结构分析中的广义变分原理及其应用*

成 祥 生

（同济大学，1981年5月20日收到）

摘　要

本文将讨论在杆系结构中用待定乘数法建立广义变分原理以分析超静定桁架结构．同时导出一个对称矩阵，并给出这个矩阵的解法，从而求出各杆的内力．

一、引　　言

在结构力学中用待定乘数法去求某一泛函的极值的问题，约始于1964年[1],[2]，钱伟长在1964年[3][4][11]于范围较广阔的弹性理论中曾提出用拉格朗日乘子法以寻求广义变分泛函，以后鹫津久一郎(1968年)[6][8]及卞学璜[7]，薛大为[8]等人对此均有论述，应用范围亦随之扩大．

本文仅讨论从最小余能原理导出线性超静定桁架结构的广义变分原理，并利用矩阵理论将它实际使用于计算超静定桁架结构中．

二、杆系结构力学中的广义变分原理

我们来讨论有$n+m$个杆件的线性超静定桁架结构，今以内力N_j为未知量，我们能写出m个独立的平衡方程

$$Q_i(N_1,N_2,\cdots,N_{n+m})=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.1}$$

相应于系统的余能函数是

$$V=\frac{1}{2}\sum_j f_jN_j^2 \qquad (j=1,2,\cdots,n+m) \tag{2.2}$$

上式中

$$f_j=\frac{l_j}{E_jF_j} \tag{2.3}$$

其中 l_j,E_j,F_j 分别为第 j 个杆件的长度、弹性模量及截面积．于是我们有如下的

第一变分原理（小变形线弹性杆系结构的最小余能原理）：在满足平衡方程(2.1)的所有

* 钱伟长推荐．

容许的内力 N_j 必使余能函数(2.2)为最小[4][11]。换言之，使(2.2)的泛函V为最小的 N_j 必满足平衡方程(2.1)。这是有条件的变分原理，或称条件极值问题[10]。最小余能原理的条件就是(2.1)。

若应用待定乘数法，则可将上述有条件(2.1)的最小余能原理转化为无条件的所谓广义变分原理或称一般极值问题。设 λ_i 为待定乘数（它有m个），于是根据(2.2)推导无条件的广义变分原理的新泛函设为

$$L=\frac{1}{2}\sum_j f_j N_j^2+\sum_i \lambda_i Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m) \tag{2.4}$$

将N_j，λ_i 都当作独立的变量进行变分，则当新泛函 L 达到驻值时，应有

$$\delta L=\left(f_j N_j+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_j}\right)\delta N_j+\sum_i Q_i \delta\lambda_i=0 \tag{2.5}$$

由于 δN_j 及 $\delta\lambda_i$ 都是独立的，所以L的驻值条件就给出了

$$Q_i=0 \tag{2.1}$$

$$f_j N_j+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_j}=0 \tag{2.6}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m)$$

这样就把杆系结构的最小余能原理转换为把求解该结构的基本方程作为新泛函L的驻值条件的原理。由于(2.1)是原先的变分条件（它有m个），现在又增加了(2.6)（有$n+m$个），它等价于变形协调方程[2]。由(2.1)和(2.6)可求出 m 个待定乘数和$n+m$个内力。若将λ_i代入(2.4)就得到无条件的（或完全的）杆系结构的广义变分原理的泛函，于是就建立了

第二变分原理（完全的小变形线弹性杆系结构的广义变分原理——由最小余能原理导出）：满足平衡方程(2.1)的 N_j 的解必使由(2.4)表示的泛函 L 为驻值。

上述两个变分原理都是以内力 N_j 为未知量的。如果我们以杆件的变形为未知量，则也可以建立与上述两个变分原理等同的最小位能原理及无条件的（或完全的）广义变分原理的位能形式。

由广义变分原理所得到的泛函的驻值条件(2.1)、(2.6)可以分析超静定桁架结构。

三、广义变分原理的应用

我们以广义变分原理来分析上述 n 次超静定桁架结构。设该桁架有 $n+m$ 个杆件，而只能写m出个平衡方程(2.1)，它在线性情形下可表示成如下最一般的形式

$$\left.\begin{aligned}
Q_1&=\sum_j a_{1j}N_j-\phi_1(P)=0\\
Q_2&=\sum_j a_{2j}N_j-\phi_2(P)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_i&=\sum_j a_{ij}N_j-\phi_i(P)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_m&=\sum_j a_{mj}N_j-\phi_m(P)=0
\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m) \tag{3.1}$$

