

一般杆系结构的非线性数值分析*

朱菊芬 周承芳 吕和祥

(大连工学院, 1986年10月15日收到)

摘 要

本文在total-Lagrange坐标系下, 对Kirchhoff梁给出了考虑几何非线性的两种梁单元刚度的显式表达式。一种是一般的非线性梁元, 它既考虑了应变增量和位移增量间的二次项, 又计及了刚体位移的影响, 另一种是简化的非线性梁元, 它只在线性梁的平衡方程中直接加入了轴力对弯曲的影响。非线性方程采用混合法求解, 文中通过一些算例的数值计算, 对两种单元作了比较详细的分析和评估。

一、前 言

随着强度高、重量轻、弹性好的合成材料的发展, 柔性杆件逐渐地被一些工程结构所采纳, 经典的小变形理论已不能满足结构分析的需要, 近些年来已有不少学者采用有限元法研究梁的几何非线性效应^[1~6]。由于它们所采用的是四到八结点平面等参元或二维曲梁单元, 因而只能计算平面杆系结构, 而且为了描述杆子的大变形, 一根杆子往往要划分为若干个单元, 其计算工作量是十分繁琐的。

本文给出了两种在Kirchhoff假定下的两结点直线梁单元, 它们的非线性表示简单、清晰便于坐标转换, 可以得出空间梁单元的显式表达式。数值计算表明, 只要将单元划分得足够小, 则同样可以准确地反映大变形的几何非线性效应。一般的非线性梁元较为完整地反应了几何非线性性质, 能够有效地分析特别柔软的杆件, 而简化的非线性梁元适用于以轴力为主的、变形的非线性程度不高的杆系结构。

二、一般的非线性梁单元

1. 单元几何

图1所示, 在Kirchhoff假定前提下的等截面梁单元 ij , 其节点位移和节点力列阵分别为

$$\left. \begin{aligned} \{q\} &= \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}\} \\ \{s\} &= \{N_{xi}, N_{yi}, N_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, N_{xj}, N_{yj}, N_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}\} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

* 卢文达推荐。

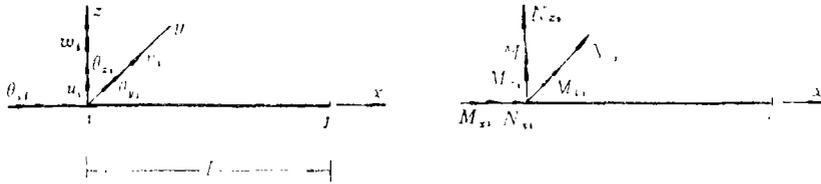


图 1

考虑杆子大变形时轴向变形和弯曲变形的相互偶合性, 设单元应变

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \chi_x \chi_y \chi_z\}^T = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_L\} \tag{2.2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中: 线性应变} \quad \{\varepsilon_0\} &= \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{matrix} \right\}^T \\ \text{非线性应变} \quad \{\varepsilon_L\} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

设位移场 $\{D\} = \{u \ v \ w \ \theta\}^T = [N]\{q\}$

取线性单元的单移插值型函数

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

其中: $N_1 = 1 - x/L, \quad N_2 = x/L, \quad N_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$

$$N_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad N_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, \quad N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

设 $\{\varepsilon\} = [\tilde{B}]\{q\} = ([\tilde{B}_0] + [\tilde{B}_L])\{q\}$ (2.5)

则:

$$[\tilde{B}_0] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3'' & 0 & 0 & 0 & N_4'' & 0 & N_5'' & 0 & 0 & 0 & N_6'' \\ 0 & 0 & N_3'' & 0 & -N_4'' & 0 & 0 & 0 & N_5'' & 0 & -N_6'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$[\tilde{B}_L] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [H_v]\{q\}[H_v] + [H_w]\{q\}[H_w] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

