReE} \ln\left(\frac{f'(0) + \sqrt{\frac{ReE\Delta}{f'(0)[f'(0)-3ReE]}} - 2}{f'(0) - \sqrt{\frac{ReE\Delta}{f'(0)[f'(0)-3ReE]}} - 2}\right)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( Re < \frac{f'(0)}{3E} \right) \\
 D &= \frac{Re(1-9B)\Delta}{2f'(0) - ReE\Delta} \quad \left( Re = \frac{f'(0)}{3E} \right) \\
 D &= \frac{1-9B}{E} \sqrt{\frac{f'(0)}{3ReE - f'(0)}} \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{ReE\Delta - 2f'(0)}{2\sqrt{f'(0)[3ReE - f'(0)]}} \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{f'(0)}{3ReE - f'(0)}} \right\} \quad \left( Re > \frac{f'(0)}{3E} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$E = 3B\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_1 \quad (4.7)$$

这就是无因次通道长随无因次边界层厚度变化的近似表达式。

当  $\Delta=1$  时，即可由上三式求得无因次进口段长度  $\xi_0$ 。

今在进口段层流边界层内取以下三种均满足式 (2.5) 和 (3.4) 的速度分布假设：抛物线 I、立方抛物线 II 和正弦曲线 III，且由式 (3.8) 和 (4.2) 算得各常数。当  $\theta_1=30^\circ$  时，分别用 Runge-Kutta 法和 Picard 法求得对应于不同进口雷诺数  $Re$  的无因次进口段长度  $\xi_0$  的数值解和近似解，如表 1 所列。可见，速度分布假设 I，II 和 III 的  $\xi_0$  值非常接近；近似解与数值解比较，在小雷诺数时其  $\xi_0$  值很接近，大雷诺数时其  $\xi_0$  值偏小。

### 2. 速度分布

表 1

( $\theta_1=30^\circ$ )

序号	I		II		III	
	$2\xi - \xi^2$		$\frac{5}{3}\xi - \frac{2}{3}\xi^3$		$\frac{\pi}{3(4-\pi)} \sin\left(\xi \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4(\pi-3)}{3(4-\pi)} \sin^2\left(\xi \cdot \frac{\pi}{2}\right)$	
$B$	7	15	86	189	$\frac{15\pi^2 - 152\pi + 348}{54(4-\pi)^2}$	
$f'(0)$	2		5	3	$\frac{\pi^2}{6(4-\pi)}$	
$Re$	$\xi_0$					
	RK	Picard	RK	Picard	RK	Picard
1	1.024	1.0248	1.0276	1.02789	1.0255	1.0258
5	1.104	1.1074	1.1115	1.1179	1.10798	1.1106
10	1.1804	1.1851	1.1968	1.1998	1.1864	1.18998
20	1.2971	1.2954	1.3177	1.3122	1.3042	1.3013
30	1.3868	1.3725	1.4103	1.3893	1.3953	1.3791
40	1.4618	1.4315	1.4873	1.4475	1.4714	1.4384
50	1.5275	1.4798	1.5542	1.4939	1.5378	1.4860
70	1.6399	1.5528	1.688	1.5652	1.6519	1.5596
100	1.7807	1.6321	1.8112	1.6412	1.7946	1.6386
150	1.9761	1.7222	2.0087	1.7269	1.9931	1.7283
200	2.1477	1.7854	2.1825	1.7869	2.1680	1.7914
250	2.3106	1.8388	3.3483	1.8324	2.3350	1.8391

进口段中心的势流速度  $v_0$  由式 (3.5) 求出

$$v_0 = v_m \frac{3}{3-\Delta} = v_{m1} \frac{3\sin\theta_1}{(3-\Delta)\sin(\xi\theta_1)} \quad (4.8)$$

