应用数学和力学，第6卷第7期（1985年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

轴对称充液腔体旋转的定态解及其稳定性

徐硕昌　戴世强

（中国科学院力学研究所，1984年9月6日收到）

摘　　要

本文根据势能的极值条件，讨论了轴对称充液腔体绕定轴旋转的各种可能的平衡态，证明了充满粘性液体的腔体在倒立情形和下悬情形中都只存在绕铅垂的对称轴整体旋转形式的稳定终态解，并且应用关于连续系统的 Ляпунов 直接方法研究了这种旋转状态在大扰动下的稳定性．本文还描述了充液腔体倒立旋转运动和旋转的球碗中小球的运动之间有趣的类比关系．有关结果为长期稳定性的真实性提供了一种理论依据．

一、引　　言

对于旋转充液腔体的平衡和稳定问题，文献［1］中给出了普遍的非线性情形的数学提法，并研究了弱非线性稳定性．文献[2～4]从不同方面处理了这个问题．在这些工作中，均选取9个方向余弦为方位参数，其中只有3个是独立的，使用起来不甚方便．在文献[5]中，选用Cardan 角 α，β，γ 为方位参数，使得含循环坐标γ的方程从方程组中相对地分离出来，从而导出轴对称充液腔体自由迴旋（即重心与定点重合）的较为简明的大扰动运动方程组，并且给出了大扰动普遍情形下 Columbus 问题的严格解答．

类似于文献［5］，本文选取α，β，γ 为方位参数，导出了在定点和重心不重合情况下轴对称充液腔体大扰动运动方程组．我们根据势能的极值条件，讨论充液腔体绕定轴旋转的各种可能的平衡态；接着证明：在稳定的终态，液体粘性耗散将不起作用，无论是腔体倒立情形（重心在定点之上）还是下悬情形(陀螺摆)，都只存在绕铅垂对称轴整体旋转的稳定终态解，如果不计液体粘性，对于倒立情形，还存在一种规则进动的定态解[6]．

在第四、五节中，我们应用关于连续系统的 Ляпунов 直接方法对上述两种情形的大扰动稳定性进行研究，得到相应的旋转平衡态的稳定性判据．

旋转系统具有迥然不同的长期的和动力的两种稳定性[7]，最说明问题的实例是小球在旋转球碗中的运动．小球的两个平衡位置和充液腔体倒立时的两个旋转平衡态有一种有趣的类比关系，本文第六节将对此加以描述．

二、非线性稳定性问题的数学提法

假设轴对称充液腔体的未扰平衡态是绕铅垂轴以角速度$\mathbf{\Omega}_0$作整体旋转运动。我们将研究的问题是，系统受到扰动以后，在液体粘性耗散作用下，会重新建立怎样的稳态解，并试图给出它们的稳定性条件。本文同时处理腔体倒立情形和下悬情形。

选定三个基本坐标系[1]：

（1） 固定坐标系$\{O, \xi\}$：对于倒立情形，ξ_3轴取为铅垂向上；对于下悬情形，ξ_3轴铅垂向下，取定点为原点O，坐标基矢为$\mathbf{i}_1^\circ, \mathbf{i}_2^\circ, \mathbf{i}_3^\circ$。

（2） 旋转坐标系$\{O, x\}$：x_3轴和ξ_3轴重合，此系相对于$\{O, \xi\}$系以$\mathbf{\Omega}_0=(0, 0, \Omega_0)$旋转，坐标基矢为$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$。

（3） 固连坐标系$\{O, x'\}$：此系与充液腔体相固连，坐标基矢$\mathbf{i}_1', \mathbf{i}_2', \mathbf{i}_3'$沿腔体的惯性主方向。

类似于文献[5]，选用 Cardan 角α, β, γ为系统的方位变量。取 Cardan 环架如下：外环的轴为x_1轴，内环的轴垂直于x_1轴（初始位置为x_2轴），α, β分别为系统绕外环轴和内环轴的转角，γ为绕系统对称轴的转角，于是$\{O, x'\}$与$\{O, x\}$系之间的变换矩阵$\mathbf{T}$为[8]

