应用数学和力学，第4卷第4期（1983年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

空间机构的向量分析—Ⅱ 用建立向量方程的方法作空间机构位形分析

余 燊

（华南工学院，1982年6月18日收到）

摘 要

在本文中用建立向量方程的方法作 P–P–G–C 和 R–G–C–R 机构的位形分析．与第（Ⅰ）部分一样，可求出以给出的向量来表示的解，而不必使用 Chace 所导出的多项式方程来求解．

一、前 言

在本部分中仍然借助于向量分解的方法，并将其应用于雅可比恒等式中．本文力求将注意力集中于如下的向量方程的求解．

$$\vec{\lambda}\wedge\vec{a}+p\vec{\lambda}=\vec{b} \tag{1.1}$$

式中 $\vec{\lambda}$ 为未知量，这个方程是在位形组成的过程中产生的．现以 P-P-G-C 和 R-G-C-R 机构作为例子．

图1中，(b)图表示与(a)图的空间机构各个杆件相对应的各向量的几何关系．

二、P-P-G-C 机构

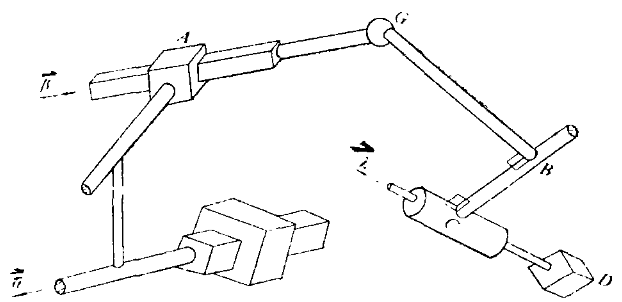

图 1(a)

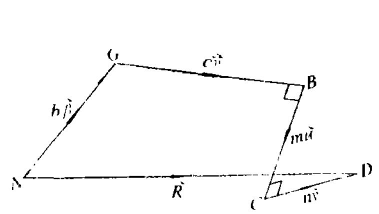

图 1(b)

对图1(a)所示的 P-P-G-C机构，当移动副 P_1 的位移输入给定时，杆 $\overline{AG}$ 的单位向量 $\vec{\beta}$ 是已知的．图1(a)的机构图可以抽象地表示为图1(b)所示的向量图，并有下列的数据：

给定：$\vec{\beta}$，c，m，$\vec{v}$，$\vec{R}$．　　(2.1)

未知数：b，$\vec{\gamma}$，$\vec{\mu}$，n. (2.2)

由于 $\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\mu}$ 为单位向量，(2.2)中由 6 个未知标量所构成.

相应于图 1 (b) 的环方程为

$$b\vec{\beta}+c\vec{\gamma}+m\vec{\mu}+n\vec{\nu}=\vec{R} \tag{2.3}$$

由机构的结构配置有

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\mu}=0,\ \vec{\mu}\cdot\vec{\nu}=0,\ \vec{\gamma}\cdot\vec{\nu}=l \tag{2.4}$$

这里 l 是给定值. (2.3)和(2.4)组成 6 个包含 6 个未知数的关系式

由 (2.3) 得

$$\vec{R}-b\vec{\beta}=c\vec{\gamma}+m\vec{\mu}+n\vec{\nu} \tag{2.5}$$

将 (2.5) 两边平方并鉴于 (2.4) 得：

$$R^2+b^2-2b\vec{\beta}\cdot\vec{R}=c^2+m^2+n^2+2lnc \tag{2.6}$$

另由 $\vec{\nu}\cdot$(2.3) 得

$$b\vec{\beta}\cdot\vec{\nu}+cl+n=\vec{\nu}\cdot\vec{R} \tag{2.7}$$

由 (2.6) 和 (2.7) 可以直接求得 b 和 n：

$$b=\frac{(z-xy)\pm\sqrt{(z-xy)^2-(1+y^2)(R^2+c^2l^2-c^2-m^2-x^2)}}{1+y^2} \tag{2.8}$$

而 $$n=x-cl-by \tag{2.9}$$

式中 $$x=\vec{\nu}\cdot\vec{R},\quad y=\vec{\beta}\cdot\vec{\nu},\quad z=\vec{\beta}\cdot\vec{R} \tag{2.10}$$

因而，如果存在实根，则

$$(z-xy)^2-(1+y^2)(R^2+c^2l^2-c^2-m^2-x^2)\geqslant 0 \tag{2.11}$$

若 (2.11) 中用等号，则仅有一个实根.