今选择在边界层理论中广为使用的抛物线速度分布假设 I, 即

$$f(\eta) = 2\eta - \eta^2 \tag{4.9}$$

进行以下的所有讨论。

所以, 边界内的速度分布则由式(3.1)、(4.8)和(4.9)及  $\Delta = 2\delta/h$  的假设求出

$$\frac{v}{v_{m1}} = \frac{12\sin\theta_1}{(3-\Delta)\sin(\xi\theta_1)} \left(1 - \frac{y}{\Delta h}\right) \frac{y}{\Delta h} \tag{4.10}$$

图 2 所示为  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $Re = 10, 50$  和  $100$  时的速度分布, 其中  $\xi$  的计算均采用式(4.3)和(4.4)的近似解, 以后的所有计算皆然, 不复赘述。因为边界层厚度随流程增加, 则  $v_0$  增大, 又由于断面逐渐扩大的效应而减小。再者,  $Re$  小时粘性大, 边界层形成得快, 则  $v_0$  增

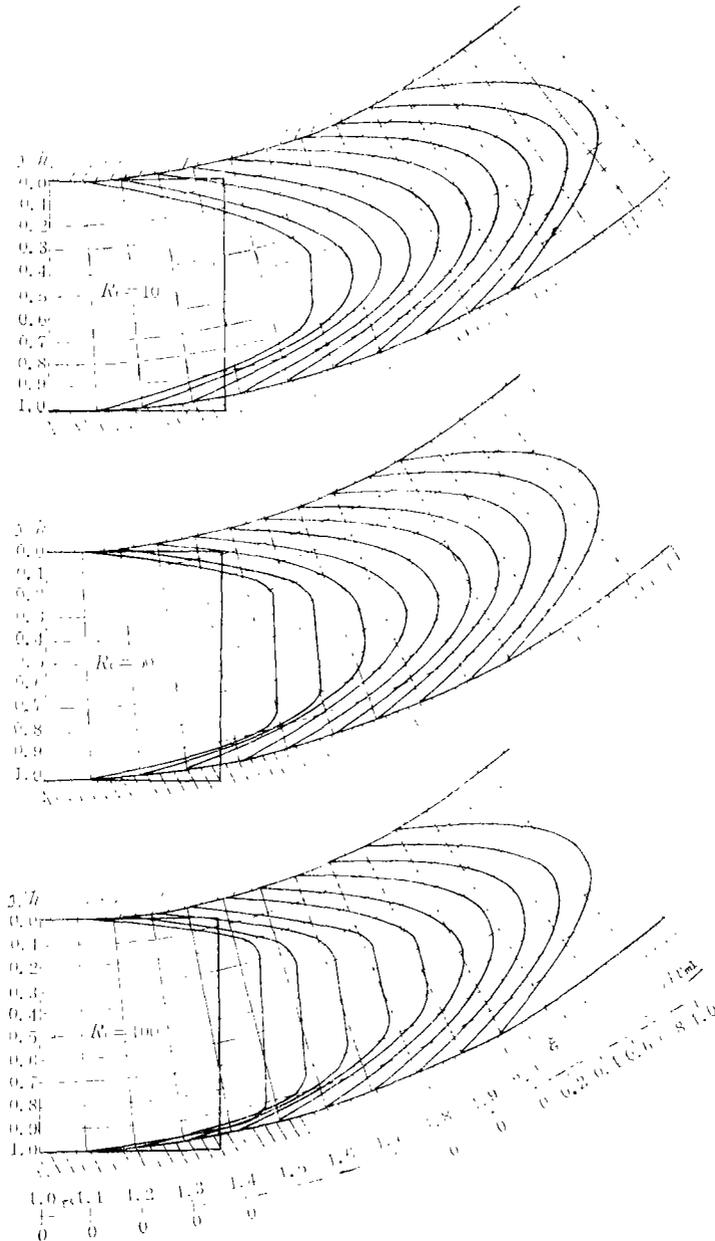


图 2 ( $\theta_1 = 30^\circ$ )

