应用数学和力学, 第 26 卷 第 1 期(2005 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0099_12

具有快速振荡外力的拟地转运动的平均原理*

高洪俊[1], 段金桥[2]

(1. 南京师范大学 数学系, 南京 210097;
2. 伊州理工学院 应用数学系, 芝加哥 IL 60616, 美国)

(刘曾荣推荐)

摘要: 一类大尺度的地球物理流体流可以用拟地转方程来描述• 有限、但是大时间区间和整个时间轴上在快速振荡外力下的拟地转运动的平均原理被得到了• 其中包括比较估计, 稳定性估计和拟地转运动及其平均运动之间的收敛性• 进一步, 几乎周期拟地转运动的存在性和吸引子的收敛性也被得到了•

关 键 词: 拟地转流体流; 几乎周期运动; 快速振荡外力; 平均原理; 稳定流形和不稳定流形

中图分类号: O175; O231 文献标识码: A

1 引言及问题提出

气候和地球物理流确定了我们生活的环境, 对它们的理解, 除具有极大的科学挑战外, 还具有惊人的经济和社会重要性• 一类大尺度的地球物理流体流, 如墨西哥湾流和海洋环流等都可以用拟地转方程来描述• 拟地转(QG) 方程是通过对旋转 Navier_Stokes 方程在小 Rossby 数渐近展开的近似得到的• 地球物理流经常受到各种时间相关或非自治快速振荡外力的影响• 为了更好地和科学地理解地球及其环境, 人们渴望知道更多关于大尺度地球物理流系统在快速振荡外力的运动的动力学行为•

用流函数 $\psi(x, y, t)$ (如[1]) QG 方程被写成为:

$$\Delta\psi_t + J(\psi, \Delta\psi) + \beta\psi_x = \nu\Delta^2\psi - r\Delta\psi + f(x, y, \eta t), \tag{1}$$

这里 $\beta > 0$ 为 Coriolis 参数, $\nu > 0$ 为粘性耗散常数, $r > 0$ 为 Ekman 耗散常数, Δ 为 Laplacian 算子, $J(h, g) = h_x g_y - h_y g_x$ 为 Jacobian 算子• 进而, $f(x, y, \eta t)$ ($\eta \gg 1$) 为快速振荡风应力外力• 风应力外力与大尺度地球物理流相比通常是小尺度•

用涡度 $\omega(x, y, t) = \Delta\psi(x, y, t)$ 方程(1) 可以被写为

$$\omega_t + J(\psi, \omega) + \beta\psi_x = \nu\Delta\omega - r\omega + f(x, y, \eta t)\bullet \tag{2}$$

* 收稿日期: 2003_04_01; 修订日期: 2004_09_14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10001018); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2001108); 美国国家自然科学基金资助项目(DMS- 9973204, DMS- 0139073)
作者简介: 高洪俊(1966—), 江苏金坛人, 教授、博士(联系人. Tel/Fax: + 86_25_83598129; E_mail: gaohj@njnu.edu.cn).

对于平面上具有正则边界 ∂D 有界区域 D, 对 ψ 和 ω, 我们考虑齐次 Dirichlet 边界条件, 即 Pedlosky 在[2], p. 34 中提出的没有渗透和滑移边界条件:

$$\psi = \omega = 0 \qquad (\text{在}\ \partial D\ \text{上}), \tag{3}$$

且具有适当的初始,

$$\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y) \qquad (\text{在}\ D\ \text{中})\cdot \tag{4}$$

模型(2) 定义了一非自治动力系统• 通常理解非自治动力系统比理解自治动力系统要困难得多• 事实上, 在对 QG 流进行数值模拟时[3], 人们经常用与时间无关的风应力外力, 尽管风应力外力被证实关于时间是快速振荡[4]• 故人们希望在某种平均意义下来了解流体的动力学性质, 然后比较平均后的流与原来未作平均的流之间的动力学差异•

在本文中, 我们假设 QG 流模型中的快速振荡风应力外力具有时间平均, 对它的具体刻画在后面给出•

本文的主要结果是具有快速振荡风应力外力 QG 运动在有限, 但是大时间区间和整个时间轴上的平均原理, 这包括比较估计, 稳定性估计和拟地转运动及其平均运动之间的收敛性 (当 $\eta \to \infty$)• 我们同样研究了在几乎周期外力下的几乎周期拟地转运动的存在性和非自治方程(1) 和平均后的自治方程的吸引子之间当 $\eta \to \infty$ 的收敛性•

在第 2 节, 我们研究 QG 流在有限, 但是大时间区间上的平均原理, 在第 3 节, 我们推广平均原理到整个时间轴• 在本节余下的部分, 我们简要回顾一下一些背景知识和基本结果以备后用•

我们用标准的缩写 $L^2 = L^2(D)$, $H_0^k = H_0^k(D)$, $(k = 1, 2, \cdots)$, 是通用的 Sobolev 空间, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 L^2 中的内积和范数• 我们将用到如下形式的 Poincaré 不等式[5]

$$\|g\|^2 \leqslant \frac{|D|}{\pi}\int_D |\nabla g|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{|D|}{\pi}\|\nabla g\| \qquad (\text{对}\ g \in H_0^1)\cdot \tag{5}$$

我们可以进一步重写一下 QG 流模型(2)• 由

$$\Delta\varphi = \omega, (x, y) \in D, \varphi|_{\partial D} = 0, \tag{6}$$

我们得到 $\varphi = \Delta^{-1}\omega$• 这样(2) 可以被写成

$$\omega_t + J(\Delta^{-1}\omega, \omega) + \beta\partial_x\Delta^{-1}\omega = \nu\Delta\omega - r\omega + f(x, y, \eta t)\cdot \tag{7}$$

记

$$-\mathscr{A} = \nu\Delta - rI - \beta\partial_x\Delta^{-1}\cdot$$

则由[6] 中的结论, 我们知道, $\mathscr{A}$ 具有定义域 $H_0^2(D)$, 是一扇形算子, 因此 $\mathrm{e}^{\mathscr{A}}$ 在 L^2 中生成一解析半群•

我们将给出一充分条件来保证 $\mathscr{A}$ 的最小特征值为正• 为此我们考虑特征方程 $\mathscr{A}u = \lambda u$, 我们有如下能量估计

$$\begin{aligned}
\lambda\|u\|^2 = {}& \nu\|\nabla u\|^2 + r\|u\|^2 - \int_D \Delta^{-1}u\partial_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \\
& \nu\|u\|^2 + r\|u\|^2 - \beta\|\Delta^{-1}u\|\,\|\nabla u\| \geqslant \\
& \nu\|\nabla u\|^2 + r\|u\|^2 - \frac{\beta|D|}{\pi}\|u\|\,\|\nabla u\| \geqslant \\
& \nu\|\nabla u\|^2 + r\|u\|^2 - \frac{\beta|D|}{\pi}(a_1\|u\|^2 + a_2\|\nabla u\|^2) \geqslant \\
& \left(\nu - \frac{\beta|D|}{\pi}a_1\right)\|\nabla u\|^2 + \left(r - \frac{\beta|D|}{\pi}a_1\right)\|u\|^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