今有恒等式

$$\vec{\gamma}\wedge(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu})+\vec{\mu}\wedge(\vec{\nu}\wedge\vec{\gamma})+\vec{\nu}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})=0 \tag{2.12}$$

且由 $(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu})\wedge$(2.12) 得

$$\begin{aligned}(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu})^2\vec{\gamma}-(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}\cdot\vec{\gamma})\vec{\mu}\wedge\vec{\gamma}+(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu})\cdot(\vec{\nu}\wedge\vec{\gamma})\vec{\mu}\\+(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu})\cdot(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})\vec{\nu}=0\end{aligned} \tag{2.13}$$

给出 $$\vec{\gamma}=v\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}+l\vec{\nu} \tag{2.14}$$

式中 $v=\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}\cdot\vec{\gamma}$，此可由 (2.4) 得出.

另，由 $\vec{\gamma}\cdot$(2.14) 得

$$v^2=1-l^2$$

即 $$v=\pm\sqrt{1-l^2} \tag{2.15}$$

将 (2.14) 代入(2.3)得

$$p\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}+m\vec{\mu}=\vec{A} \tag{2.16}$$

式中 $$p=cv \tag{2.17}$$

$$\vec{A}=\vec{R}-b\vec{\beta}-(cl+m)\vec{\nu} \tag{2.18}$$

方程 (2.16) 仅包含未知向量 $\vec{\mu}$，可用下面的方法解出 $\vec{\mu}$：

鉴 (2.4)，由 $\vec{\nu}\wedge$(2.16) 得

$$p\vec{\mu}+m\vec{\nu}\wedge\vec{\mu}=\vec{\nu}\wedge\vec{A} \tag{2.19}$$

由(2.16)和(2.19) 消去 $\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}$ 得

$$(p^2+m^2)\vec{\mu}=m\vec{A}+p\vec{\nu}\wedge\vec{A} \tag{2.20}$$

将(2.15)、(2.17)和(2.18)联立便可完全确定$\vec{\mu}$，然后由(2.14)求出$\vec{\gamma}$。

鉴于(2,8)和(2.15)各有两个根，因此，本题有四个解。

三、R-G-C-R 机构

图 2(a) 所示 R-G-C-R 机构中，杆 1 为输入杆，因此，对于所给定的输入螺旋运动，点 G 便被唯一地确定。

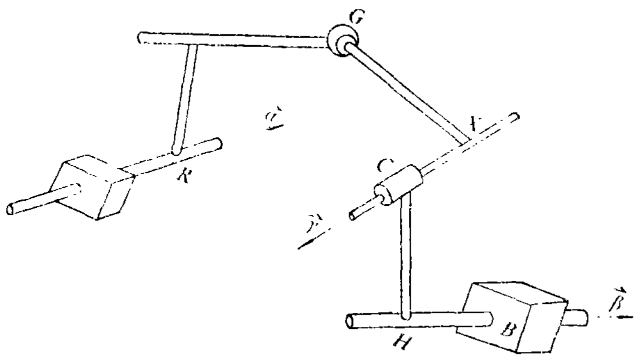

图 2(a)

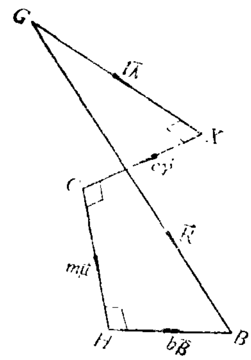

图 2(b)

在输出轴上选择一个任意点B，则机构的位置可抽象为图2(b) 的向量图形。图中数据如下：

给　定：l，m，$b\vec{\beta}$，$\vec{R}$， (3.1)

未知数：$\vec{\lambda}$，c，$\vec{\gamma}$，$\vec{\mu}$. (3.2)

鉴于$\vec{\lambda}$，$\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\mu}$ 均为单位向量，故 (3.2) 由 7 个未知数所构成。为了求出这些未知数，可写出机构的环方程

$$l\vec{\lambda}+c\vec{\gamma}+m\vec{\mu}+b\vec{\beta}=\vec{R} \tag{3.3}$$

其结构方程为

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma}=0,\ \vec{\gamma}\cdot\vec{\mu}=0,\ \vec{\mu}\cdot\vec{\beta}=0,\ \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=n \tag{3.4}$$