其中 $[H_v] = [0 \ N_3' \ 0 \ 0 \ 0 \ N_4' \ 0 \ -N_5' \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6']$

$$[H_w] = [0 \ 0 \ N_3' \ 0 \ -N_4' \ 0 \ 0 \ 0 \ -N_5' \ 0 \ -N_6' \ 0]$$

式中 N_i' 和 N_i'' 分别为 N_i 的一阶和二阶导数 ($i=1, \dots, 6$)。由 (2.6) 式可得增量几何方程

$$d\{\varepsilon\} = d([\tilde{B}]\{q\}) = ([B_0] + [B_L])d\{q\} \tag{2.8}$$

将 (2.6)、(2.7) 代入 (2.8) 得出

$$[B_0] = [\tilde{B}_0], \quad [B_L] = 2[\tilde{B}_L] \tag{2.9}$$

$$[B_L] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{A} & -\bar{D} & 0 & -\bar{E} & \bar{B} & 0 & 0 & \bar{A} & \bar{D} & 0 & \bar{F} & -\bar{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

其中: $\bar{A} = A_1^2(v_j - v_i) + A_1 B_1 \theta_{zi} - A_1 C_1 \theta_{zj}$, $\bar{B} = A_1 B_1(v_j - v_i) + B_1^2 \theta_{zi} - B_1 C_1 \theta_{zj}$
 $\bar{C} = A_1 C_1(v_j - v_i) + B_1 C_1 \theta_{zi} - C_1^2 \theta_{zj}$, $\bar{D} = A_1^2(w_j - w_i) - A_1 B_1 \theta_{yi} + A_1 C_1 \theta_{yj}$
 $\bar{E} = A_1 B_1(w_j - w_i) - B_1^2 \theta_{yi} + B_1 C_1 \theta_{yj}$, $\bar{F} = A_1 C_1(w_j - w_i) - B_1 C_1 \theta_{yi} + C_1^2 \theta_{yj}$
 式中 $A_1 = -N'_3$, $B_1 = N'_4$, $C_1 = N'_5$

2. 单元的切线刚度阵

在total-Lagrange坐标下, 假定外力的大小和方向不随变形而改变, 利用虚功原理可得出增量形式的单元平衡方程

$$d\{\varphi\} = \int_L d[B]^T \{\sigma\} dx = 0 \quad (2.11)$$

其中: 几何阵[B]如上节所述

$$\text{内力阵} \quad \{\sigma\} = \{N_x \quad M_x \quad M_y \quad M_z\}^T = [D] \{\epsilon\} \quad (2.12)$$

上式中弹性阵

$$[D] = \begin{bmatrix} EF & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_\rho \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

由(2.9)、(2.12)、(2.13)可得

$$d\{\varphi\} = \int_L d[B]^T \{\sigma\} dx + \int_L [B]^T d\{\sigma\} dx$$

$$\text{且令} \quad \int_L d[B]^T \{\sigma\} dx = [K_\sigma] d\{q\}, \quad \int_L [B]^T d\{\sigma\} dx = ([K_0] + [K_L]) d\{q\}$$

$$\text{则} \quad d\{\varphi\} = [K_t] d\{q\} = ([K_0] + [K_L] + [K_\sigma]) d\{q\} \quad (2.14)$$

[K_t]称为在当前位移上单元的切线刚度阵。其中,

$$[K_0] = \int_L [B_0]^T [D] [B_0] dx$$

即为通常的小变形线性刚度阵。

$$[K_L] = \int_L ([B_0]^T [D] [B] + [B_L]^T [D] [B_0] + [B_L]^T [D] [B_L]) dx$$

称为大位移阵。它与当前位移有关, 反映了由于大变形产生的单元本身刚度阵的改变。

[K_σ]称为初应力阵。它主要取决于当前的应力水平, 反映了轴力对弯曲的影响。

[K₀], [K_L], [K_σ]各部分的显式表达如下:

$$[K_0] = \begin{pmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\frac{EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_z}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_z}{L^2} & 0 \\ 12\frac{EJ_y}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EJ_y}{L^3} & 0 & -6\frac{EJ_y}{L^2} & 0 & 0 \\ GJ_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_\rho}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EJ_y}{L^2} & 0 & 2\frac{EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{EJ_z}{L} & 0 & -6\frac{EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ EF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\frac{EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\frac{EJ_y}{L^3} & 0 & 6\frac{EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GJ_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对 称