这里我们用了 Poincaré 不等式(5), a_1, a_2 为满足 $a_1a_2 = 1/4$ 的任意常数• 因此, 当

$$4\nu r > \frac{\beta^2 |D|^2}{\pi^2}, \tag{9}$$

且如我们取 $a_2 = \beta |D| / (4r\pi)$, 则我们有

$$\lambda \| u \|^2 \geqslant \left(\nu - \frac{\beta^2 |D|^2}{4r\pi^2} \right) \| \nabla u \|^2 \geqslant \left(\nu - \frac{\beta^2 |D|^2}{4r\pi^2} \right) \frac{|D|}{\pi} \| u \|^2. \tag{10}$$

所以, 当 ν, r, β 和 $|D|$ 满足条件(9), 则 $\mathscr{A}$ 的最小特征值为正. 此时, QG 流模型是一耗散系统[6]. 我们注意到条件(9) 比[7] 中相应的条件要精确.

如[6], 我们可以定义 $\mathscr{A}$ 分数次幂如下:

$$\mathscr{A}^{\alpha} = (\mathscr{A}^{-\alpha})^{-1}, \text{这里 } \mathscr{A}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\mathscr{A}t} \mathrm{d}t.$$

相应定义域 $D(\mathscr{A}^{\alpha})$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 是 Banach 空间, 且具有范数

$$\| x \|_{\alpha} := \| x \|_{D(\mathscr{A}^{\alpha})} = \| \mathscr{A}^{\alpha} x \|.$$

我们列出[6, 8] 中的一些定义和结果, 为以后之用.

定理 1.1[6] 对正常数 a, 下列估计成立:

$$\| e^{-\mathscr{A}t} \|_{L^2 \to L^2} \leqslant K e^{-at} \qquad (t \geqslant 0), \tag{11}$$

$$\| \mathscr{A}^{\alpha} e^{-\mathscr{A}t} \|_{L^2 \to L^2} \leqslant \frac{K_{\alpha}}{t^{\alpha}} e^{-at} \qquad (t > 0), \tag{12}$$

这里 K 和 K_{α} 为正常数.

定理 1.2[6] 在 L^2 中给定两个扇形算子 A 和 B, 假使 $D(A) = D(B)$, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, $\mathrm{Re}\,\sigma(B) > 0$, 且设算子 $(A - B)A^{-\alpha}$ $(\alpha \in [0, 1))$ 在 L^2 有界. 则对任意的 $\gamma \in [0, 1)$, $D(A^{\gamma}) = D(B^{\gamma})$, 且它们的范数等价.

定义 1.1 一连续函数 $f: \mathbf{R} \to X$ 被称为几乎周期的(a. p.), 如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一数 $l = l(\varepsilon) > 0$ 使得每个区间 $(T, T + l)$ 包含一点 $\tau = \tau_{\varepsilon}$ (称为几乎周期) 满足不等式

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| f(t + \tau) - f(t) \| \leqslant \varepsilon.$$

由 a. p. 函数的理论, 存在一可数个 λ_{α} 满足

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{i\lambda_{\alpha} t} \mathrm{d}t \neq 0.$$

数 $\{\lambda_{\alpha}\}$ 称为 f 的 Fourier 指数[8].

定义 1.2 一可数的数集合 $\{\omega_{\alpha}\}$ 称为 a. p. 函数 f 的频率基(记为 $\mathscr{M}_f$) 如果每个 λ_{α} 都可以唯一地表示为 ω_{α} 具有整数系数的线性组合.

定义 1.3 对一给定的 a. p. 函数 f, 序列 $\{t_m\}$ 被称为 f_常返(current) 序列如果

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| f(t + t_m) - f(t) \| \leqslant \varepsilon_m \to 0 \qquad (\text{当 } m \to \infty).$$

定理 1.3[8] 给定两个几乎周期函数 f 和 g, 假设每一个 f_常返序列同样是 g_常返序列. 则 g 的频率基包含在 f 频率基中: $\mathscr{M}_g \subset \mathscr{M}_f$.

下面我们转向 QG 流模型的平均原理的讨论.

2 有限区间上的平均原理

在本节, 我们考虑 QG 流模型在有限, 但是大时间区间上的平均原理.

最近关于偏微分方程的平均原理, 我们可以参考[9]. 对 QG 流问题, 我们不能直接用现有的结果, 需要一些精细的讨论.

关于耗散模型(2) ~ (4) 的整体适定性(即光滑解的存在唯一性), 我们可以类似于[10] 至

[13]的讨论来得到. Brannan 等在[14]中考虑了QG模型在随机外力影响下的动力学. Duan 等在[7]和[15]中得到了QG模型在时间周期和几乎时间周期外力下的时间周期和几乎时间周期的解的存在性.

为方便起见,我们令

$$\tau = \eta t,\quad \varepsilon = \eta^{-1}.$$

则 $t = \varepsilon\tau$. 我们得到如下形式的QG方程

$$\omega_\tau + \varepsilon\mathscr{A}\omega + \varepsilon J(\Delta^{-1}\omega, \omega) = \varepsilon f(x, y, \tau). \tag{13}$$

我们假设 f 在 $D(\mathscr{A}^\gamma)$ 具有平均; γ 的值将在后面给出. 更精确地,设 $f(x, y, \tau)$ 和 $f_0(x, y)$ 在 $\mathscr{A}^\gamma$ 中,并满足

$$\left\| \mathscr{A}^\gamma\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(x, y, \tau)\,d\tau - f_0(x, y)\right) \right\| \leqslant \min(M_\gamma, \sigma_\gamma(T)), \tag{14}$$

这里 $M_\gamma > 0$, $\sigma_\gamma(T) \to 0$, 当 $T \to \infty$. 有时我们将 $f(x, y, \tau)$ 简记为 $f(\tau)$.

