应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0092_07

变系数 KdV 方程组的精确解*

徐桂琼[1], 李志斌[2]

(1. 上海大学 国际工商与管理学院 信息管理系, 上海 20043 ;
2. 华东师范大学 计算机科学技术系, 上海 2000 2;)

(张鸿庆推荐)

摘要: 将 Jacobi 椭圆正弦函数展开法与 Jacobi 椭圆余弦函数展开法引入到变系数 KdV 方程组的求解中, 得到了三组类周期波解• 这些解析解在一定条件下退化为类孤波解•

关 键 词: 椭圆正弦函数展开; 椭圆余弦函数展开; 类周期波解; 类孤波解; 变系数 KdV 方程组

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

1 引言及问题提出

求解非线性偏微分方程是非常重要的研究领域, 国内外学者在常系数非线性偏微分方程方面做了大量工作, 逐步发展和形成了一系列行之有效的方法[1~7]• 近年来, 变系数非线性偏微分方程的研究引起了人们极大的兴趣• 一些常系数非线性方程的求解方法, 如对称群方法、截断展开方法、齐次平衡方法等, 正被陆续引入到变系数非线性偏微分方程的研究之中[8~13]• 最近, 刘式适等[13] 将 Jacobi 椭圆正弦函数展开法应用于变系数非线性方程, 通过假设方程的解为 Jacobi 椭圆正弦函数的有限级数形式, 将变系数非线性偏微分方程的求解转化为一阶常微分方程及代数方程的求解• 在本文中, 我们同时将 Jacobi 椭圆正弦函数展开法及 Jacobi 椭圆余弦函数展开法引入到变系数非线性偏微分方程组的求解中• 以变系数 KdV 方程组为例, 说明使用该方法可得到类椭圆余弦波解, 类椭圆正弦波解以及类孤波解•

考虑变系数 KdV 方程组

$$\begin{cases} u_t + f(t)uu_x - g(t)vv_x + f(t)u_{xxx} = 0, \\ v_t + f(t)(3uv_x + v_{xxx}) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中, $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $f(t)$ 与 $g(t)$ 均为时间 t 的任意函数, 下标表示偏导数• 对常系数 KdV 方程组(即(1) 中 $f(t)$ 及 $g(t)$ 为常数) 的讨论较多, 如文献[4] 中采用行波约化法, 借助于 Ricatti 方程, 得到了孤立波解, 文献[7] 中利用混合指数法得到了常系数 KdV 方程组的两组孤立波解• 文献[12] 采用近年来发展起来的齐次平衡方法讨论了变系数 KdV 方程组, 在

* 收稿日期: 2002_11_08; 修订日期: 2004_10_14
基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(200202 9003); 上海市自然科学基金资助项目(ZD14012)
作者简介: 徐桂琼(1973—), 女, 四川自贡人, 博士(联系人. Tel: + 8 _21_ 9982992; E_mail: xuguiqiong@yahoo.com)•

条件 $g(t)=cf(t)$ (c 为常数) 下, 得到了该方程组的一种 Bäcklund 变换, 给出了 u, v 均为钟状的变速孤立波解• 以下我们主要利用 Jacobi 椭圆正弦函数展开及 Jacobi 椭圆余弦函数展开来讨论方程组(1) 的精确解•

2　Jacobi 椭圆正弦函数展开

对方程组(1), 寻求如下形式的行波解

$$u=u(\xi),\ v=v(\xi),\ \xi=p(t)x+q(t)+\delta,\tag{2}$$

其中 $p(t)$, $q(t)$ 为待定函数, δ 为任意常数• 依据 Jacobi 椭圆正弦函数法, $u(\xi)$, $v(\xi)$ 可表示为如下形式

$$u(\xi)=\sum_{j=0}^{M}a_j(t)\mathrm{sn}^j(\xi,m),\quad v(\xi)=\sum_{j=0}^{N}b_j(t)\mathrm{sn}^j(\xi,m),\tag{3}$$

其中, m 为模数($0<m<1$), $a_j(t)(j=0,\cdots,M)$, $b_j(t)(j=0,\cdots,N)$ 为待定函数, M, N 为待定正整数• 平衡方程组(1) 中最高阶线性导数项与非线性项得

$$\begin{cases}\max(2M+1,2N+1)=M+3,\\ M+N+1=N+3,\end{cases}\tag{4}$$

求解(4), 可得 $M=2$, $N\leqslant 2$, 于是 $M=2$, $N=1$ 或 $M=2$, $N=2$• 这样方程组(1) 的求解分如下两种情形讨论:

情形 1　$M=2$, $N=1$• 此时(3) 化作

$$u=a_0(t)+a_1(t)\mathrm{sn}(\xi,m)+a_2(t)\mathrm{sn}^2(\xi,m),\ v=b_0(t)+b_1(t)\mathrm{sn}(\xi,m),\tag{5}$$

式中 $a_2(t)\neq 0$, $b_1(t)\neq 0$• 将(5) 式代入方程组(1) 经整理后得,

$$\begin{cases}12a_2pf(a_2+2m^2p^2)\mathrm{CD}S^3+a_1pf(3a_2+m^2p^2)\mathrm{CD}S^2+\\ \qquad a_2'\mathrm{S}^2+[a_1^2pf+12a_0a_2pf+2a_2(p'x+q')-b_1^2pg-\\ \qquad 8a_2(1+m^2)p^3f]\mathrm{CDS}+a_1'S[a_0a_1pf-b_0b_1pg+a_1(p'x+q')-\\ \qquad a_1p^3f(1+m^2)]\mathrm{CD}+a_0'=0,\\ 3b_1pf(a_2+2m^2p^2)\mathrm{CDS}^2+(b_1'+3a_1b_1f)\mathrm{CDS}+[b_1(p'x+q')+\\ \qquad 3a_0b_1pf-b_1(1+m^2)p^3f]\mathrm{CD}+b_0'=0,\end{cases}\qquad(\ \ )$$

其中 $\mathrm{S}=\mathrm{sn}(\xi,m)$, $\mathrm{C}=\mathrm{cn}(\xi,m)$, $\mathrm{D}=\mathrm{dn}(\xi,m)$•

令( ) 式中 S^j, C^i, D^i ($j=0,\cdots,3$, $i=0,1$) 的系数为零, 即

$$\begin{cases}a_0'=a_1'=a_2'=b_0'=0,\\ 12a_2pf(a_2+2m^2p^2)=0,\\ 3b_1pf(a_2+2m^2p^2)=0,\\ a_1pf(3a_2+m^2p^2)=0,\\ b_1'+3a_1b_1f=0,\\ b_1(p'x+q)+3a_0b_1pf-b_1(1+m^2)p^3f=0,\\ 2a_2(p'x+q)+12a_0a_2pf+a_1^2pf-b_1^2pg-8a_2(1+m^2)p^3f=0,\\ a_0a_1pf-b_0b_1pg+a_1(p'x+q)-a_1p^3f(1+m^2)=0•\end{cases}\tag{7}$$

由方程组(7)的第一式,易得

$$a_0 = k_0,\quad a_1 = k_1,\quad a_2 = k_2,\quad b_0 = l_0, \tag{8}$$

其中 k_0, k_1, k_2, l_0 均为常数。因 $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0, p \neq 0, f \neq 0$, 由(7)的第 2 式及第 3 式,有

$$p = \pm\sqrt{\frac{-k_2}{2m^2}},\ k_2 < 0. \tag{9}$$

这样,由(7)的第 4 式得到

$$a_1 = k_1 = 0, \tag{10}$$

再由(7)的第 5 式,可得

$$b_1(t) = l_1, \tag{11}$$

l_1 为常数。

将(8)~(11)式代入(7)的第 、7 式,化作

$$\begin{cases} k_2 q' = 4k_2(1+m^2)p^3 f - k_0 k_2 pf + 3l_1^2 pg, \\ q' = (1+m^2)p^3 f - 3k_0 pf, \end{cases} \tag{12}$$

解之,得到待定函数 $q(t)$ 以及 $f(t)$ 与 $g(t)$ 满足的约束条件

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g} = \dfrac{2m^2 l_1^2}{k_2^2 + m^2 k_2^2 + 2m^2 k_0 k_2}, \\ q(t) = \pm\dfrac{\sqrt{-2k_2}(k_2 + m^2 k_2 + m^2 k_0)}{4m^3}\displaystyle\int f(t)\,dt. \end{cases} \tag{13}$$

由此可得到变系数 KdV 方程组(1)的一组类椭圆正弦波解,

$$u_1 = k_0 + k_2 \mathrm{sn}^2(\xi, m),\ v_1 = l_1 \mathrm{sn}(\xi, m), \tag{14}$$

其中 $f(t), g(t)$ 满足的约束条件由(13)式给出, k_0, l_1 为任意常数, $k_2 < 0$, 且

$$\xi = \pm\frac{\sqrt{-2k_2}}{2m^2}\left[x - \frac{k_2 + m^2 k_2 + m^2 k_0}{2m^2}\int f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \delta. \tag{15}$$