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

设其转置矩阵为$\mathbf{T}^*$。

我们选取如下特征量进行无量纲化：长度——腔体的最大外径d_{max}，时间——$1/\Omega_0$，质量——ρd^3_{max}（ρ为液体密度）。下面我们按无量纲形式写出基本方程组和边界条件。

腔体内液体平衡时满足

$$p^\circ=p_0+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\mp gx_3 \tag{2.2}$$

其中，p°为液体压力，g为重力加速度，(2.2)式右端末项前的负号和正号分别对应于倒立和下悬情形。

在旋转坐标系$\{O, x\}$中，系统受扰运动的控制方程和边界条件如下：

1. 壳体的运动方程

设壳体和腔内液体的主转动惯量分量分别为A_1, A_1, C_1和A_2, A_2, C_2，而扰动角速度为$\boldsymbol{\omega}$，则壳体的总动量矩为

$$\mathbf{G}=(0,\ 0,\ C_1)+\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{J}+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J} \tag{2.3}$$

其中$\mathbf{J}$为壳体的惯量张量

$$\mathbf{J}=\mathbf{T}^*\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}\mathbf{T}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+(C_1-A_1)\sin^2\beta & (A_1-C_1)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta & (C_1-A_1)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ (A_1-C_1)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta & A_1+(C_1-A_1)\sin^2\alpha\sin^2\beta & (A_1-C_1)\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta \\ (C_1-A_1)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta & (A_1-C_1)\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta & A_1+(C_1-A_1)\cos^2\alpha\cos^2\beta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

显然，$\mathbf{J}$ 与 γ 无关。

壳体的动量矩方程为

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\{\mathbf{i}_3\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]\}+\frac{d}{dt}[\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{J}]$$

$$=-\iint_S \mathbf{r}\times(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{n}dS\pm 2c(\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\beta,\ 0)$$

$$-2a(\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta,\ \cos\alpha\cos\beta\sin\beta,\ 0) \tag{2.5}$$

式中，$p_1=p-p^{\circ}$ 为扰动压力，$\mathbf{I}$ 为单位张量，$\boldsymbol{\tau}$ 为粘性应力张量：

$$\tau_{ij}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

($Re=\rho d^2{}_{\max}\Omega_0/\mu$为 Reynolds数，$\mathbf{v}$ 为液体速度)，S 为腔内液体表面，$\mathbf{n}$ 是它的单位外法向矢量，$\mathbf{r}$ 为矢径，而

$$a=(C_1+C_2-A_1-A_2)/2$$

$$c=(M_1gh_1+M_2gh_2)/2$$

(M_1 和 M_2 是壳体和液体的总质量，h_1 和 h_2 是它们的重心与定点的距离)。

2. 腔内液体的运动方程

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+2\mathbf{i}_3\times\mathbf{v}=\nabla\cdot(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}) \tag{2.6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{2.7}$$

3. Cardan 角方程

$$\frac{d\alpha}{dt}=\omega_1-\mathrm{tg}\beta(\omega_3\cos\alpha-\omega_2\sin\alpha) \tag{2.8}$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\omega_3\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha \tag{2.8}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}\cos\beta=\omega_3\cos\alpha-\omega_2\sin\alpha \tag{2.10}$$

4. 边界条件

$$\mathbf{v}|_S=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{2.11}$$

整个非线性稳定问题就是按非线性微分-积分方程组(2.5)～(2.10)和边界条件(2.11)求解 $\boldsymbol{\omega}$，$\mathbf{v}$，p_1，α，β，γ，或者至少定性地对解进行分析。

三、能量积分关系式和定态解

1. 能量积分关系式

为了导出能量积分关系式，利用如下结果[4,6]：

(i) (2.5)式左端第二、三项满足

$$\mathbf{i}_3\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\frac{d}{dt}[\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{J}]=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a} \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{a}=(2J_{13},\ 2J_{23},\ J_{33}-J_{11}-J_{22})$。