大显著, 而  $Re$  大时惯性大, 则  $v_0$  减小突出.  $Re=10$  时, 在  $\xi_e \approx 1.2$  处形成抛物线形状分布, 其后由于速度分布是相似的假设, 则  $v/v_{m1}$  随  $\sin\theta_1/\sin(\xi\theta_1)$  成比例地减少.  $Re=50$  前后, 中心势流速度增减的效果约相平衡, 故其  $v_0$  在进口段内几乎不变, 在  $\xi_e \approx 1.45$  处结束.  $Re=100$  时, 速度分布曲线的形状一面减速一面接近抛物线, 在  $\xi_e \approx 1.62$  处完了. 不论哪种情况, 一旦形成了准 Poiseuille 流, 则仅由于过流断面逐渐扩大的结果, 减速就成为唯一的趋势, 这是所有轴对称过流流动的重要特征. 至于速度分布曲线的中心都偏向凹面一侧, 这是与本文关于边界层模型所做的假设一致的.

## 五、进口段效应系数

沿流程全压头损失系数定义为

$$\lambda = \frac{p_0 - p}{\rho v_{m1}^2 / 2} \frac{1}{\xi} \quad (5.1)$$

式中,  $p_0$  为进口处流体总压力,  $p_0 = p_1 + \rho v_{m1}^2 / 2$ .

当  $\xi \leq \xi_e$  时, 即在进口段流动区域内, 在边界层外侧势流部分, 由 Bernoulli 方程式得

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (5.2)$$

并注意到式(3.5), 则有

$$\lambda = \frac{9 \sin^2 \theta_1}{\xi (3 - \Delta)^2 \sin^2(\xi \theta_1)} \quad (5.3)$$

因而压力损失系数, 当  $\xi \leq \xi_e$  时, 有

$$\lambda_p = \frac{p_0 - p}{\rho v_{m1}^2 / 2} = \lambda \xi = \frac{9 \sin^2 \theta_1}{(3 - \Delta)^2 \sin^2(\xi \theta_1)} \quad (5.4)$$

当  $\xi = \xi_e$  时,  $\Delta = 1$ , 则有

$$\lambda_{pe} = \frac{p_0 - p_e}{\rho v_{m1}^2 / 2} = \frac{9 \sin^2 \theta_1}{4 \sin^2(\xi_e \theta_1)} \quad (5.5)$$

当  $\xi \geq \xi_e$  时, 由动量积分方程式(2.7)和 Bernoulli 方程式, 则得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial \theta} = & \frac{\rho R}{\int_0^{h/2} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) dy} \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \int_0^{h/2} (v - v_0) v dy \right. \\ & \left. + \frac{\text{ctg} \theta}{R} \int_0^{h/2} (v - v_0) v dy + v \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

由线性化了的 Navier-Stokes 方程式和连续性方程式不难导出

$$v = \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} (y^2 - hy), \quad v_0 = -\frac{1}{8\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} h^2 \quad (5.7)$$

注意到流量公式

$$Q = \int_0^h v \cdot 2\pi R \sin \theta dy = -\frac{\pi h^3 \sin \theta}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

则有

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin \theta}$$

把它代回式(5.7), 得

$$v = \frac{3Q}{\pi R h^3 \sin \theta} (hy - y^2), \quad v_0 = \frac{3Q}{4\pi R h \sin \theta} \quad (5.8)$$

因为  $Q = \pi h(2R + h) \sin \theta_1 \cdot v_{m1} = 2\pi R h \sin \theta_1 v_{m1}$  和  $\theta = \theta_1 \xi$ , 再把式(5.8)代回式(5.6), 同时在式(5.6)的最后一项考虑Newton摩擦定律, 则得

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \rho v_{m1}^2 \left[ \frac{24 \sin \theta_1}{Re \sin(\xi \theta_1)} - \frac{12 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos(\xi \theta_1)}{5 \sin^3(\xi \theta_1)} \right] \quad (5.9)$$