(2.15)

$$[K_L] = \int_0^L EF \begin{pmatrix} 0 & \bar{A}/L & \bar{D}/L & 0 & \bar{E}/L & -\bar{B}/L & 0 & -\bar{A}/L & -\bar{D}/L & 0 & -\bar{F}/L & \bar{C}/L \\ A^2 & \bar{A}\bar{D} & 0 & \bar{A}\bar{E} & -\bar{A}\bar{B} & -\bar{A}/L & -\bar{A}^2 & -\bar{A}\bar{D} & 0 & -\bar{A}\bar{F} & \bar{A}\bar{C} & 0 \\ \bar{D}^2 & 0 & \bar{E}\bar{D} & -\bar{B}\bar{D} & -\bar{D}/L & -\bar{A}\bar{D} & -\bar{D}^2 & 0 & -\bar{F}\bar{D} & \bar{D}\bar{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{E}^2 & -\bar{B}\bar{E} & -\bar{E}/L & 0 & -\bar{A}\bar{E} & -\bar{D}\bar{E} & -\bar{E}\bar{F} & \bar{E}\bar{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & \bar{B}^2 & \bar{B}/L & \bar{A}\bar{B} & \bar{B}\bar{D} & 0 & \bar{B}\bar{F} & -\bar{B}\bar{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \bar{A}/L & \bar{D}/L & 0 & \bar{F}/L & -\bar{C}/L & & & & & dx \\ & & \bar{A}^2 & \bar{A}\bar{D} & 0 & \bar{A}\bar{F} & -\bar{A}\bar{C} & & & & & \\ & & \bar{D}^2 & 0 & \bar{F}\bar{D} & -\bar{D}\bar{C} & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & \bar{F}^2 & -\bar{C}\bar{F} & & & & \\ & & & & & & & \bar{C}^2 & & & & \end{pmatrix}$$

对 称

(2.16)

$$[K_\sigma] = \frac{N_z}{30L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3L \\ & & 36 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 36 & 0 & 0 & 0 & -3L \\ & & & & & & & & 36 & 0 & 3L & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

对
称

(2.17)式是在假设轴力 N_z 沿整个单元不变的情况下得到的。这在线性程度不太高的条件下是可行的，否则就要求将单元细分，或对轴力采用数值积分。

3. 单元的不平衡力

满足单元的增量平衡方程(2.11)式，将采用逐次迭代的办法。假设经过几次迭代后单元的不平衡力：

$$d\{\varphi\}_{n+1} = \{R\}_n - \int_L [\tilde{B}]_n^T \{\sigma\}_n dx \quad (2.18)$$

上式第一项为当前外载下单元的结点力，第二项为当前变形下单元的实际反力，并以 $\{P\}_n$ 表示。

则

$$\{P\}_n = \{P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_{12}\}^T$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \int_L N'_1 N_z dx, & P_2 &= \int_L (N''_3 M_z - \bar{A} N_z) dx \\ P_3 &= \int_L (N''_3 M_y - \bar{E} N_z) dx, & P_4 &= \int_L N'_1 M_z dx \\ P_5 &= \int_L (-N''_4 M_y - \bar{E} N) dx, & P_6 &= \int_L (N''_4 M_z + \bar{B} N) dx \\ P_7 &= -P_1, & P_8 &= -P_2 \\ P_9 &= -P_3, & P_{10} &= -P_4 \\ P_{11} &= \int_L (-N''_6 M_y + \bar{F} N_z) dx, & P_{12} &= \int_L (N''_6 M_z - \bar{C} N_z) dx \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

它们的显式表达式略。

4. 解的方法和收敛准则

对于上面得到的单元切线刚度阵，引入各单元的坐标转换阵，组装成结构的总刚度阵 $[K_T]$ 。求解结构总的非线性增量平衡方程(2.19)采用载荷增量法和Newton-Raphson 迭代法相结合的混合法。

$$d\{\Phi\} = [K_T(\{\delta\})] d\{\delta\} = 0 \quad (2.20)$$

$\{\delta\}$ 为结构总的位移向量， $\{\Phi\}$ 为结构总的内外力矢量之和。求解非线性问题的迭代格式：

$$[K_T]_n (\Delta\{\delta\})_{n+1} = (\Delta\{\Phi\})_{n+1}, \quad \{\delta\}_{n+1} = \{\delta\}_n + (\Delta\{\delta\})_{n+1} \quad (2.21)$$