(ii) 由方程(2.8)，(2.9)导得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta)=\omega_1\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta+\omega_2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta \tag{3.2}$$

和

$$\frac{d}{dt}(\cos\alpha\cos\beta)=-\omega_1\sin\alpha\cos\beta-\omega_2\sin\beta \tag{3.3}$$

以$\mathbf{v}$标乘(2.6)式两端，然后在充液腔体积τ内积分，得到

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_\tau \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}d\tau\right\}+\frac{1}{2}\iiint_\tau \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$$
$$=\iint_S(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{n}dS \tag{3.4}$$

以$\boldsymbol{\omega}$标乘(2.5)式两端，利用(3.1)～(3.3)式，导得

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}\right\}=-\iint_S(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{n}dS$$
$$-a\frac{d}{dt}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta)\mp 2c\frac{d}{dt}(\cos\alpha\cos\beta) \tag{3.5}$$

将(3.4)、(3.5)式相加，就得到能量积分关系式

$$\frac{d}{dt}\{E[\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{v}]+L[\alpha,\ \beta]\}=-\Phi[\mathbf{v}] \tag{3.6}$$

其中，

$$E[\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{v}]=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\iiint_\tau v^2 d\tau \tag{3.7}$$

$$L[\alpha,\ \beta]=a(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta)\pm 2c(\cos\alpha\cos\beta-1)$$
$$=a(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\pm 2c(\cos\alpha\cos\beta-1) \tag{3.8}$$

$$\Phi[\mathbf{v}]=\frac{1}{2}\iiint_\tau \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d\tau \tag{3.9}$$

这里，E，L和Φ分别对应于扰动动能、扰动势能和粘性耗散函数。

2. 两个引理[5]

引理1 液体粘性耗散函数$\Phi(\mathbf{v})=0$的充要条件是液体作刚体运动，在定点运动情形只能作整体旋转运动。

引理2 液体粘性耗散函数$\Phi(\mathbf{v})$是正定的。

证明可参看文献[5]，此处从略。

3. 定态解

定态解由势能的极值条件确定。由(3.8)式求得$\partial L/\partial\alpha$和$\partial L/\partial\beta$，令它们为零

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\alpha}&=2\sin\alpha\cos\beta[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]=0\\ \frac{\partial L}{\partial\beta}&=2\cos\alpha\sin\beta[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]=0\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

对于倒立情形，满足(3.10)式的有三组解：

解(i) $\sin\alpha=0$，$\sin\beta=0$

解(ii) $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=0$

解(iii) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{c}{a}$

解(i)对应于绕系统的铅垂对称轴的整体旋转，解(ii)对应于系统的对称轴保持水平的旋转，解(iii)对应于规则进动。

对于下悬情形，满足(3.10)式的有两组解：

解(i)′ $\sin\alpha=0$，$\sin\beta=0$

解(ii)′ $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=0$

解(i)′与(i)相类似，只是对称轴铅垂向下，解(ii)′与(ii)完全相同。

4. 定态解的性质

我们先由势能的二阶导数来分析定态解的性质，下面还要用 Ляпунов 直接方法加以严格证明。

由(3.10)式求得L的二阶导数：

$$\left.\begin{aligned}
E&=\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2}=2\cos\alpha\cos\beta[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]-2a\sin^2\alpha\cos^2\beta\\
F&=\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta}=2\sin\alpha\sin\beta[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]-2a\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
H&=\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2}=2\cos\alpha\cos\beta[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]-2a\sin^2\beta\cos^2\alpha\\
EH-F^2&=4[a\cos\alpha\cos\beta\mp c]^2[\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta]\\
&\quad+4a[a\cos\alpha\cos\beta\mp c](\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