而压力损失

$$\Delta p = p_0 - p = (p_0 - p_e) + (p_e - p)$$

故压力损失系数

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \lambda_{pe} + \frac{\int_{\xi_e}^{\xi} (-\partial p / \partial \xi) d\xi}{\rho v_{m1}^2 / 2} \\ &= \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\xi \theta_1 / 2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 / 2)} \right) + \frac{6}{5} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi \theta_1)} \right]^2 + \gamma_e \end{aligned} \quad (5.10)$$

式中

$$\gamma_e = \frac{21}{20} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi_e \theta_1)} \right]^2 - \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\xi_e \theta_1 / 2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 / 2)} \right) \quad (5.11)$$

式(5.10)右端第一项是由粘性摩擦引起的压力损失, 第二项是考虑扩散流动而导致的压力变化, 第三项  $\gamma_e$  是反映整个进口段附加压力损失的, 称为进口段效应压力损失修正系数. 对于某一确定的  $\xi$  值, 压力损失系数  $\lambda_p$  不再是常数, 而是与进口修正雷诺数  $Re$  和进口角  $\theta_1$  相关的, 这既不同于平行平面间的过流流动, 又不同于平行圆板间的过流流动.

当  $\xi \leq \xi_e$  时, 在进口段流动区域内, 压力损失系数可以表示为

$$\lambda_p = \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\xi \theta_1 / 2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 / 2)} \right) + \frac{6}{5} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi \theta_1)} \right]^2 + \gamma \quad (5.12)$$

上式与式(5.4)比较, 得进口段效应压力损失修正系数

$$\gamma = \left[ \frac{9}{(3 - \mathcal{A})^2} - \frac{6}{5} \right] \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi \theta_1)} \right]^2 - \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\xi \theta_1 / 2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 / 2)} \right) \quad (5.13)$$

此式是在进口段流动区域内该系  $\gamma$  数沿流程而改变的关系式. 当  $\xi \geq \xi_e$  时, 有  $\mathcal{A} = 1 (\xi = \xi_e)$ , 则上式变为式(5.11), 即  $\gamma = \gamma_e$ .

下面求出进口段效应流量修正系数, 由式(5.12)和(5.10)均可将压力降表示为

$$\Delta p = p_0 - p = C_e \frac{12 \mu R \sin \theta_1 v_{m1}}{h^2} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\xi \theta_1 / 2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 / 2)} \right) \quad (5.14)$$

但是其中  $C_e$  的含义却因区间不同而异. 当  $\xi \leq \xi_e$  时, 有

$$C_e = \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\xi \theta_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) = 1 + \frac{6}{5} \frac{\xi}{\sin^2(\xi \theta_1)} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\xi \theta_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \quad (5.15)$$

式中

$$\xi = \frac{6}{5} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi \theta_1)} \right]^2 + \gamma \quad (5.16)$$

而 $\lambda$ ,按式(5.4)确定. 而当 $\xi \geq \xi_*$ 时, 有

$$C_e = \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \frac{\lambda_p}{\operatorname{tg} \frac{\xi \theta_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right) = 1 + \frac{24 \sin \theta_1}{Re \theta_1} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\xi \theta_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \quad (5.17)$$

式中

$$\xi_* = \frac{6}{5} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\sin(\xi \theta_1)} \right]^2 + \gamma_e \quad (5.18)$$

而 $\lambda$ ,按式(5.10)确定.

由式(5.14)求得进口平均流速后, 就可导出考虑进口段效应的流量计算公式

$$\begin{aligned} Q &= \pi h(2R+h) \sin \theta_1 v_{m1} = 2\pi R h \sin \theta_1 v_{m1} \\ &= \pi h^3 \Delta p / [6\mu C_e \ln(\operatorname{tg}(\xi \theta_1/2) / \operatorname{tg}(\theta_1/2))] \end{aligned} \quad (5.19)$$

$C_e$ 即为进口段效应流量修正系数.