其中 a_{ij} 为 N_j 的系数，$\phi_i(P)$ 为外荷载的线性函数。由于未知内力的数目超过方程的数目 n 个，因此问题是 n 次超静定的。

由(3.1)可知

$$\frac{\partial Q_i}{\partial N_j}=a_{ij} \tag{3.2}$$

将(3.2)代入(2.6)并展开如下

$$\left.\begin{aligned} &f_1N_1+\sum_i a_{i1}\lambda_i=0\\ &f_2N_2+\sum_i a_{i2}\lambda_i=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_jN_j+\sum_i a_{ij}\lambda_i=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_{n+m}N_{n+m}+\sum_i a_{i\ n+m}\lambda_i=0 \end{aligned}\right\}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m) \tag{3,3}$$

我们所关心的是从(2.1)、(2.6)展开后的(3.1)、(3.3)中如何解出 N_j，而 λ_i 不须要求出，为了求出N_j，将(3.1)、(3.3)分别写成如下矩阵的形式

$$[A]\{N\}=\{\Phi\} \tag{3.4}$$

$$[F\ \ A^T]\begin{Bmatrix}N\\ \Lambda\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{3.5}$$

其中

$$[A]=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1\ n+m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2\ n+m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{i\ n+m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{m\ n+m} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

是方程组(3.1)的系数矩阵，它有 $m\times(n+m)$阶。

$$\{N\}=[N_1\ N_2\ \cdots\ N_j\ \cdots\ N_{n+m}]^T \tag{3.7}$$

是内力 N_j 的列阵，对应于结构的全部未知内力数。

$$\{\Phi\}=[\Phi_1\ \Phi_2\ \cdots\ \Phi_i\ \cdots\ \Phi_m]^T \tag{3.8}$$

是关于外荷载的列阵，对应于 m 个平衡方程(3.1)的非齐次项。

$$[F]=\begin{bmatrix} f_1 & & & & \\ & f_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & f_j & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & f_{n+m} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

它的元素 f_j 由(2.3)确定，是一个 $n+m$ 阶的对角矩阵。

$[A]^T$为(3.3)中的 λ_i 的系数矩阵，它正好是 $[A]$ 的转置，具有 $(n+m)\times m$ 阶。

$$\begin{Bmatrix}N\\ \Lambda\end{Bmatrix}=[N_1\ N_2\ \cdots\ N_j\ \cdots\ N_{n+m}\ \lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_i\ \cdots\ \lambda_m]^T \tag{3.10}$$

是 N_j 和 λ_i 列矩阵。

由上所述，从待定乘数法建立的杆系结构的广义变分原理去分析超静定桁架结构时，归结为求解方程组(3.4)、(3.5)。今将其合併写成如下形式

$$\begin{bmatrix} F & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N \\ \Lambda \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ \Phi \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

若设

$$[C]=\begin{bmatrix} F & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

它显然是对称的，具有 $n+2m$ 阶的方阵。若能求得其逆$[C]^{-1}$，则(3.11)的解为

$$\begin{Bmatrix} N \\ \Lambda \end{Bmatrix}=[C]^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ \Phi \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

今将$[C]^{-1}$分块，并使其子阵与$[C]$对应的子阵同阶

$$[C]^{-1}=[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

将(3.14)代入(3.13)，并只取(3.13)中有关$\{N\}$的子阵部份，得

$$\{N\}_{(n+m)\times 1}=[D_{12}]_{(n+m)\times m}\{\Phi\}_{m\times 1} \tag{3.15}$$

不难看出$[D_{12}]$与$\{\Phi\}$共形。若求出$[D_{12}]$，则结构内力即可全部求出。下面我们求$[D_{12}]$，由逆阵定义

$$[C][C]^{-1}=[I] \tag{3.16}$$

其中$[I]$为单位矩阵。将(3.12)、(3.14)代入(3.16)并展开它[9]，可求出

$$[D_{12}]=-[F]^{-1}[A]^T[D_{22}] \tag{3.17}$$

其中

$$[D_{22}]=-([A][F]^{-1}[A]^T)^{-1} \tag{3.18}$$

因此欲从(3.17)算出$[D_{12}]$，须要按如下的程序计算各子阵

$$[F]^{-1}\to[F]^{-1}[A]^T\to[A][F]^{-1}[A]^T\to([A][F]^{-1}[A]^T)^{-1}$$
$$\to[D_{22}]\to[F]^{-1}[A]^T[D_{22}]\to[D_{12}] \tag{3.19}$$