设$a>c$，可由(3.11)式确定上述定态解有如下性质：

解(i). $E>0$，$EH-F^2>0$，因而，所对应的定态的总势能取极小值，重力势取极大值；

解(ii)(ii)′. $EH-F^2<0$，总势能不取极值；

解(iii). 这时$EH-F^2=0$，我们把总势能L写成

$$L=a(1-\cos^2\theta)+2c(\cos\theta-1)\tag{3.12}$$

其中θ为系统对称轴与铅垂轴的夹角，此解对应于$\cos\theta=c/a$，总势能取极大值；

解(i)′. $E>0$，$EH-F^2>0$，总势能和重力势均取极小值。

当$a<c$时，解(i)所对应的$E<0$，$EH-F^2>0$，总势能取极大值，而且规则进动解不存在。

从上述极值条件分析可知，无论是倒立情形，还是下悬情形，都只在绕铅垂主轴作整体旋转时才会建立稳定的终态（对倒立情形同时还要求$a>c$）。如前所述，当腔内充满理想液体时，规则进动解也是一种稳态解；由上面的讨论可见，当考虑粘性液体时，这种解是不稳定的，粘性力将不断耗散能量，导致失稳，从而不能建立整体旋转状态。

我们还可以从另一角度来佐证上述结论。由引理1可知，系统在定态下粘性耗散不起作用，腔内液体必须作整体旋转。设$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0$为常矢量，以$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$代入(2.6)式，取旋度后即得

$$\boldsymbol{\omega}=(0,\ 0,\ \omega_0)\tag{3.13}$$

这也表明，液体在定态情形只能绕铅垂的主轴作整体旋转。

四、倒立情形的稳定性

1. 稳定性的定义

由于方程(2.5)～(2.9)中不含γ，只有方程(2.10)含γ，实际求解时可由(2.5)～(2.9)式中解出除γ以外的未知函数，再由(2.10)式求出γ。因此我们也分两步来讨论解的稳定性。首先对方程(2.5)～(2.9)的所有可能解$\mathscr{U}=\{\alpha,\ \beta,\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}\}$构成的泛函空间$\Psi=R^2\times R^3\times c^2(\tau)$上来讨论稳定性，这里$c^2(\tau)$为在区域$\tau$内有定义，且满足$\nabla\cdot\mathbf{v}=0$和$\mathbf{v}|_S=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$的连续可微矢函数$\mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)$的全体。

绕铅垂的对称轴整体旋转的平衡解就是空间Ψ的零元素，即

$$\mathscr{U}_0=\{\alpha_0,\ \beta_0,\ \boldsymbol{\omega}_0,\ \mathbf{v}_0\}=\{0,\ 0,\ 0,\ 0\}=0 \tag{4.1}$$

此平衡解的稳定性就按距离

$$\rho(\mathscr{U},\ 0)=\left\{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+|\boldsymbol{\omega}|^2+\iiint_\tau|\mathbf{v}|^2d\tau\right\}^{1/2} \tag{4.2}$$

来定义。如果$t\to\infty$时，$\rho\to0$，即$\alpha\to0$，$\beta\to0$，$|\boldsymbol{\omega}|\to0$，$\iiint_\tau v^2d\tau\to0$，则称上述平衡解是渐近稳定的（反之亦然）。这时由(2.10)式可得$t\to\infty$时，$d\gamma/dt\to0$，也就是说，经过充分长时间之后，终态和初态之间至多有γ为常数的一个位相差，对于轴对称体而言，这是无需区分的，在这个意义下，充液腔体回到未扰前的初态。

前面已提到，我们定义x_3轴与x_3'轴的夹角为$\theta(0<\theta<\pi/2)$，前一节已证明$\theta=0$是唯一的稳定终态解。我们就以$\sin\theta$的增长情形来量度不稳定性，如果$\sin\theta$随时间单调增加，则称相应的平衡解是不稳定的，这时将导致系统过渡到规则进动解，从而失稳、倾倒。

2. 稳定性判据

定理1 如果充液腔体绕铅垂对称轴的整体旋转平衡态满足$a>c$，即

$$C_1+C_2-A_1-A_2>M_1gh_1+M_2gh_2 \tag{4.3}$$

则在扰动是小而有限的情形下，上述平衡态是渐近稳定的。

证 对于倒立情形，总势能表达式(3.8)可改写成

$$L[\alpha,\ \beta]=a(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)+2c(\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)}-1) \tag{4.4}$$