迭代过程中选用相对位移收敛准则，其表达式：

$$K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EJ_z}{L^3} \phi_{z5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \phi_{z2} \\ & & \frac{12EJ_y}{L^3} \phi_{y5} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \phi_{y2} & 0 \\ \text{对} & & & \frac{GJ_\rho}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EJ_y}{L} \phi_{y3} & 0 \\ & & & & & \frac{4EJ_z}{L} \phi_{z3} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

称

$$\phi_{y1} = \alpha_y \operatorname{ctg} \alpha_y, \quad \phi_{y2} = \frac{\alpha_y^2}{3(1-\phi_{y1})}, \quad \phi_{y3} = \frac{3\phi_{y2} + \phi_{y1}}{4}, \quad \phi_{y4} = \frac{3\phi_{y2} - \phi_{y1}}{4}, \quad \phi_{y5} = \phi_{y1} \phi_{y2},$$

$$\phi_{z1} = \alpha_z \operatorname{ctg} \alpha_z, \quad \phi_{z2} = \frac{\alpha_z^2}{3(1-\phi_{z1})}, \quad \phi_{z3} = \frac{3\phi_{z2} + \phi_{z1}}{4}, \quad \phi_{z4} = \frac{3\phi_{z2} - \phi_{z1}}{4}, \quad \phi_{z5} = \phi_{z1} \phi_{z2},$$

$$\alpha_y = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho_y}, \quad \alpha_z = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho_z}, \quad \rho_y = \frac{N_x L^2}{\pi^2 E J_y}, \quad \rho_z = -\frac{N_x L^2}{\pi^2 E J_z} \quad (3.6)$$

显而易见，当 $\phi_{yi}, \phi_{zi}=1 (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 时， $[K]$ 就退化为线性梁单元刚度阵。为求得非线性解，这里要对轴力迭代求解。

四、数值例题

1. 端部作用横向力 P 的悬臂梁。见图2。

$L=300\text{mm}$, $b \cdot h=10\text{mm} \times 10\text{mm}$, $E=207\text{kN/mm}^2$, 无量纲载荷参数 $K^2 L^2 = PL^2/EI$ 。

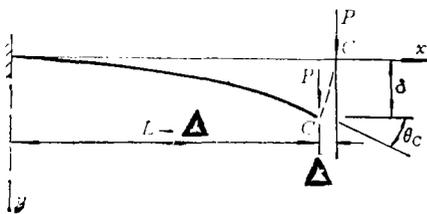


图 2

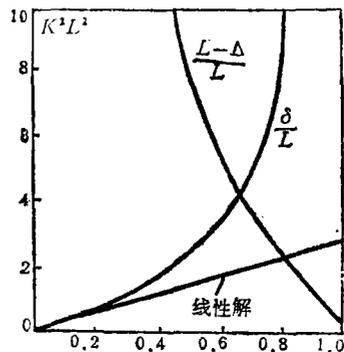


图 3

全梁等分为10个一般的非线性梁元，位移收敛精度取为0.005，若加载终值 $K^2 L^2=10$ ，将此载荷分别划分为200和20个增量步进行迭代，则计算位移的终值在四位有效数字内完全相同。表1给出了10个载荷水平上的位移值。并通过图3与[9]中精确解得到了满意的符合。

2. 端部作用弯矩 M 的悬臂梁。见图4。

$L=12\text{in}$, $b \cdot h=1\text{in} \times 1\text{in}$, $E=30 \times 10^6 \text{lb/in}$

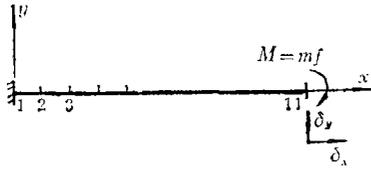


图 4

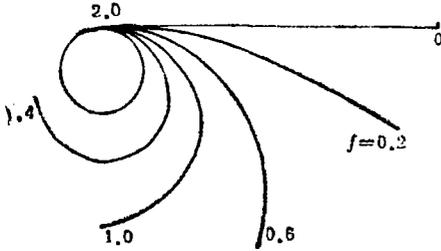


图 6

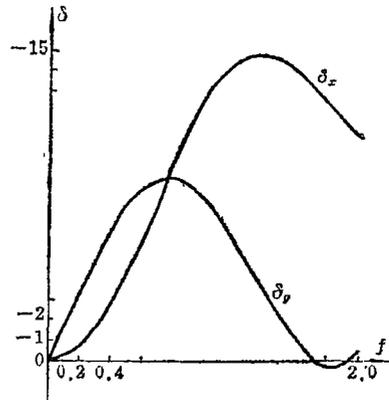


图 5

$$m = \frac{\pi EI_z}{L} = 654498.47 \text{ lb/in}, \quad M = mf \quad (f \text{ 为载荷因子})$$