我们考虑平均后的方程如下

$$\omega_\tau + \varepsilon\mathscr{A}\omega + \varepsilon J(\Delta^{-1}\omega, \omega) = \varepsilon f_0(x, y). \tag{15}$$

由[16]~[18]的方法和结果,我们得到相应方程(15)的半群 S_t 在空间 $H = L^2$, $V = D(\mathscr{A}^{1/2}) = H_0^1$ 和 $D(\mathscr{A})$ 具有吸收集, $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{D(\mathscr{A})}$ 表示 V 和 $D(\mathscr{A})$ 中的范数. 这些集合为在这些空间中的球 $B(R_0)$, 这里 R_0 足够大. 这意味着对这些空间中任意有界集 B 有

$$S_tB \subset B(R_0) \qquad (\text{对 } t > t_0(B, R_0)).$$

另外,半群 S_t 在这些空间中是一致有界的,即对于任意给定的球,特别地取球 $B(R_0)$, 存在一球 $B(R)$ 使得

$$S_tB(R_0) \subset B(R) \qquad (\text{对 } t > 0).$$

通过增大 R 我们可以假设

$$S_tB(R_0) \subset B(R - \rho), \qquad (\text{对 } t > 0,\ \rho > 0),$$

这里 ρ 是一正常数. 我们在空间中 V 中的平均原理. 给定 $\omega_0 \in B_V(R_0)$, 我们比较(13)和(15)从 ω_0 开始的解轨道 $\omega(\tau)$, $\omega(\tau)$. 在 $\tau \in [0, T/\varepsilon]$ (T 任意但固定)中考虑它们的差我们现假设 $\omega(\tau) \in B_V(R)$. 则差 $z(\tau) = \omega(\tau) - \omega(\tau)$ 满足方程

$$\partial z + \varepsilon\mathscr{A} + \varepsilon[J(\Delta^{-1}\omega, \omega) - J(\Delta^{-1}\omega, \omega)] = \varepsilon(f(\tau) - f_0(\tau)). \tag{16}$$

我们首先给出非线性项估计的一个引理.

引理 2.1 非线性算子 $J(u, v)$ 在下列意义下是有界 Lipschitz 映射:

$$\begin{aligned}\|J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2)\| \leqslant{}& \\ & C_{1/2}(\|u_1\|_{1/2} + \|u_2\|_{1/2} + \|v_1\|_{1/2} + \|v_2\|_{1/2}) \times \\ & (\|u_1 - v_1\|_{1/2} + \|u_2 - v_2\|_{1/2}),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\|J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2)\|_{1/2} \leqslant{}& \\ & C_0(\|u_1\|_{D(\mathscr{A})} + \|u_2\|_{D(\mathscr{A})} + \|v_1\|_{D(\mathscr{A})} + \|v_2\|_{D(\mathscr{A})}) \times \\ & (\|u_1 - v_1\|_{D(\mathscr{A})} + \|u_2 - v_2\|_{D(\mathscr{A})}),\end{aligned} \tag{18}$$

这里 $C_{1/2}$ 和 C_0 为正常数.

证明 由于

$$\begin{aligned}J(u_1, u_2) - J(v_1, v_2) ={}& \\ & (u_{1x} - v_{1x})u_{2y} + (u_{1y} - v_{1y})v_{1x} - (u_{2x} - v_{2x})u_{1y} - (u_{2y} - v_{2y})v_{2x},\end{aligned} \tag{19}$$

(17)和(18)通过直接估计可以得到. 这里我们用到了范数 $\|\cdot\|_{H^2}$ 和 $\|\cdot\|_{D(\mathscr{A})}$ 等价性. ■

现在我们回到方程(16),它等价如下一积分方程

$$z(\tau) = \varepsilon\int_0^\tau e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}[J(\Delta^{-1}\omega, \omega) - J(\Delta^{-1}\omega, \omega)]ds + \varepsilon\int_0^\tau e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}(f(s)-f_0)ds. \tag{20}$$

利用(12)和(17),上式右边的第1项的 $D(\mathscr{A}^{1/2})$ 范数满足不等式

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\int_0^\tau \mathscr{A}^{1/2}e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}[J(\Delta^{-1}\omega, \omega) - J(\Delta^{-1}\omega, \omega)]ds\| &\leqslant \\ \varepsilon\int_0^\tau K_{1/2}\varepsilon^{-1/2}(\tau-s)^{-1/2}e^{-\varepsilon a(\tau-s)}2R\|z(s)\|_{1/2}ds &= \\ 2RK_{1/2}\varepsilon^{1/2}\int_0^\tau(\tau-s)^{-1/2}e^{-\varepsilon a(\tau-s)}\|z(s)\|_{1/2}ds.\end{aligned} \tag{21}$$

下面我们估计(20)中右边的第2项. 分部积分后得

$$\begin{aligned}&\left\|\varepsilon\int_0^\tau e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}(f(s)-f_0)ds\right\|_{1/2} = \\ &\left\|-\varepsilon e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}\int_0^\tau(f(s)-f_0)dt\Big|_0^\tau + \varepsilon^2\int_0^\tau \mathscr{A}e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}\int_0^\tau(f(s)-f_0)ds\right\|_{1/2} \leqslant \\ &\left\|\varepsilon\mathscr{A}^{1/2-\gamma}e^{-\varepsilon\mathscr{A}\tau}\mathscr{A}^\gamma\int_0^\tau(f(s)-f_0)dt\right\| + \\ &\left\|\varepsilon^2\int_0^\tau\mathscr{A}^{3/2-\gamma}e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}\mathscr{A}^\gamma\int_0^\tau(f(s)-f_0)ds\right\|.\end{aligned} \tag{22}$$

利用(12)和(14),我们进一步有

$$\begin{aligned}&\left\|\varepsilon\mathscr{A}^{1/2-\gamma}e^{-\varepsilon\mathscr{A}\tau}\mathscr{A}^\gamma\int_0^\tau(f(s)-f_0)dt\right\| \leqslant \\ &\varepsilon K_{1/2-\gamma}e^{-\varepsilon a\tau}(\varepsilon\tau)^{\gamma-1/2}\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\mathscr{A}^\gamma(f(t)-f_0)dt\right\| = \\ &(\varepsilon\tau)^{1/2+\gamma}K_{1/2-\gamma}e^{-\varepsilon a\tau}\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\mathscr{A}^\gamma(f(t)-f_0)dt\right\| \leqslant \\ &(\varepsilon\tau)^{1/2+\gamma}K_{1/2-\gamma}\min(M_\gamma, \sigma_\gamma(\tau))e^{-\varepsilon a\tau} := L(\tau).\end{aligned} \tag{23}$$

对任意的 $\delta > 0$,让 τ_δ 充分大使得 $\tau \geqslant \tau_\delta$, $\sigma_\gamma \leqslant \delta$. 设 ε_0 充分小使得 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 则不等式 $T/\varepsilon > \tau_\delta$ 成立. 则我们有

$$L(\tau) \leqslant G_{\gamma 1}(T, \varepsilon) := e^{-\varepsilon a\tau}\begin{cases} T^{1/2+\gamma}K_{1/2-\gamma}\delta & (\text{如果 } \tau \geqslant \tau_\delta), \\ (\varepsilon\tau)^{1/2+\gamma}K_{1/2-\gamma}M_\gamma & (\text{如果 } \tau < \tau_\delta). \end{cases}$$