由于扰动小而有限，$\sin\alpha$和$\sin\beta$都是小量，把$L[\alpha,\ \beta]$在$\sin\alpha=\sin\beta=0$附近作Taylor展开，保留四阶小量，得到

$$L[\alpha,\ \beta]=(a-c)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-(a-c)\sin^2\alpha\sin^2\beta-\frac{c}{4}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)^2 \tag{4.5}$$

这里，$L[\alpha,\ \beta]$的正定取决于二阶小量项，正定条件是$a>c$。

引进 Ляпунов 泛函

$$V[\mathscr{U}]=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\iiint_\tau v^2d\tau+\frac{a-c}{4}[(3+\cos2\beta)\sin^2\alpha$$

$$+(3+\cos2\alpha)\sin^2\beta]-\frac{c}{4}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)^2 \tag{4.6}$$

由(2.1)、(2.4)式可得如下估计：

$$\min(A_1,\ C_1)\omega^2\leqslant\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}\leqslant\max(A_1,\ C_1)\omega^2 \tag{4.7}$$

易验证 $V[\mathscr{U}]$ 关于 $\rho(\mathscr{U}, 0)$ 是正定的，即

$$\alpha_1\rho^2(\mathscr{U}, 0)\leqslant V[\mathscr{U}]\leqslant\alpha_2\rho^2(\mathscr{U}, 0) \tag{4.8}$$

其中，

$$\alpha_1=\min\left(\frac{a-c}{2}, A_1, C_1, \frac{1}{2}\right) \tag{4.9}$$

$$\alpha_2=\max\left(a-c, A_1, C_1, \frac{1}{2}\right) \tag{4.10}$$

而且仅当 $\mathscr{U}=0$ 时 $V=V[0]=0$。

根据能量积分关系式(3.6)和引理 2 得知

$$\frac{dV[\mathscr{U}]}{dt}=-\Phi[\mathbf{v}]<0 \tag{4.11}$$

即 dV/dt 是负定的。

根据 $V[\mathscr{U}]$ 的上述性质证得：平衡解(4.1)关于 $\rho(\mathscr{U}, 0)$ 是渐近稳定的，当 $t\to\infty$时，$\alpha\to0$，$\beta\to0$，$|\boldsymbol{\omega}|\to0$，$\iiint_\tau v^2d\tau\to0$，再由方程(2.10)得知：$t\to\infty$时，$\frac{d\gamma}{dt}\to0$，系统的终态与初态至多存在 γ 为常数的相位差。

当系统自由迴旋（即重心与定点重合，$c=0$）时，可以证得大扰动普遍情形下的稳定性判据：

定理 2 如果轴对称充液腔体绕铅垂对称轴的自由迴旋状态的势能具有极小值，亦即 $a>0$ $(C_1+C_2>A_1+A_2)$ 使得 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$ 时

$$L[\alpha, \beta]=a(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta)>0, \tag{4.12}$$

则对于满足条件$-\pi/2<\alpha<\pi/2$和 $-\pi/2<\beta<\pi/2$ 的任意大扰动，系统的自由迴旋初态是渐近稳定的。

证 $c=0$时，由(3.8)式可导得(4.12)式中L的形式，因而$a>0$ 时L是正定的（对任意的满足上述条件的 α，β）；其余部分证明与定理 1 类似(参看文献[5])。

定理 3 如果充液腔体绕铅垂的对称轴整体旋转平衡态的总势能取极大值，即 $a<c$，则该平衡态是不稳定的。

证 先把(3.8)式改写成

$$L=a(1-\cos^2\theta)+2c(\cos\theta-1) \tag{4.13}$$

显然，

$$L[\theta]\leqslant4(a-c)\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{4.14}$$