这里 n 为给定值。

式(3.3)和(3.4)组成包含 7 个未知数的 7 个标量方程式，其解的过程如下：

将$\vec{\gamma}\cdot$(3.3) 得

$$c=\vec{\gamma}\cdot\vec{R}-bn \tag{3.5}$$

将 (3.3) 平方得

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu}=\frac{1}{2ml}[R^2+b^2-2b\vec{\beta}\cdot\vec{R}-(l^2+m^2+c^2)] \tag{3.6}$$

写出恒等式

$$\vec{\gamma}\wedge(\vec{\mu}\wedge\vec{\beta})+\vec{\mu}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})+\vec{\beta}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})=0 \tag{3.7}$$

将 (3.4)·(3.7) 得

$$\vec{\gamma}=\pm\sqrt{1-n^2}\,(\vec{\mu}\wedge\vec{\beta})+n\vec{\beta} \tag{3.8}$$

类似地有

$$\vec{\lambda}\wedge(\vec{\mu}\wedge\vec{\gamma})+\vec{\mu}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\lambda})+\vec{\gamma}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu})=0 \tag{3.9}$$

得到

$$\vec{\lambda}=\pm\sqrt{1-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2}\,(\vec{\mu}\wedge\vec{\gamma})+(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})\vec{\mu} \tag{3.10}$$

将(3.3)代入(3.10)得

$$\vec{\lambda}=\pm\sqrt{(1-n^2)[1-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2]}\,\vec{\beta}\pm n\sqrt{1-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2}\,\vec{\mu}\wedge\vec{\beta}+(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})\vec{\mu} \tag{3.11}$$

将(3.8)和(3.11)代入(3.3)得

$$p\vec{\mu}\wedge\vec{\beta}+q\vec{\mu}=\vec{A} \tag{3.12}$$

式中

$$p=\pm ln\sqrt{1-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2}\pm c\sqrt{1-n^2} \tag{3.13}$$

$$q=m+l(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu}) \tag{3.14}$$

$$\vec{A}=\vec{R}-[\pm l\sqrt{1-n^2}\sqrt{1-(\vec{\lambda}\cdot\vec{\mu})^2}+cn+b]\vec{\beta} \tag{3.15}$$

如前述方法解(3.12)求$\vec{\mu}$得

$$(p^2+q^2)\vec{\mu}=p\vec{A}+q\vec{\beta}\wedge\vec{A} \tag{3.16}$$

γ，λ 可由(3.8)及(3.10)直接求出.

四、讨　论

着手解上述两个例子的方法如下. 首先写出如下形式的环方程

$$\sum_i l_i\cdot\vec{\alpha}_i=0;\qquad \vec{\alpha}_i\cdot\vec{\alpha}_i=1 \tag{4.1}$$

以及如下形式的结构方程

$$\vec{\alpha}_i\cdot\vec{\beta}_i=\gamma_i \tag{4.2}$$

结构方程的量（大小）经常是给定的. 方程(4.1)和(4.2)必须提供与所求未知数相同数目的标量方程，并根据机构的位形去求出未知数. 然后，选择三个相邻的单位向量，例如($\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$)，写出雅可比恒等式

$$\sum\vec{\alpha}_1\wedge(\vec{\alpha}_2\wedge\vec{\alpha}_3)=0 \tag{4.3}$$

式中包含一个未知数$\vec{\alpha}_1$，也就是说，在方程(4.3)中可借助于向量的叉乘，并结合(4.2)去求出$\vec{\alpha}_1$. 方程(4.3)与(4.1)一起构成了(1.1)的向量方程. 在这个方程中包含了一个未知数，如前表明，这个未知数是很容易解出的.

本文表明，使用初等向量代数可获得最充分最明确的解. 本文的后继部份将表明，用类似向量代数的旋量代数来求解更为复杂的机构，也可以仿此求解.

提醒注意的是，本文上述两种机构的分析，并不类同于Chace在[1]中的解法，本文以新的方法进行分析并得到新的结果.

参 考 文 献

[1] Chace, M. A., Development and applications of vector mathematics for kinematic analysis of three-dimentional mechanisms, Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Mich., (1964).

Vector Analysis of Spatial Mechanisms——(Ⅱ)Configuration Analysis of Spatial Mechanisms by Means of the Method of Vector Equations

Yu Xin

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

In this paper, the configurations of the *P-P-G-C* and the *R-G-C-R* mechanisms are established by means of the method of vector equations. As in part (Ⅰ), explicit solutions in terms of given vectors are obtained, independent of the polynomial equations of the kind obtained by Chace.