设 $\gamma > -1/2$. 由于 τ_δ 与 ε 无关,我们让 $\delta \to 0$, 然后让 $\varepsilon \to 0$. 我们得到

$$\left\|\varepsilon e^{-\varepsilon\mathscr{A}\tau}\int_0^\tau(f(t)-f_0)dt\right\|_{1/2} \leqslant G_{\gamma 1}(T, \varepsilon) \to 0 \qquad (\text{当 } \varepsilon \to 0). \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\varepsilon^2\int_0^\tau\mathscr{A}^{3/2-\gamma}e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}\mathscr{A}^\gamma\int_0^\tau(f(s)-f_0)ds\right\| \leqslant \\ &K_{3/2-\gamma}\varepsilon^{1/2+\gamma}\int_0^\tau\min(M_\gamma, \sigma_\gamma(u))u^{\gamma-1/2}du \leqslant \\ &K_{3/2-\gamma}M_\gamma\varepsilon^{1/2+\gamma}\int_0^{\tau_\mu}u^{\gamma-1/2}du + K_{3/2-\gamma}\varepsilon^{1/2+\gamma}\mu\int_0^{T/\varepsilon}u^{\gamma-1/2}du = \\ &K_{3/2-\gamma}\left(\gamma+1/2\right)^{-1}((\varepsilon\tau_\mu)^{1/2+\gamma} + \mu T^{1/2+\gamma}) =: G_{\gamma 2}(T, \varepsilon),\end{aligned} \tag{25}$$

这里对任意的 $\mu > 0$ 我们选取 τ_μ 充分大使得 $\sigma_\gamma(\tau) < \mu$ 当 $\tau > \tau_\mu$. 让 $\mu \to 0$, 然后让 $\varepsilon \to 0$

我们得到

$$G_{\gamma 2}(T,\varepsilon)\to 0\qquad(\varepsilon\to 0)\cdot$$

这样,由(20)~(25)我们得到下列不等式:

$$\|z(\tau)\|_{1/2}\leqslant K\varepsilon^{1/2}\int_0^{\tau}(\tau-s)^{-1/2}\|z(s)\|_{1/2}\mathrm{d}s+G_{\gamma}(T,\varepsilon),\tag{26}$$

这里 $K=2RK_{1/2}$, $G_{\gamma}=G_{\gamma 1}+G_{\gamma 2}\to 0\ (\varepsilon\to 0)$•

为了估计(26)我们需要下列事实•

引理 2.2[6] 设 $\gamma\in(0,1]$ 且对 $t\in[0,T]$ 有

$$u(t)\leqslant a+b\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}u(s)\mathrm{d}s\cdot$$

则

$$u(t)\leqslant aE_{\gamma}(b\Gamma(\gamma)^{1/\gamma}t),$$

这里函数 $E_{\gamma}(z)$ 是单调增加的且 $E_{\gamma}(z)\sim\gamma^{-1}e^{z}$(当 $z\to\infty$)•

在 $\tau\in[0,T/\varepsilon]$ 上对不等式(26)应用这个引理得到

$$\|z(t)\|_{1/2}\leqslant G_{\gamma}(T,\varepsilon)E_{1/2}(\varepsilon\tau\pi K^2)\leqslant G_{\gamma}(T,\varepsilon)E_{1/2}(T\pi K^2):=\eta_T^1(\varepsilon)\cdot\tag{27}$$

利用(12)和(18),假设在(14)中 $\gamma>0$,我们在 $D(\mathscr{A})$ 可以得到类似的估计

$$\|z(t)\|_{D(\mathscr{A})}\leqslant F_{\gamma}(T,\varepsilon)E_{1/2}(\varepsilon\tau\pi K^2):=\eta_T^2(\varepsilon),\tag{28}$$

这里 $F_{\gamma}(T,\varepsilon)\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$, $F_{\gamma}(T,\varepsilon)$ 是一个与 $G_{\gamma}(T,\varepsilon)$ 类似的函数• 当(13)和(15)具有同样的初始值 $\omega(0)\in B_{V,D(\mathscr{A})}(R_0)$ 时,我们就得到了解轨道 $\omega(t)$ 和 $\omega(t)$ 在 V 和 $D(\mathscr{A})$ 中的逼近估计,同时我们知道(13)和(15)具有同样的初始值 $\omega(0)\in B_{V,D(\mathscr{A})}(R_0)$ 时,我们就得到了解轨道 $\omega(t)$ 和 $\omega(t)$ 在区间 $[0,T/\varepsilon]$ 中在球 $B(R)$ 中• 这是因为,设 ε 充分小使得(27)和(28)小于 $\rho/2$,这里 ρ 已在本节讨论吸收集的时候定义了• 假设 $\omega(t)$ 在 $[0,T/\varepsilon]$ 上离开了球 $B(R)$,记 τ^* 为满足 $\|\omega(\tau^*)\|=R$ 的第一时刻• 然而,在 $\tau\in[0,\tau^*]$ 上两个轨道均在球 $B(R)$ 中而且我们已经证明不等式 $\|\omega(\tau)-\omega(\tau)\|\leqslant\rho/2$ 成立• 特别地 $\tau=\tau^*$ 时也成立• 和不等式 $\|\omega(\tau^*)\|\leqslant R-\rho$ 结合,我们得到

$$\|\omega(\tau^*)\|\leqslant\|\omega(\tau^*)-\omega(\tau^*)\|+\|\omega(\tau^*)\|\leqslant R-\frac{\rho}{2},$$

得到矛盾•

因此,我们得到这一节的主要结果•

定理 2.3 设方程(13)的右边的外力(14)的意义下具有平均, $T>0$ 为任意固定的• 如果 $\gamma>-1/2$ 和 $\omega(0)=\omega(0)\in B_V(R_0)$,即,取同样的初值且属于吸收集 $B(R_0)$,则对 $\tau\in[0,T/\varepsilon]$,有

$$\|\omega(\tau)-\omega(\tau)\|_{1/2}\leqslant\eta_T^1(\varepsilon)\to 0\qquad(\text{当 }\varepsilon\to 0)\cdot$$

如果 $\gamma>0$,和 $\omega(0)=\omega(0)\in B_{D(\mathscr{A})}(R_0)$,则对 $\tau\in[0,T/\varepsilon]$,有

$$\|\omega(\tau)-\omega(\tau)\|_{D(\mathscr{A})}\leqslant\eta_T^2(\varepsilon)\to 0\qquad(\text{当 }\varepsilon\to 0),$$

这里 $\eta_T^1(\varepsilon)$ 和 $\eta_T^2(\varepsilon)$ 分别在(27),(28)定义了•

这个定理给出了当 $\eta\to 0$ 时,DQ 流和平均 QG 流在有限但很大的时间区间上的比较估计和收敛性结果•

3 整个时间轴上的平均原理

现在我们转向在整个时间轴上 QG 流的平均原理. 我们同样研究变换的 QG 方程

$$\omega_\tau + \varepsilon\mathscr{A}\omega + \varepsilon J(\Delta^{-1}\omega, \omega) = \varepsilon f(x, y, \tau). \tag{29}$$

关于数据的所有假设与第 2 节中一样; 特别地, 平均 $f_0(x, y)$ 在(14) 意义下存在.