对能量关系式(3.6)关于 t 积分，得到

$$E[\alpha, \beta, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]+L[\theta]=-\int_{t_0}^{t}\Phi[\mathbf{v}]dt+E[\alpha_0,\beta_0,\boldsymbol{\omega}_0,\mathbf{v}_0]+L[\theta_0] \tag{4.15}$$

其中，右端最后两项分别为初始扰动动能和势能，假设它们满足

$$E[\alpha_0,\beta_0,\boldsymbol{\omega}_0,\mathbf{v}_0]<|L[\theta_0]| \tag{4.16}$$

则利用(4.14)，(4.16)式和引理 2，由(4.15)式得到

$$4|a-c|\sin^2\frac{\theta}{2}>\int_{t_0}^{t}\Phi[\mathbf{v}]dt+|E[\alpha_0,\beta_0,\omega_0,v_0]+L[\theta_0]|$$

$$>B(t-t_0)+|E[\alpha_0,\beta_0,\omega_0,v_0]+L[\theta_0]| \tag{4.17}$$

式中 $B>0$ 为常数，由(4.17)式可见，系统对称轴与铅垂方向的夹角 θ 随时间 t 单调地增加，定理 3 得证。

将定理 2 和定理 3 应用于 Columbus 问题，就可得到该问题在大扰动情形下的完全解[5]。

五、下悬情形的稳定性

轴对称充液腔体下悬时是一种陀螺摆。陀螺摆是一类三自由度陀螺仪，其重心在位于定点之下，是陀螺地平仪的主要灵敏元件，在陀螺仪理论中已作过充分研究。带有液体消振器的陀螺摆就是一种由充液腔体构成的陀螺摆，过去的理论研究都是对简单模型或在线性假设下进行的[9]。这里我们应用关于连续系统的 Ляпунов 直接方法作精确描述。

本节取ξ_3轴铅垂向下，绕铅垂对称轴的整体旋转平衡态对应于零解：$\mathscr{U}_0=\{\alpha_0,\ \beta_0,\ \boldsymbol{\omega}_0,\ \mathbf{v}_0\}=0$ 稳定性按距离

$$\rho(\mathscr{U},\ 0)=\left\{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+|\boldsymbol{\omega}|^2+\iiint_\tau v^2 d\tau\right\}^{1/2} \tag{5.1}$$

来定义。可以证得如下的稳定性判据：

定理 4 设充满粘性液体的轴对称腔体构成陀螺摆，则它绕铅垂对称轴的整体旋转平衡态对于满足$-\pi/2<\alpha<\pi/2$和$-\pi/2<\beta<\pi/2$的扰动是渐近稳定的。

证 对于下悬情形，总势能表达式(3.8)可写成

$$L[\alpha,\beta]=2[a(1+\cos\alpha\cos\beta)+2c]\left[(1+\cos\beta)\sin^2\frac{\alpha}{2}+(1+\cos\alpha)\sin^2\frac{\beta}{2}\right] \tag{5.2}$$

作 Ляпунов 泛函

$$V[\mathscr{U}]=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\iiint_\tau v^2 d\tau+L[\alpha,\beta] \tag{5.3}$$

其中，$L[\alpha,\beta]$由(5.2)式给出。

容易验证，$V[\mathscr{U}]$关于(5.1)式给出的$\rho(\mathscr{U},0)$是正定的，即

$$b_1\rho(\mathscr{U},0)\leqslant V[\mathscr{U}]\leqslant b_2\rho(\mathscr{U},0) \tag{5.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\min\left\{2(a+2c),\ A_1,\ C_1,\ 1/2\right\}\\ b_2&=\max\left\{8(a+c),\ A_1,\ C_1,\ 1/2\right\}\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

而且仅当 $\mathscr{U}=0$ 时 $V[\mathscr{U}]=V[0]=0$。

由能量积分关系式(3.6)和引理 2 可证得$dV(\mathscr{U})/dt$ 是负定的。因此陀螺摆的平衡旋转态关于 $\rho(\mathscr{U},0)$是渐近稳定的：当$t\to\infty$时，$\alpha\to0$，$\beta\to0$，$|\boldsymbol{\omega}|\to0$，$\iiint_\tau v^2 d\tau\to0$，$\frac{d\gamma}{dt}\to0$，终态与初态相比，至多有 γ 的常数相位差。