当 $m \to 1$, 解(14)退化为类孤立波解

$$u_2 = k_0 + k_2 \tanh^2(\xi),\quad v_2 = l_1 \tanh(\xi), \tag{1\ }$$

其中 k_0, l_1 为任意常数, $k_2 < 0$, 且

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g} = \dfrac{l_1^2}{k_2^2 + k_0 k_2}, \\ \xi = \pm\dfrac{\sqrt{-2k_2}}{2}\left[x - (3k_0 + k_2)\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \delta. \end{cases} \tag{17}$$

情形 2 $M = 2, N = 2$。此时(3)化作

$$\begin{cases} u = a_0(t) + a_1(t)\mathrm{sn}(\xi, m) + a_2(t)\mathrm{sn}^2(\xi, m), \\ v = b_0(t) + b_1(t)\mathrm{sn}(\xi, m) + b_2(t)\mathrm{sn}^2(\xi, m), \end{cases} \tag{18}$$

$a_2(t) \neq 0$, $b_2(t) \neq 0$。将(18)式代入(1),合并同类项 $\mathrm{sn}^j(\xi, m)\mathrm{cn}^i(\xi, m)\mathrm{dn}^i(\xi, m)(i = 0, 1, j = 0, \ldots, 4)$ 后令系数为零,得到如下方程组:

$$\begin{cases} a_2' = a_1' = a_0' = b_2' = b_1' = b_0' = 0, \\ b_2pf(a_2 + 4m^2p^2) = 0, \\ 3pf(2a_1b_2 + a_2b_1 + 2m^2b_1p^2) = 0, \\ 12p(a_2^2f - b_2^2g + 2m^2a_2p^2f) = 0, \\ p(3fa_1a_2 + m^2a_1p^2f - 3gb_1b_2) = 0, \\ b_1(p'x + q') + 3a_0b_1pf - b_1(1 + m^2)p^3f = 0, \\ a_0a_1pf - a_1p^3f(1 + m^2) + a_1(p'x + q') - b_0b_1pg = 0, \\ -8b_2p^3f(1 + m^2) + 2b_2(p'x + q') + a_0b_2pf + 3a_1b_1pf = 0, \\ 2a_2(p'x + q') - 8a_2(1 + m^2)p^3f + 12a_0a_2pf + \\ \qquad a_1^2pf - 12b_0b_2pg - b_1^2pg = 0. \end{cases} \tag{19}$$

直接求解这个方程组, 可以得到变系数 KdV 方程组(1) 的又一组周期波解:

$$u_3 = k_0 + k_2\mathrm{sn}^2(\xi, m), \quad v_3 = l_0 + \frac{k_2l_0}{k_0}\mathrm{sn}^2(\xi, m), \tag{20}$$

其中
$$\xi = \pm\frac{\sqrt{-k_2}}{2m}\left[x - \frac{k_2 + m^2k_2 + 3m^2k_0}{m^2}\int f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \delta, \tag{21}$$

$k_2 < 0$, k_0, l_0 为任意常数, 方程组(1) 中系数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 还须满足约束条件

$$\frac{f}{g} = \frac{2l_0^2}{(2 - m^2)k_0^2}. \tag{22}$$

当 $m \to 1$, 解(21) 退化为一组钟状变速孤立波解

$$u_4 = k_0 + k_2\tanh^2(\xi), \quad v_4 = l_0 + \frac{k_2l_0}{k_0}\tanh^2(\xi), \tag{23}$$

其中 $k_2 < 0$, k_0, l_0 为任意常数, 且

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g} = \dfrac{2l_0^2}{k_0^2}, \\ \xi = \pm\dfrac{\sqrt{-k_2}}{2}\left[x - (3k_0 + 2k_2)\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \delta. \end{cases} \tag{24}$$

文献[12] 中给出的变速孤立波解(25) ~ (2) 式可看作解(23) 的特殊情形.

3　Jacobi 椭圆余弦函数展开

应用 Jacobi 椭圆余弦函数展开求方程组(1) 的精确解, 此时解的形式可表示为

$$\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{j=0}^{M} a_j(t)\mathrm{cn}^j(\xi, m), \; v = \sum_{j=0}^{N} b_j(t)\mathrm{cn}^j(\xi, m), \\ \xi = p(t)x + q(t) + \delta, \end{cases} \tag{25}$$