我们首先考虑稳态的平均 QG 流:

$$\mathscr{A}\omega_0 + J(\Delta^{-1}\omega_0, \omega_0) = f_0. \tag{30}$$

特别需要注意的是 $f_0(x, y)$ 与时间无关.

在条件(9) 之下和利用 Leray_Schauder 不动点定理、椭圆正则性理论[5], 我们知道稳态的平均 QG 流(30) 具有唯一解. 注意这里这个唯一稳态解记为 $\omega_0(x, y)$, 不要与 QG 流模型的初始数据混淆.

在(29) 中作变量替换如下:

$$\omega = \omega_0 + z.$$

则由(30), 我们发现 z 满足方程

$$\partial_\tau z = \varepsilon(-\mathscr{A}z - J(\Delta^{-1}\omega, \omega) + J(\Delta^{-1}\omega_0, \omega_0) + f(\tau) - f_0).$$

由于

$$J(\Delta^{-1}\omega, \omega)) - J(\Delta^{-1}\omega_0, \omega_0) = J(\Delta^{-1}\omega, z) + J(\Delta^{-1}z, \omega_0),$$

我们有

$$\partial_\tau z = \varepsilon(-\mathscr{A}z - J(\Delta^{-1}\omega, z) - J(\Delta^{-1}z, \omega_0) + f(\tau) - f_0).$$

再作变量替换(从 z 到 h),

$$z = h - \varepsilon v(\tau, \varepsilon),$$

我们得到

$$\partial_\tau z = \partial_t h - \varepsilon\partial_\tau v = \varepsilon(-\mathscr{A}h + \varepsilon\mathscr{A}v - J(\Delta^{-1}\omega, h) - J(\Delta^{-1}h, \omega_0) +$$
$$(\varepsilon J(\Delta^{-1}\omega, v) + \varepsilon J(\Delta^{-1}v, \omega_0) + f - f_0).$$

我们选择辅助函数 $v(\tau, \varepsilon)$ 满足如下方程

$$\partial_\tau v = -\varepsilon\mathscr{A}v + f_0 - f. \tag{31}$$

则我们得到关于新变量 h 满足如下方程:

$$\partial_\tau h = -\varepsilon(\mathscr{A}h - J(\Delta^{-1}\omega_0, h) - J(\Delta^{-1}h, \omega_0)) +$$
$$\varepsilon(-J(\Delta^{-1}h, h) + J(\varepsilon v, h) + \varepsilon J(\Delta^{-1}(\omega_0 - \varepsilon v), v) + \varepsilon J(\Delta^{-1}h, v) +$$
$$\varepsilon J(\Delta^{-1}v, \omega_0)). \tag{32}$$

为本节余下讨论的需要, 我们研究新变量 h 的方程(32). 现在, 我们首先考虑关于辅助函数 $v(\tau, \varepsilon)$ 的方程(31).

引理 3.1 假设 f 在(14) 意义下具有一平均. 如果 $\alpha - \gamma < 1$, 则方程(31) 具有唯一解 $v(\tau, \varepsilon)$ 在 $D(\mathscr{A})$ 中关于 $\tau \in \mathbf{R}$ 一致有界. 进而,

$$\|\varepsilon v(T, \varepsilon)\|_\alpha \to 0 \qquad (当\ \varepsilon \to 0). \tag{33}$$

如果 $f \in D(\mathscr{A}^\gamma)$ 是几乎周期, 则 $v \in D(\mathscr{A}^\gamma)$ 是几乎周期的, 且它的频率基包含在 f 的频率基中.

证明 $v(\tau, \varepsilon)$ 由下面的公式给出

$$v(\tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau - s)}(f_0 - f)\,ds. \tag{34}$$

更一般情形的唯一性在下面的引理 3.2 中给出. 现在我们证明(33). 分部积分, 然后利用(14)和(12)我们得到

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon v(\tau,\varepsilon)\|_\alpha &= \left\|\varepsilon\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varepsilon\mathscr{A}(\tau-s)}(f_0-f)\,ds\right\|_\alpha = \\
&\left\|\int_0^\infty e^{-\varepsilon\mathscr{A}s}(f_0-f(\tau-s))\,ds\right\|_\alpha = \\
&\left\|\varepsilon^2\int_0^\infty \mathscr{A}e^{-\varepsilon\mathscr{A}s}\int_0^s(f_0-f(\tau-t))\,dt\,ds\right\| = \\
&\left\|\varepsilon^2\int_0^\infty \mathscr{A}^{1+\alpha-\gamma}e^{-\varepsilon\mathscr{A}s}s(s^{-1}\mathscr{A}^\gamma\int_0^s(f_0-f(\tau-t))\,dt)\,ds\right\| \leqslant \\
&\varepsilon^{1+\alpha-\gamma}K_{1+\alpha-\gamma}\int_0^\infty s^{\gamma-\alpha}e^{-\varepsilon as}\min(M_\gamma,\sigma(s))\,ds \leqslant \\
&K_{1+\alpha-\gamma}(\varepsilon^{1+\alpha-\gamma}M_\gamma(1+\alpha-\gamma)^{-1}s_0^{\gamma-\alpha+1}+\delta a^{1+\alpha-\gamma}\Gamma(1+\alpha-\gamma)),
\end{aligned}$$

这里 δ 是充分小, $s_0 = s_0(\delta)$ 当 $s > s_0$ 充分大使得 $\sigma(s) < \delta$. 让 $\delta\to 0$ 然后让 $\varepsilon\to 0$, 我们得到(33).