求出$[D_{12}]$后，从(3.15)即可确定全部内力。今举数例以说明上述方法的应用。

四、算 例

例1、设一结构受力如图 1(a)所示，各杆E,F,l相同，今求各杆的内力。将四杆截开(图1(b))，取G点之平衡条件按(3.1)可得

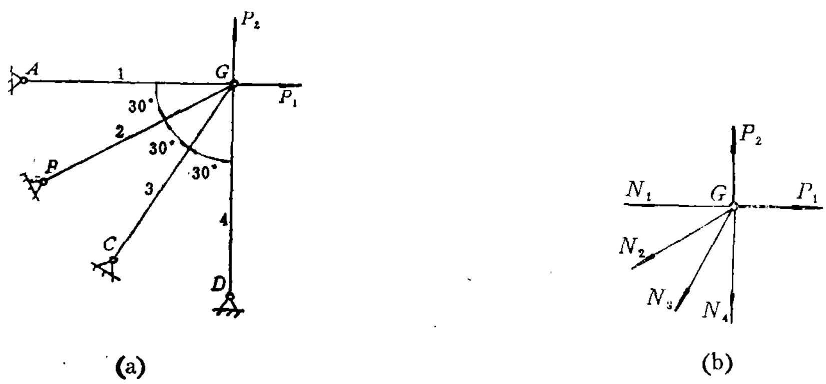

图 1

$$\left.\begin{aligned}&\sum X=Q_1=2N_1+\sqrt{3}N_2+N_3-2P_1=0\\&\sum Y=Q_2=N_2+\sqrt{3}N_3+2N_4-2P_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

按(3.3)可得

$$\left.\begin{aligned}&fN_1+2\lambda_1=0,\ fN_2+\sqrt{3}\lambda_1+\lambda_2=0\\&fN_3+\lambda_1+\sqrt{3}\lambda_2=0,\ fN_4+2\lambda_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

将(4.1)、(4.2)合併，按(3.11)写成如下矩阵形式

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} f & & & & 2 & 0\\ & f & 0 & & \sqrt{3} & 1\\ 0 & & f & & 1 & \sqrt{3}\\ & & & f & 0 & 2\\ \hline 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 2 & & 0\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\\ \hline \lambda_1\\ \lambda_2\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\ \hline 2P_1\\2P_2\end{array}\right\}\tag{4.3}$$

按(3.18)

$$[D_{22}]=-([A][F]^{-1}[A]^T)^{-1}=-\frac{1}{f}\begin{bmatrix}8 & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 8\end{bmatrix}\tag{4.4}$$

按(3.17)

$$[D_{12}]=-[F]^{-1}[A]^T[D_{22}]=\frac{1}{26}\begin{Bmatrix}8 & -2\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 1\\ 1 & 3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 8\end{Bmatrix}\tag{4.5}$$

按(3.15)

$$\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{26}\begin{Bmatrix}8 & -2\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 1\\ 1 & 3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 8\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2P_1\\2P_2\end{Bmatrix}\tag{4.6}$$

即

$$N_1=\frac{1}{13}(8P_1-2\sqrt{3}P_2)$$

$$N_2=\frac{1}{13}(3\sqrt{3}P_1+P_2)$$

$$N_3=\frac{1}{13}(P_1+3\sqrt{3}P_2)$$

$$N_4=\frac{1}{13}(-2\sqrt{3}P_1+8P_2)$$

这样，上述结构的内力已全部求出.

例2、结构受力如图2(a)，各杆E，F相同，求各杆内力.

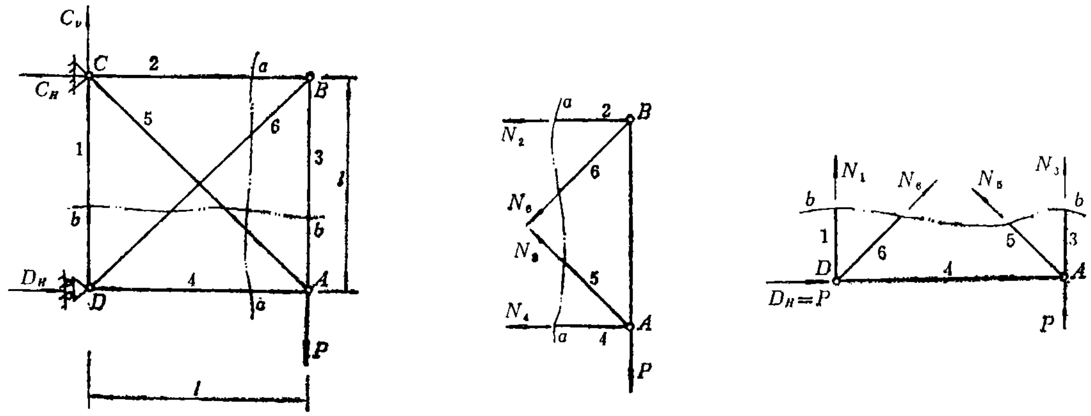

图 2

先取 a–a 右部为分离体（图2(b)），按(3.1)写出平衡方程如下

$$\left.\begin{aligned}&\sum X=Q_1=N_2+N_4+\frac{1}{\sqrt{2}}(N_5+N_6)=0\\&\sum Y=Q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(N_5-N_6)-P=0\\&\sum M_A=Q_3=\left(N_2-\frac{1}{\sqrt{2}}N_6\right)l=0\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