图3所示的三组曲线, 自上而下分别为 $\theta_1=30^\circ$ 时进口段内的 $\lambda_p \sim \Delta$ ,  $\xi \sim \Delta$ 和 $C_e \sim \Delta$ 的关系曲线, 其横坐标均为 $\Delta$ , 且均以 $Re$ 为参变数. 例如, 欲求 $\xi=1.238$ ,  $Re=30$ 时的 $\lambda$ 和 $C_e$ 值,

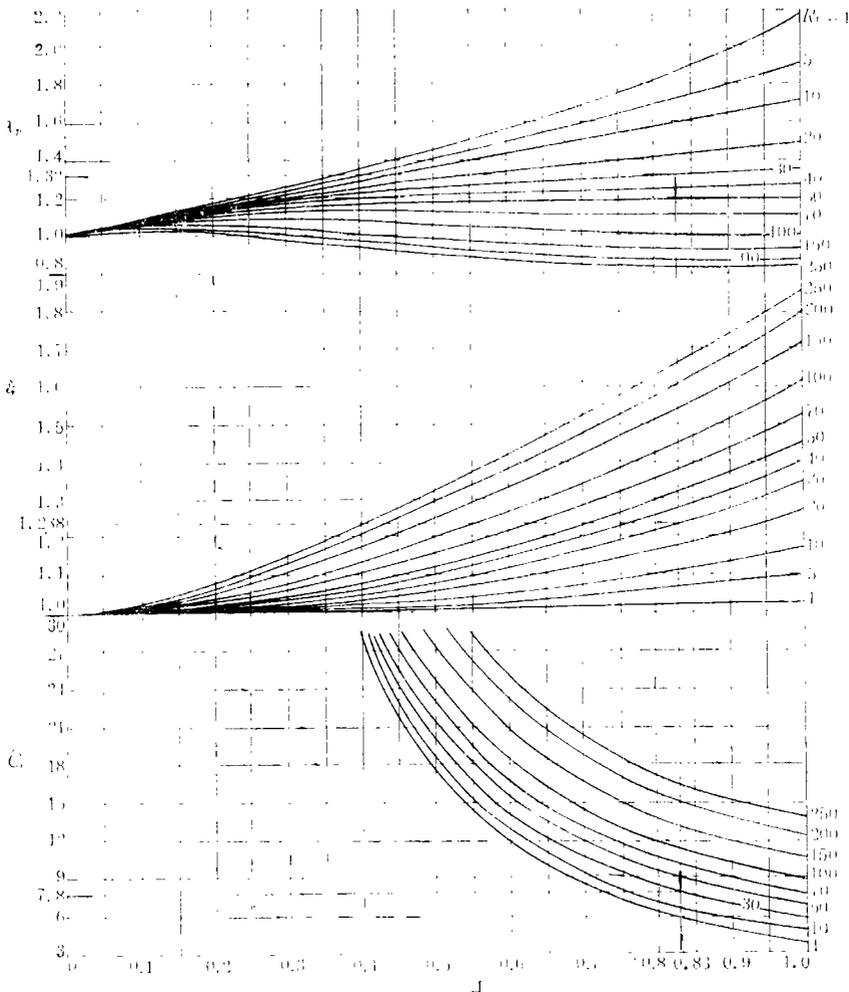


图 3 ( $\theta_1=30^\circ$ )

沿箭头方向很方便地可以找到 $\lambda_p=1.32$ ，而 $C_e=7.8$ ，同时可以找到 $\Delta=0.83$ 。

## 六、讨 论

1. 两平行圆板间层流进口段长度、速度分布及进口段效应诸系数，是两平行球面间层流进口段效应各相应解的极限情况。只要当球半径 $R \rightarrow \infty$ 时，球就变成了圆板，如图4所示。