最后, 我们来证明引理 3.1 中的最后一个结论. 有定理 1.3, 只要证明每一个 f_常返序列 $\{\tau_m\}$ 同样是 v_的常返序列. 由(34),

$$v(\tau+\tau_m)-v(\tau) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon\mathscr{A}s}(f(\tau-s)-f(\tau+\tau_m-s))\,ds.$$

因此

$$\sup_{\tau\in\mathbf{R}}\|v(\tau+\tau_m)-v(\tau)\|_\alpha \leqslant \sup_{\tau\in\mathbf{R}}\|f(\tau+\tau_m)-f(\tau)\|_\gamma K_{\alpha-\gamma}\Gamma(\gamma-\alpha+1)(\varepsilon a)^{\alpha-\gamma}.$$

这样 $\{\tau_m\}$ 确实是 v_常返序列. 引理 3.1 证毕. ■

现在对新变量 h 我们转向研究方程(32). 我们考虑算子

$$\mathscr{L}h = \mathscr{A}h - J(\Delta^{-1}h,\omega_0) - J(\Delta^{-1}\omega_0,h). \tag{35}$$

算子 $\mathscr{L}+\lambda I$ 在 $H = L^2$ 当 $\lambda > \lambda_0 = \pi(2\lambda_1^3|D|)^{-1}\|f_0\|^2$ 具有紧的逆, 这里 $\lambda_1 \overset{\Delta}{=} \nu - \gamma^2|D|^2/(4r\pi^2)$. 事实上, 我们考虑方程

$$\mathscr{A}h - J(\Delta^{-1}\omega_0) - J(\Delta^{-1}\omega_0,h) + \lambda h = f.$$

上式在 L^2 中与 h 作内积且注意到 $(J(\Delta^{-1}h,\omega_0,h),h) = 0$, 我们得到

$$(\mathscr{A}h,h) - (J(\Delta^{-1}h,\omega_0),h) + \lambda\|h\|^2 = (f,h).$$

利用 $H^2\to L^\infty$, 我们发现

$$\begin{aligned}
-(J(\Delta^{-1}h,\omega_0),h) &\leqslant \|\nabla h\|\,\|\nabla\omega_0\|_{1/2}\|h\| \leqslant \\
&\frac{\lambda_1}{2}\|\nabla h\|^2 + \frac{1}{2\lambda_1}\|h\|^2\|\nabla\omega_0\|^2.
\end{aligned}$$

有(5)和(30)我们有

$$(\mathscr{A}h,h) \geqslant \lambda_1\|\nabla h\|^2,\quad \|\nabla\omega_0\|^2 \leqslant \frac{\pi}{\lambda_1^2|D|}\|f_0\|^2.$$

对 $\lambda \geqslant \lambda_0$, $((\mathscr{L}+\lambda)h,h)$ 是强制的且由 Lax_Milgram 引理得到方程

$$((\mathscr{L}+\lambda)h,h) = f$$

有唯一解 $h\in D(\mathscr{A}^{1/2})$. 注意到嵌入 $D(\mathscr{A}^{1/2})\to L^2$ 是紧的. 因此 $\mathscr{L}$ 具有紧豫解式. 利用(9), 我们可以估计 $J(\Delta^{-1}h,\omega_0)$ 如下.

$$|J(\Delta^{-1}h, \omega_0) + J(\Delta^{-1}\omega_0, h)| \leqslant \|h\| \|\nabla\omega_0\| + \|\omega_0\| \|\nabla h\|.$$

算子 $\mathscr{A}$ 是扇形的, 由于上述的估计, 我们看到算子 $\mathscr{L}$ 同样是扇形的(见[6]). 进一步, 如果 $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0$, 则算子 $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda I$ 是可逆的; 因此

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\mathscr{L}_{\lambda_0}) > 0.$$

我们同样注意到

$$(\mathscr{L}_{\lambda_0} - \mathscr{A})\mathscr{A}^{-\alpha} = \lambda_0\mathscr{A}^{-\alpha} - J(\mathscr{A}^{-\alpha}\Delta^{-1}\cdot, \omega_0) - J(\Delta^{-1}\omega_0, \mathscr{A}^{-\alpha}\cdot).$$

如果 $\alpha > 0$, 则算子 $\mathscr{L}_{\lambda_0}$ 从 $L^2 \to L^2$ 是有界(利用(9)). $D(\mathscr{A}) = D(\mathscr{L}_{\lambda_0})$ 可以由二阶椭圆问题的正则性得到的[5]. 现有定理 1.2 得到 $D(\mathscr{A}^\alpha) = D(\mathscr{L}^\alpha_{\lambda_0})$, $\alpha \in [0, 1]$, 即

$$c_{1\alpha}\|\mathscr{L}^\alpha_{\lambda_0}\| \leqslant \|\mathscr{A}^\alpha\| \leqslant c_{2\alpha}\|\mathscr{L}^\alpha_{\lambda_0}\|, \ \forall h \in D(\mathscr{A}^\alpha). \tag{36}$$

这样我们证明了 $\mathscr{L}$ 具有离散谱. 设 ω_0 为使得 $\mathrm{Re}(\mathscr{L}) \neq 0$ 的稳态解(这依赖于 f_0 的选取). 换言之, 我们假设

$$\sigma(\mathscr{L}) = \sigma_+(\mathscr{L}) \cup \sigma_-(\mathscr{L}), \ \sigma_+(\mathscr{L}) \cap \sigma_-(\mathscr{L}) = \varnothing$$

和

$$\mathrm{Re}\,\sigma_+(\mathscr{L}) < -a, \mathrm{Re}\,\sigma_-(\mathscr{L}) > a, \ a > 0.$$

我们观察到 $\sigma_+(\mathscr{L})$ 是有限特征值的集合. 符号+ 表示不稳定模态, 符号− 表示稳定模态.

设 γ_+ 为包含 $\sigma_+(\mathscr{L})$ 在左半平面的积分曲线. 我们令

$$P_+ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}\mathrm{d}\lambda, \ P_- = I - P_+.$$

算子 $\mathscr{L}$ 可以被分解

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_+ + \mathscr{L}_-, \ \mathscr{L}_+ = P_+\mathscr{L}, \ \mathscr{L}_- = P_-\mathscr{L},$$

这里 $P_+\mathscr{L} \subset \mathscr{L}P_+$, $P_-\mathscr{L} \subset \mathscr{L}P_-$.

设 $H_+ = P_+H$, $\dim H_+ = N < \infty$ 和 $H_- = P_-H$, 我们看到

$$\mathscr{L}_+H_+ \subset H_+, \ \mathscr{L}_-H_- \subset H_-.$$

算子 $\mathscr{L}_+ \in \mathscr{L}(H_+)$(空间 H_+ 上的线性有界算子), $-\mathscr{L}_-$ 在 H_- 生成一解析半群. 注意到 P_+ 和 P_- 与 $\mathscr{L}$ 和由 $-\mathscr{L}$ 生成的解析半群 $T(t)$ 可交换, 即 $P_+\mathscr{L} \subset \mathscr{L}P_+$, $P_-\mathscr{L} \subset \mathscr{L}P_-$, $P_+T(t) = T(t)P_+$ 和 $P_-T(t) = T(t)P_-$ 对 $t \geqslant 0$ (见[19]).