表1

$K^2 L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ/L	0.288	0.436	0.602	0.668	0.713	0.751	0.774	0.787	0.793	0.806
$\frac{\Delta - \delta}{L}$	0.952	0.848	0.753	0.664	0.605	0.562	0.527	0.490	0.468	0.426

全梁等分为10个一般的非线性单元，端弯矩 M 按 $f=0.1$ 为步长加载至 $f=2$ 。总共有20个加载步。收敛精度 ϵ 取0.005。图5表示自由端位移 δ_x 和 δ_y 与 f 的关系，各个 f 值下梁的变形形状如图6所示。这一结果表明与理论解[3][4]和数值解[5]得到了完全一致的符合。

3. 端部作用轴力 P ，水平力 Q 及弯矩 M 的悬臂梁柱。见图7。

$$L=300\text{mm}, \quad b \cdot h=10\text{mm} \times 10\text{mm}, \quad E=207\text{kN/mm}^2$$

$$P=3.8\text{kN}, \quad Q=0.2\text{kN}, \quad M=0.5\text{kN}\cdot\text{mm}$$

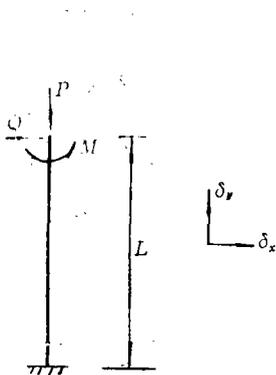


图 7

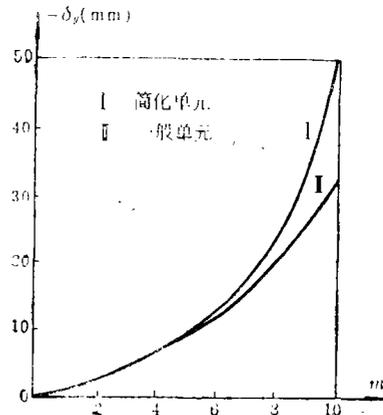


图 8

此时梁柱以承受轴力为主，用本文提供的两种单元计算，并且都等分为10个单元，采用10个载荷增量步进行计算。关于自由端的位移值分别列于表2和表3，端部位移 δ_y 与载荷增量步

表 2

I. 简化的非线性梁元

增量步 m	$-\delta_y(\text{mm})$	$-\delta_x(\text{mm})$	θ	迭代次数
1	1.143566	0.005707	0.005760	3
2	2.504197	0.011014	0.012649	3
3	4.151667	0.016522	0.021035	3
4	6.172678	0.022029	0.031377	3
5	8.745314	0.027536	0.044598	3
6	12.113809	0.033043	0.061976	3
7	16.667721	0.038551	0.085570	3
8	23.294458	0.044058	0.119999	3
9	33.555004	0.049565	0.173478	3
10	52.326393	0.055072	0.271481	3

表 3

II. 一般的非线性梁元

增量步 m	$-\delta_y(\text{mm})$	$-\delta_x(\text{mm})$		迭代次数
1	1.143514	0.008132	0.005760	2
2	2.501890	0.023590	0.012636	3
3	4.137632	0.060986	0.020958	4
4	6.138848	0.098028	0.031181	4
5	8.625137	0.177809	0.043919	4
6	11.751450	0.312585	0.058954	4
7	15.691983	0.537107	0.080141	4
8	20.574994	0.901362	0.105043	4
9	26.370013	1.456791	0.134344	4
10	32.832702	2.232884	0.166620	4