六、讨论和结论

1. 轴对称充液腔体在倒立情形下的旋转状态与小球在旋转球碗中运动的类比

在绕对称轴旋转的球碗中一个小球的运动有两个平衡态：最低点是动力稳定平衡位置，仅当完全忽略小球和球碗之间的摩擦时才会出现这种情形，实际上是虚假的平衡位置；较高点是离心力和重力相平衡的位置，这是长期稳定的、真实的平衡位置[7]。

轴对称充液腔体在倒立情形下也有两个旋转平衡态：规则进动定态仅在忽略液体粘性时才可能存在[6]，它与小球在旋转球碗中最低点平衡位置相对应，是动力稳定平衡态，实际上并不存在；另一个平衡态是绕铅垂对称轴的整体旋转，它和小球在球碗中较高点的平衡位置相对应，这是一个真实的平衡态。

无论是旋转球碗中的小球，还是倒立旋转的充液腔体，它们的长期稳定的平衡态都是总势能（重力势和离心力势之和）取极小值的状态，而总势能不取极小值的平衡态都是动力稳定的状态，实际上并不出现。倒立旋转充液腔体的这种特性又为长期稳定性的真实性增加了一种理论依据。

2. 关于倒立旋转充液腔体的稳定性的结论

当$a>c$时，绕铅垂对称轴的整体旋转状态在扰动为小而有限的情形下是渐近稳定的，而当$a<c$时，则对无论何种扰动都是不稳定的。

3. 关于陀螺摆的稳定性的结论

绕铅垂对称轴的整体旋转状态既是重力势最小处，又是总势能极小处，在任何扰动（包括大扰动）下都是稳定的，而且是唯一的长期稳定平衡态。

参 考 文 献

[1] 徐硕昌，旋转充液腔体的非线性稳定理论及其对Columbus问题的应用，中国科学，**25A**(1982)，254——264.

[2] 李骊，旋转充液腔体的有限扰动稳定问题，应用数学和力学，**4**，5 (1983)，609——620.

[3] 李骊，旋转充液腔体的全局稳定性及其受扰运动的定性分析，应用数学和力学，**4**，6 (1983)，771——780.

[4] 秦元勋、管克英、李骊，充液腔体旋转运动的稳定性，科学通报，**29** (1984)，198——201

[5] 徐硕昌，关于 Columbus 问题大扰动情形的完全解，中国科学A，11 (1984) 1017——1024.

[6] Моисеев Н. Н. и В. В. Румянцев, *Динамика Тела с Полостями, Содержащими Жидкость*, М. Изд-во «Наука», 1965.

[7] 徐硕昌，论长期稳定性和动力稳定性，力学进展，13(1983)

[8] Magnus, K.，陀螺理论与应用，贾书惠等译，国防工业出版社，(1983).

[9] Булгаков Б. В.，陀螺仪实用理论，吕茂烈等译，国防工业出版社，(1961).

Stationary-State Solutions to the Rotation of Solid Bodies with Liquid-Filled Cavities and Their Stability

Xu Shuo-chang Dai Shi-qiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, we discuss all the possible equilibrium states of axi-symmetrical solid bodies with liquid-filled cavities rotating around fixed axes according to the extremum conditions on the potential energy, and conclude that there exists a unique stable final-state solution, for which the system uniformly rotates around its vertical symmetrical axis, for both the inverted and suspended ones. And then applying the Lyapunov direct approach for a continuous system, we investigate the stability of the rotating systems subject to large disturbances. In addition, we describe an interesting analogue between the rotation of a solid body with a liquid-filled cavity in the inverted case and the motion of a small ball in a spinning spherical bowl. The results obtained herein theoretically provide an evidence of the reality of the secular stability.