对 $t \in \mathbf{R}$ 我们考虑如下方程:

$$\partial_t h + \mathscr{L}h = f(t). \tag{37}$$

引理 3.2[9] 设 $f(t) \in L_\infty(\mathbf{R}; D(\mathscr{L}^\gamma))$, $\gamma \geqslant 0$. 如果 $\alpha - \gamma < 1$, 则方程(37) 具有唯一有界解 $h \in D(\mathscr{L}^\alpha)$:

$$\|h\|_{C_b(\mathbf{R}; D(\mathscr{L}^\alpha))} \leqslant K(\alpha, \gamma)\|f\|_{L_\infty(\mathbf{R}; D(\mathscr{L}^\gamma))}. \tag{38}$$

我们继续研究方程(32). 设 $F(h, \varepsilon, \tau) = -J(\Delta^{-1}h, h) + J(\varepsilon v, h) + \varepsilon J(\Delta^{-1}(\omega_0 - \varepsilon v), v) + \varepsilon J(\Delta^{-1}h, v) + \varepsilon J(\Delta^{-1}v, \omega_0)$, 则对 $h_i \in D(\mathscr{L}^{1/2})$ 且假设 $\|h_i\|_{1/2} \leqslant \rho (i = 1, 2)$, 我们有

$$\|F(h_1, \varepsilon, \tau) - F(h_2, \varepsilon, \tau)\| \leqslant N_{1/2}(\varepsilon, \rho)\|h_1 - h_2\|_{1/2}, \tag{39}$$

$$\|F(0, \varepsilon, \tau)\| \leqslant N_{1/2}(\varepsilon), \tag{40}$$

这里 $N_{1/2}(\varepsilon, \rho), N_{1/2}(\varepsilon) \to 0$ 当 $\varepsilon, \rho \to 0$.

(39) 和(40) 的证明可以用引理 2.1 和引理 3.1 来得到. 进而, 如果 $h_i \in D(\mathscr{A})(i = 1, 2)$. 利用引理2.1和引理3.1, 我们可以证明 $F: D(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{A}^{1/2})$ 是一有界 Lipschitz 映射(利用定理1.2).

将方程(32)换成时间变量 $t = \varepsilon\tau$, 我们得到

$$\partial_t h + \mathscr{L} h = Q(h, \varepsilon, \tau), \tag{41}$$

这里 $Q(h, \varepsilon, t) = F(h, \varepsilon, t/\varepsilon)$. 显然, $Q(h, \varepsilon, t)$ 满足(39)和(40).

引理 3.3 假设 Q 满足(39)和(40). 则如果 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 对 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小, (41)具有唯一的有界解 h^* 满足:

1) $\| h^* \|_{C_b(\mathbf{R}; D(\mathscr{A}^{1/2}))} \leqslant \delta(\varepsilon) \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$.

2) 在 $D(\mathscr{A}^{1/2})$ 中存在初始流形 $\mathscr{M}_-$, $\operatorname{codim}\mathscr{M}_- = N$, 使得如果 $h_0 \in \mathscr{M}_-$ 和 $\| h_0 \|_{1/2} \leqslant \rho$ 对 ρ 充分小, 则(41)具有 $h(0) = h_0$ 的解 $h(t)$ 满足下列估计

$$\| h(t) - h^*(t) \|_{1/2} \leqslant K e^{-a|t|} \| h_0 - h^*(0) \|_{1/2} \quad (a > 0, \text{当 } t \to \infty). \tag{42}$$

尤其是, 如果 $N = 0$, 则解 h^* 渐进稳定. 在 $D(\mathscr{A}^{1/2})$ 中存在初始流形 $\mathscr{M}_+$, $\dim\mathscr{M}_+ = N$, 使得(42)当 $t \to -\infty$ 时成立.

3) 如果函数 $Q(h, \varepsilon, \cdot): \mathbf{R} \to D(\mathscr{A}^{1/2})$ 是几乎周期的, 则解也是几乎周期的且它的频率谱含在 Q 的中.

这个引理是[9]中的特殊情形. 它的证明是基于压缩映照原理, 稳定性讨论, 引理 3.2 和定理 1.3. 我们现在有如下本节的主要结果.

定理 3.4 设 QG 流模型(13)右边的外力 f 在(14)的意义下(关于时间 $t \in \mathbf{R}$ 一致)有平均. 假设(35)中的线性算子 $\mathscr{L}$ 的谱与虚轴不相交. 则对 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 充分小有:

1) 在稳态平均QG 流 ω_0 的小的领域内, QG 流模型(13)具有唯一解 $\omega^*(\tau)$, 在整个时间轴上有界且满足:

$$\| \omega^*(\tau) - \omega_0 \|_{1/2} \leqslant \delta(\varepsilon) \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0),$$

这里 $\delta(\varepsilon)$ 见引理 3.3.

2) 在球 $B_V(\rho) \in H_-$ 中(ρ 充分小)且 $\omega(0) \in B_V(\rho)$, 则存在一稳定流形 $\mathscr{M}_- \subset D(\mathscr{A}^{1/2})$, $\operatorname{codim}\mathscr{M}_- = N$, 使得如果初始条件 $\omega(0) \in \mathscr{M}_-$, 则当 $t \to \infty$

$$\| \omega(t) - \omega^*(t) \|_{1/2} \leqslant c e^{-a|t|} \| \omega(0) - \omega^*(0) \|_{1/2}. \tag{43}$$

同样存在一不稳定流形 $\mathscr{M}_+ \subset \Gamma D(\mathscr{A}^{1/2})$, $\dim\mathscr{M}_+ = N$, 使得如果初始条件 $\omega(0) \in \mathscr{M}_+$, 则不等式(43)当 $t \to -\infty$ 成立. 特别地, 如果 $N = 0$, 则非稳态QG 流 ω^* 是渐进稳定的.

3) 如果外力 $f \in D(\mathscr{A}^{\gamma})$, $\gamma > -1/2$ 是几乎周期的, 则 $\omega^*(\tau) \in D(\mathscr{A}^{1/2})$ 也是几乎周期的且它的频率谱含在 f 的中.

证明 这个定理的结论可以由下面的表达式

$$\omega = \omega_0 + h(\tau, \varepsilon) - \varepsilon v(\tau, \varepsilon)$$

和引理 3.1, 3.3 得到. ■

这个定理给出了整个时间轴上稳态平均QG 流 ω_0 的稳定性估计; 非稳态QG 流 ω^* 渐进稳定性; 非稳态QG 流间(原来和平均后的)的比较估计; 在几乎时间周期外力下的几乎时间周期解的存在性.