表 4

$\lambda = P/P_{\text{实际}}$	$v_{\pi}(\text{m})$	$v_{\pi}(\text{m})$
0.2	0.020763	0.021346
0.4	0.041713	0.042901
0.6	0.062855	0.064664
0.8	0.084190	0.086635
1.0	0.105747	0.108817
1.2	0.127493	0.131213
1.4	0.149483	0.153824
1.6	0.171840	0.176648
1.8	0.194034	0.199692
2.0	0.216675	0.222956
2.2	0.239416	0.246440
2.4	0.262593	0.220147

m 的关系见图 8。比较两种单元的计算结果可知：在位移不太大时，两种解差别不大；而当变形逐步增大时，两种解的差别就越来越大。关于简化的非线性梁元的准确性，由表 2 中加载终结时的位移值与[9]中仅考虑二次应力的解析解完全吻合而得证。

4. 对渤海某实际海上钻井平台刚架结构(见图9)用本文的两种非线性梁单元进行计算。平台同时承受设备和自重的竖直载荷和冰压力的水平载荷，在采用两种单元时每根杆都取作

一个单元。表4给出了最大位移节点 (i 点) 的水平位移值。结果表明: 在超过实际载荷1.4倍的情况下, 杆件已产生较明显的非线性变形, 然而非线性程度并不高。此时两种单元的计算结果相差很小。

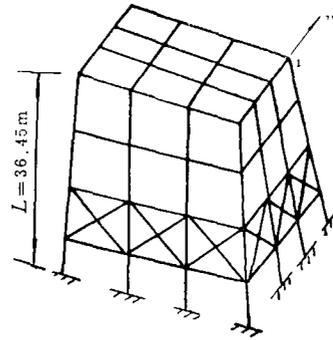


图 9

五、结 论

1. 本文提供了两种考虑几何非线性效应的梁单元显式。通过一些典型例题的数值计算与解析解的比较可知两种单元公式推导的准确性和相应的计算机程序的可靠性。

2. 对于一般梁系非线性方程的求解采用载荷增量或位移增量法与 Newton-Raphson 迭代法相结合的混合法是十分有效的, 而且本文采用的相对位移收敛准则具有良好的收敛性。

3. 数例1, 2表明一般的非线性梁元具有足够的精确度。但是公式繁杂, 计算量大, 并且在变形很大的情况下必需将单元划分得很小, 其根本原因是采用了直线单元的位移插值形函数。

4. 简化的非线性梁元, 用于分析轴力足够大而且变形的非线性程度不太高的实际复杂结构是可取的。相应的计算量可大大减少。

参 考 文 献

- [1] Kamat, M. P. and L. T. Watson, A quasi-Newton versus a homotopy method for nonlinear structure analysis, *Comput. and Struct.*, 4 (1983), 579—589.
- [2] Suran, Karan S., Geometrically nonlinear formulation for two dimensional curved beam elements, *Comput. and Struct.*, 4 (1983), 105—114.
- [3] Schrefler, B. A. and S. Odorizz, A total Lagrangian geometrically nonlinear analysis of combined beam and cable structures, *Comput. and Struct.*, 1 (1983), 115—127.
- [4] Fum, Fumio, A simple mixed formulation for elastic problems, *Comput. and Struct.*, 1 (1983), 79—88.
- [5] Stanley, P., *Nonlinear Problems in Stress Analysis* (1978), 373—396.
- [6] 谢贻权, 何福保, 《弹性和塑性力学中的有限元方法》, 机械工业出版社 (1981).
- [7] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd Edn., McGraw-Hill, London (1977).
- [8] Majid, K. I., *Nonlinear Structures*, London, Butterworths (1972).
- [9] Frish-Fay, R., *Flexible Bars*, London, Butterworths (1962).

The Nonlinear Numerical Analysis Method for Frames

Zhu Ju-fen Zhou Cheng-fang Lü He-xiang

(Dalian Institute of Technology, Dalian)

Abstract

In this paper, the direct formulas of stiffness matrixes of two kinds of Kirchhoff nonlinear elements under total-Lagrange coordinate are given. For the first one, it includes not only the quadric terms of increments of strain and displacement but also the influence of rotations. For the second one, it is simplified and its nonlinear is considered by taking into account the influence of axial force on the equilibrium equation in the linear beam theory.

The nonlinear equation obtained from both of the above-said elements is solved by mixed Newton-Raphson method, and by comparing the results obtained from two kinds of nonlinear beam, some important conclusions that we can know how to use them right are given in our paper.