再对 b–b 下部(图2(c))，可写出

$$\sum X=\frac{1}{\sqrt{2}}(N_6-N_5)+P=0$$

上式与(4.7)的第二式等价。

$$\left.\begin{aligned}&\sum Y=Q_4=N_1+N_3+\frac{1}{\sqrt{2}}(N_5+N_6)-P=0\\&\sum M_A=Q_5=\left(N_1+\frac{1}{\sqrt{2}}N_6\right)l=0\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

以上共有五个独立的平衡方程(Q_1～Q_5)。

按(3.3)可得

$$\left.\begin{aligned}&fN_1+\lambda_4+\lambda_5=0\\&fN_2+\lambda_1+\lambda_3=0\\&fN_3+\lambda_4=0\\&fN_4+\lambda_1=0\\&\sqrt{2}fN_5+\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)=0\\&\sqrt{2}fN_6+\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

将(4.1)、(4.2)、(4.3)合併，按（3.11）写成如下矩阵形式

$$
\left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
f & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & f & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & f & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & f & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \sqrt{2}f & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
 & & & & & \sqrt{2}f & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \mathbf{0} & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & &
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{array}\right\}
\tag{4.10}
$$

按(3.18)

$$
[D_{22}]=-([A][F]^{-1}[A]^T)^{-1}
=\begin{bmatrix}
0.8965 & -0.5000 & -1 & -0.1037 & 0 \\
-0.5000 & 2.4142 & 1 & -0.5000 & 1 \\
-1.0000 & 1.0000 & 2 & 0 & 0 \\
-0.1037 & -0.5000 & 0 & 0.8963 & -1 \\
0 & 1.0000 & 0 & -1.0000 & 2
\end{bmatrix}
\tag{4.11}
$$

按(3.17)

$$
[D_{12}]=-[F]^{-1}[A]^T[D_{22}]
=\begin{bmatrix}
-0.1037 & 0.5000 & 0 & -0.1037 & 1 \\
-0.1035 & 0.5000 & 1 & -0.1037 & 0 \\
-0.1037 & -0.5000 & 0 & 0.8963 & -1 \\
0.8965 & -0.5000 & -1 & -0.1037 & 0 \\
0.1464 & 0.7071 & 0 & 0.1463 & 0 \\
0.1464 & -0.7071 & 0 & 0.1463 & 0
\end{bmatrix}
\tag{4.12}
$$

按(3.15)

$$
\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix}
=\begin{bmatrix}
-0.1037 & 0.5000 & 0 & -0.1037 & 1 \\
-0.1035 & 0.5000 & 1 & -0.1037 & 0 \\
-0.1037 & -0.5000 & 0 & 0.8963 & -1 \\
0.8965 & -0.5000 & -1 & -0.1037 & 0 \\
0.1464 & 0.7071 & 0 & 0.1463 & 0 \\
0.1464 & -0.7071 & 0 & 0.1463 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{4.13}
$$

即

$$N_1=0.3963P,\ N_2=0.3963P$$
$$N_3=0.3963P,\ N_4=-0.6037P$$
$$N_5=0.8534P,\ N_6=-0.5608P$$

于是该结构的内力已全部求出.

五、结 语

综上所述及从所举的简单例子可看出：用待定乘数法建立的杆系结构的完全的广义变分原理以分析超静定桁架时，它异于力法、位移法及有限元法，并且总是得到一个对称矩阵，但我们只须求出部份子阵，就可求出结构的全部内力.

参 考 文 献

[1] 成祥生，待定乘数法在解超静定杆系结构问题中的应用，江苏省力学会论文，(1964).

[2] 成祥生，力学与实践，1，1(1979)，46—47.

[3] 钱伟长，《关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用》，(1964).

[4] 钱伟长，力学与实践，1，1(1979)16—24及1，2(1979)18—27.

[5] Washizu, K.,(鹫津久一郎) Variational methods in elasticity and plasticity, Pergaman, London (1968).

[6] 鹫津久一郎《エネルギ 原理入门》，培风館，(1970).

[7] Pian, T. H.(卞学璜), Tong Pin(董平), Finite element methods in continuum mechanics, *Adv. in App. Mec.*, 12, (1972), 1—53.

[8] 薛大为，科学通报，20，4(1975)，81.

[9] Przemieniecki, J. S., Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill Book Com. (1968).

[10] Фихтенгольц Г. М., *Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления*, Т. I, Гостехиздат М.-Л. (1949).

[11] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社.(1980)

The Generalized Variational Principes with their Applications in Structural Analysis

Cheng Xian-sheng

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

This paper will discuss the generalized variational principles which is established by the method of undetermined multipliers in structures and analyses the statically indeterminate truss in which these principles will be used. At the same time we bring a symmetrical matrix and give a specific solution, thus all the internal forces of structures may be found.