结合这个定理和(9), 我们有

推论 3.1 在定理 3.4 的假设之下和

$$4\nu r > \frac{\beta^2 | D |^2}{\pi^2}, \quad \| f_0 \| < \sqrt{\frac{2 | D |}{\pi}} \lambda_1^2,$$

这里 $\lambda_1 = \nu - \beta^2 | D |^2 / (4r\pi^2)$ 如前定义, 则对任意的 $R > 0$ 使得态平均 QG 流 ω_0 满足 $\| \omega_0 \|_{1/2} \leqslant R$, 下列不等式成立:

$$\|\omega(\tau)-\omega^*(\tau)\|_{1/2}\leqslant C(R)\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha\tau}\|\omega(0)-\omega^*(0)\|_{1/2},\ \tau\to\infty,$$

这里, $\omega(\tau)=\omega(\tau,\varepsilon)$ 非稳态 QG 流模型(13) 具有初始值 $\omega(0)=\omega_0$ 的解且 $\varepsilon<\varepsilon_0(R)$•

结合定理 3.4 和推论 3.1, 我们得到(13) 当 f 是 a.p. 时的 a.p. 解的存在性• 这里我们给出的限制是对 $\|f_0\|$, 而不是对 $\|f\|$• 在[7] 中, 所给出的限制是对 $\|f\|$• 所以, 我们这里的结论更具有实际意义且改进了[7] 中的结果•

设 $f\in H$ 为 a.p. 的, 则由[20] ~ [22] 或[7] 的结果, 非自治动力系统(13) 存在一致吸引子 $A_{\mathscr{H}}=A_{\mathscr{H}(f(\eta\cdot))}$, 其中 $\mathscr{H}\in\left\{f^{\tau}, f^{\tau}(t)=f(t+\tau),\ \tau\in\mathbf{R}\right\}_{C_b(\mathbf{R};H)}$, 且它的吸引子逼近平均后的动力系统(15) 的吸引子:

定理 3.5 设 $f\in H$ 为 a.p. 的, 则

$$\mathrm{dist}_{D(A^{1/2})}(A_{\mathscr{H}(f(\eta\cdot))},A)\to 0,\ 当\ \eta\to\infty,$$

这里 $A_{\mathscr{H}}$是 QG 流模型(13) 的吸引子, A 是平均后的 QG 流模型(15) 吸引子•

这个定理给出了非稳态 QG 流模型(13) 的一致吸引子当振荡外力中的参数 $\eta\to\infty$时逼近平均后的非稳态 QG 流模型吸引子•

[参 考 文 献]

[1] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics[M]. 2nd ed. Berlin, New York: Springer_Verlag, 1987.

[2] Pedlosky J. Ocean Circulation Theory[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1996.

[3] Cessi P, Ierley G R. Symmetry_breaking multiple equilibria in quasigeostrophic, wind_driven flows [J]. J Phys Oceanography, 1995, **25**(3): 1196—1205.

[4] Milliff R F, Morzel J. The global distribution of the time_average wind stress curl from nscat[J]. J Atmos Sci, 2001, **58**(5): 109—131.

[5] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M]. 2nd ed. Berlin, New York: Springer_Verlag, 1983.

[6] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1981.

[7] Duan J, Kloeden P E. Dissipative quasigeostrophic motion under temporally almost periodic forcing [J]. J Math Anal Appl, 1999, **236**(1): 74—85.

[8] Levitan B M, Zhilov V V. Almost Periodic Functions and Differential Equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. (English version)

[9] Ilyin A A. Averaging principle for dissipative dynamical system with rapidly oscillating right_hand sides[J]. Math Sb, 1996, **187**(5): 635—677.

[10] Barcilon V, Constantin P, Titi E S. Existence of solutions to the Stommel_Charney model of the Gulf stream[J]. SIAM J Math Anal, 1988, **19**(6): 1355—1364.

[11] Dymnikov V P, Filatov A N. Mathematics of Climate Modeling[M]. Boston, Cambridge, MA: Birkhauser, 1997.

[12] Wu J. Inviscid limits and regularity estimates for the solutions of the 2D dissipative quasigeostrophic equations[J]. Indiana Univ Math J, 1997, **46**(4): 1113—1124.

[13] Bennett A F, Kloeden P E. The dissipative quasigeostrophic equation[J]. Mathematika, 1981, **28**: 265—288.

[14] Brannan J, Duan J, Wanner T. Dissipative quasigeostrophic dynamics under random forcing[J]. J Math Anal Appl, 1998, **228**(1): 221—233.

[15] Duan J. Time periodic quasigeostrophic motion under dissipation and forcing[J]. Appl Math Comput, 1999, **102**(2/3): 121—127.

[16] Babin A V, Vishik M I. Attractor of Evolution Equations[M]. Amsterdam: North_Holland, 1992. (Eng-

lish version)
[17] Hale J K. Asymptotic Behavior for Dissipative Dynamical System [M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 1988.
[18] Temam R. Infinite_Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer_Verlag, 1988.
[19] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators [M]. New York: Springer_Verlag, 1966.
[20] Chepyzhov V V, Vishik M I. Non_Autonomous Dynamical Systems and Their Attractors, Appendix in the book: M I Vishik. Asymptotic Behavior of Solutions of Evolutionary Equations [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992.
[21] Chepyzhov V V, Vishik M I. A Hausdorff dimension estimate for kernal sections of non_autonomous evolution equations[J]. Indiana Univ Math J, 1993, **42**(3): 1057—1076.
[22] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors of non_autonomous dynamical systems and their dimension [J]. J Math Pures Appl, 1994, **73**(3): 279—333.

Averaging Principle for Quasi_Geostrophic Motion Under Rapidly Oscillating Forcing

GAO Hong_jun[1], DUAN Jin_qiao[2]
(1. Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P.R. China;
2. Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL 60616, USA)

Abstract: A class of large scale geophysical fluid fows are modelled by the quasi_geostrophic equation. An averaging principle for quasi_geostrophic motion under rapidly oscil_lating(non_autonomous) forcing was obtained, both on finite but large time intervals and on the entire time axis. This includes comparison estimate, stability estimate, and convergence result between quasi_geostrophic motions and its averaged motions. Furthermore, the existence of almost periodic quasi_geostrophic motions and attractor convergence were also investigated.

Key words: quasi_geostrophic fluid flow; almost periodic motion; rapidly oscillating forcing; averaging principle; stable manifold and unstable manifold