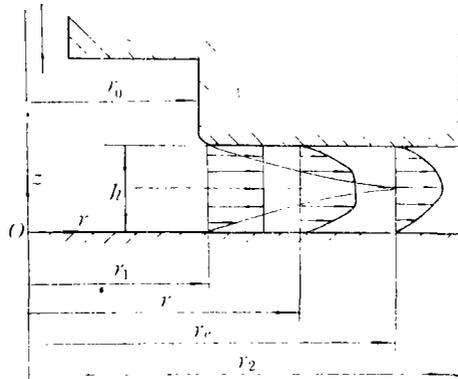


图 4

此时有 $\theta_1 \rightarrow 0$ ，而且有

$$\xi = \theta / \theta_1 \rightarrow \xi = r / r_1,$$

$$\xi_e = \theta_e / \theta_1 \rightarrow \xi_e = r_e / r_1,$$

$$\cos \theta_1 \rightarrow 1,$$

$$\cos(\xi \theta_1) \rightarrow 1,$$

$$\sin \theta_1 \rightarrow \theta_1,$$

$$\sin(\xi \theta_1) \rightarrow \xi \theta_1$$

$$\text{tg} \theta_1 \rightarrow \theta_1$$

$$\text{tg}(\theta_1/2) \rightarrow \theta_1/2$$

$$\text{tg}(\xi \theta_1/2) \rightarrow \xi \theta_1/2$$

$$\text{tg}(\xi_e \theta_1/2) \rightarrow \xi_e \theta_1/2$$

这样，只要将前述各有关表达式进行以上的变换，即可由球转化为圆板相应的表达式，与文献[7]中的所有结果完全吻合。

2. 本文提供的分析虽未能直接与实验数据比较，但它间接地通过文献[4,5,7]的圆板情形而得到了检验。

3. 本文开始时推得的能量积分方程式，经推导亦可转换为一阶非线性常微分方程式，按Picard法同样可以求得 $\xi \sim \Delta$ 之间的显函数表达式，作者另文专述。

## 参 考 文 献

- [1] 川崎义人, 空气轴受に就こ, 精密机械, **XII** 5,6,7, No 152,153, 154 (昭和22年, 5,6,7), 39—44.
- [2] 王致清、刘震北, 球面间流体流动考虑流动惯性的近似解, 应用数学和力学, **5**, 2 (1984), 263—276.
- [3] 刘震北、王致清, 两平行圆板间径向层流进口段效应分析, 应用数学和力学, **5**, 1 (1984), 77—89.
- [4] 荻原辰弥, 半径流ノズルに関する研究, 日本机械学会論文集 (第2部), **28**, 196 (昭37-2), 138—156.
- [5] 中山泰熹, 空气マイクロメータ内の流体の作動, 日本机械学会論文集 (第2部), **30**, 210 (昭39-2), 202—210.
- [6] 王致清, 圆管层流进口段效应修正系数的近似计算, 哈尔滨工业大学学报, **3** (1980), 26—40.
- [7] 王致清、刘震北, 两平行圆板间径向扩散层流进口段流动阻力的分析与计算, 哈尔滨工业大学学报, **3** (1985), 83—91.
- [8] Ishizawa, Shingo, The axisymmetric laminar flow in an arbitrarily shaped narrow gap, *Bulletin of JSME*, **9**, 3 (1966), 86—103.

## An Analysis on the Flow Resistance in the Entrance Region of Diffuse Laminar Flow between Two Parallel Spherical Surfaces

Wang Zhi-qing      Liu Zhen-bei

(Haerbin Institute of Technology, Haerbin)

### Abstract

In this paper, V. V. Golubev method is first extended to the diffuse laminar flow between two parallel spherical surfaces. With the boundary layer motion equation in spherical coordinates, we derive the momentum integral equation together with the energy integral equation for the laminar boundary layer of the entrance region between two parallel spherical surfaces. And then by applying Picard's gradually approaching method for the momentum integral equation, we get the approximate expression which the entrance region length varies with the thickness of boundary layer. In the end, every coefficient of entrance region effect is analyzed and calculated.