其中 $p(t)$, $q(t)$, $a_j(t)$ $(j = 0, \cdots, M)$, $b_j(t)$ $(j = 0, \cdots, N)$ 为待定函数, M, N 为待定正整数. 平衡方程组(1) 中线性最高阶导数项与非线性项, 可得 $M = 2$, $N \leqslant 2$, 于是 $M = 2$, $N = 1$ 或 $M = 2$, $N = 2$. 这样方程组(1) 的求解仍需考虑两种情形:

情形 1　$M = 2$, $N = 1$. 此时(25) 化作

$$\begin{cases} u = a_0(t) + a_1(t)\mathrm{cn}(\xi, m) + a_2(t)\mathrm{cn}^2(\xi, m), \\ v = b_0(t) + b_1(t)\mathrm{cn}(\xi, m), \end{cases} \tag{2 }$$

式中 $a_2(t)\neq 0$, $b_1(t)\neq 0$•

将(2)式代入方程组(1), 令 $\mathrm{sn}^j(\xi,m)\mathrm{cn}^i(\xi,m)\mathrm{dn}^i(\xi,m)$ $(i=0,1,j=0,\cdots,3)$ 的系数为零, 得到包含 11 个方程的方程组(为简便起见, 方程组不再列出)• 求解所得方程组, 有

$$\begin{cases} a_0=k_0,\ a_2=k_2,\ b_1=l_1,\ a_1=b_0=0, \\ p=\pm\dfrac{\sqrt{2k_2}}{2m},\ \dfrac{f}{g}=\dfrac{2m^2l_1^2}{2m^2k_2^2-k_2^2+2m^2k_0k_2}, \\ q=\dfrac{p(k_2-2m^2k_2-m^2k_0)}{2m^2}\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{27}$$

其中 $k_2>0$, k_0, l_1 为任意常数• 将(27)代入(2), 得到变系数 KdV 方程组(1)的类椭圆余弦波解,

$$u_5=k_0+k_2\mathrm{cn}^2(\xi,m),\ v_5=l_1\mathrm{cn}(\xi,m), \tag{28}$$

其中 $f(t)$, $g(t)$ 满足关系由(27)式给出, k_0, l_1 为任意常数, $k_2>0$, 且

$$\xi=\pm\frac{\sqrt{2k_2}}{2m}\left[x+\frac{k_2-2m^2k_2-m^2k_0}{2m^2}\int f(t)\mathrm{d}t\right]+\delta• \tag{29}$$

当 $m\to 1$, 解(29)退化为类孤立波解

$$u=k_0+k_2\mathrm{sech}^2(\xi),\quad v=l_1\mathrm{sech}(\xi), \tag{30}$$

其中 k_0, l_1 为任意常数, $k_2>0$, 且

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g}=\dfrac{2l_0^2}{k_0^2+2k_0k_2}, \\ \xi=\pm\dfrac{\sqrt{2k_2}}{2}\left[x-\dfrac{k_1+k_0}{2}\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t\right]+\delta• \end{cases} \tag{31}$$

情形 2 $M=2$, $N=2$• 此时(25)化作

$$\begin{cases} u=a_0(t)+a_1(t)\mathrm{cn}(\xi,m)+a_2(t)\mathrm{cn}^2(\xi,m), \\ v=b_0(t)+b_1(t)\mathrm{cn}(\xi,m)+b_2(t)\mathrm{cn}^2(\xi,m), \end{cases} \tag{32}$$

式中 $a_2(t)\neq 0$, $b_2(t)\neq 0$• 类似地, 按情形 1 的步骤, 可得到变系数 KdV 方程组(1)的又一组周期波解:

$$\begin{cases} u_7=k_0+k_2\mathrm{cn}^2(\xi,m), \\ v_7=l_0+\dfrac{k_2l_0}{k_0}\mathrm{cn}^2(\xi,m), \end{cases} \tag{33}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g}=\dfrac{2l_0^2}{k_0^2}, \\ \xi=\pm\dfrac{\sqrt{k_2}}{2m}\left[x-\dfrac{3m^2k_0+(2m^2-1)k_2}{m^2}\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t\right]+\delta, \end{cases} \tag{34}$$

$k_2>0$, k_0, l_0 为任意常数•

当 $m\to 1$, 解(34)退化为一组钟状变速孤立波解

$$\begin{cases} u_8=k_0+k_2\mathrm{sech}^2(\xi), \\ v_8=l_0+\dfrac{k_2l_0}{k_0}\mathrm{sech}^2(\xi), \end{cases} \tag{35}$$

k_0, l_0 为任意常数• 此外, 方程组(1)中系数 $f(t)$, $g(t)$ 须满足如下约束条件

$$\begin{cases} \dfrac{f}{g} = \dfrac{2l_0^2}{k_0^2}, \\ \xi = \pm \dfrac{\sqrt{k_2}}{2}\left[x - (3k_0 + 2k_2)\int f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \delta. \end{cases} \tag{3 }$$

其中 $k_2 > 0$.

文献[ ]中还通过将解假设为第三类椭圆函数的有限级数, 得到了一类新周期波解. 考虑到 Jacobi 余弦函数与第三类椭圆函数之间存在如下关系

$$\mathrm{dn}(\xi; m) = \mathrm{cn}(\sqrt{m}\xi; 1/m), \tag{37}$$

m 为模数. 这样, 凡由 Jacobi 椭圆余弦函数展开法获得的解, 经(37) 变换后, 都能得到其第三类椭圆函数解. 对变系数 KdV 方程组(1) 而言, 由类椭圆余弦波解(28), (33) 和关系式(37) 可构造出相应的第三类椭圆函数解.

4 结　　论

本文将 Jacobi 椭圆函数展开法扩展应用到含变系数的非线性偏微分方程组中, 以变系数 KdV 方程组为例, 得到了类椭圆正弦波解、类椭圆余弦波解及类孤波解. 据作者所知, 除解 (u_4, v_4) 与文献[12] 中给出的结果一致以外, 其余均为新的结果. Jacobi 椭圆函数展开法方便简洁, 普适性较强, 也适用于其他的变系数非线性方程, 如变系数 KP 方程、变系数 Sine_Gordon 方程以及变系数 Schrödinger 方程等.

[参　考　文　献]

[1] Hereman W, Banerjee P P, Korpel A. Exact solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct algebraic method[J]. J Phys A, Math Gen, 198 , **19**(3): 07— 28.

[2] Parkes E J, Duffy B R. The Jacobi elliptic function method for finding periodic_wave solutions to nonlinear evolution equations[J]. Phys Lett A, 2002, **295**( ): 280—28 .

[3] HU Xing_biao, WANG Dao_liu, QIAN Xian_min. Soliton solutions and symmetries of the 2+ 1 dimensional Kaup_Kupershmidt equation[J]. Phys Lett A, 1999, **262**( ): 409—415.

[4] FAN En_gui, ZHANG Hong_qing. A note on the homogeneous balance method[J]. Phys Lett A, 1998, **246**(5): 403—40 .

[5] WANG Ming_liang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Phys Lett A, 1995, **199**(3): 1 9—172.

[ ] FU Zun_tao, LIU Shi_kuo, LIU Shi_da, et al. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations[J]. Phys Lett A, 2001, **290**(2): 72—7 .

[7] 徐桂琼, 李志斌. 混合指数方法及其在非线性发展方程孤立波解中的应用[J]. 物理学报, 2002, **51**(5): 94 —950.

[8] 文双春, 徐文成, 郭旗, 等. 变系数非线性 Schrödinger 方程孤子的演化[J]. 中国科学, A 辑, 1997, **27**(10): 949—953.

[9] 阮航宇, 陈一新. 寻找变系数非线性方程精确解的新方法[J]. 物理学报, 2000, **49**(2): 177—180.

[10] 闫振亚, 张鸿庆. 2+ 1 维广义变系数 KP 方程的相似约化[J]. 应用数学与力学, 2000, **21**( ): 585—589.

[11] 张解放, 陈芳跃. 截断展开方法和广义变系数 KdV 方程新的精确类孤子解[J]. 物理学报, 2001, **50**(9): 1 48—1 5 .

[12] 张金良, 胡晓敏, 王明亮. 变系数 KdV 方程组的 Backlünd 变换及其精确解[J]. 杭州电子工业学

院学报, 2002, **22**(1): 59— 1.

[13] 刘式适, 付遵涛, 刘式达, 等. 变系数非线性方程的 Jacobi 椭圆函数展开解[J]. 物理学报, 2002, **51**(9): 1923—192 .

Explicit Solutions to the Coupled KdV Equations with Variable Coefficients

XU Gui_qiong[1], LI Zhi_bin[2]

(1. Department of Information Administration, Shanghai University, Shanghai 20043 , P.R.China;

2. Department of Computer Science, East China Normal University, Shanghai 2000 2, P.R.China)

Abstract: By means of sn_function expansion method and cn_function expansion method, several kinds of explicit solutions to the coupled KdV equations with variable coefficients are obtained, which include three sets of periodic wave_like solutions. These solutions degenerate to solitary wave_like solutions at a certain limit. Some new solutions are presented.

Key words: cn_function method; sn_function method; periodic wave_like solution; solitary wave_like solution; coupled KdV equations with variable coefficient