

# 初始几何缺陷对薄圆环板 弹塑性稳定性的影响\*

姜 稚 清

(铁道兵工程学院力学教研室, 1981年12月24日收到)

## 摘 要

本文应用 Neale 关于增量边界值问题的广义变分原理, 考察初始几何缺陷对薄圆环板弹塑性屈曲临界载荷的影响。计算表明, 只要在  $J_2$  增量理论的解中计入初始几何缺陷的影响, 所得的结果与几何理想圆环板在塑性形变理论下的分支性屈曲载荷十分接近。

## 一、前 言

在经典的塑性屈曲分析中, 临界载荷是用几何理想体系在平衡分支发生时的载荷来定义的。尽管对于某些问题, 这种分析方法能提供较好的结果<sup>[1-3]</sup>, 但在许多情况下它会产生一种人所共知的矛盾, 即用力学意义并不严格的塑性形变理论得到的分支性屈曲载荷, 反而比根据 von Mises 的  $J_2$  增量理论得到的相应结果更接近于实验结果。

为了解释这种现象, 不少研究者进行了大量的工作。Onat 和 Drucker<sup>[4,5]</sup>以及 Neale<sup>[6-8]</sup>指出, 只要在  $J_2$  增量理论的解中计入初始几何缺陷的影响, 以上矛盾并不难得到消除。他们认为, 在屈曲载荷对微小几何缺陷十分敏感的情况下, 几何理想体系的假设是不可采纳的。

本文应用 Neale 关于增量边界值问题的广义变分原理<sup>[9]</sup>, 考察了不同程度的初始几何缺陷对具有各种内外半径比的简支薄圆环板在平面静水压作用下的弹塑性屈曲临界载荷的影响, 并把结果与几何理想圆环板分别在两种塑性理论下的相应结果进行了比较。

## 二、基本假设

- ① 板充分薄, 并采用 Kirchhoff 直法线假设。
- ② 不考虑板的体力, 并假设板在横向不受其他任何外力, 因而可认为它处于广义平面应力状态。
- ③ 板具有波形缺陷, 即板的初始缺陷挠度与屈曲挠度具有相同的波形。
- ④ 材料是各向同性硬化的, 它服从 von Mises 屈服准则以及 Shanley 的塑性全面加载

\* 欧阳颀推荐。

假设.

- ⑤ 材料单轴拉伸的应力-应变关系可用 Ramberg-Osgood 的三参数方程来表达。  
 ⑥ 在加载的过程中, 略去板厚度的变化。

### 三、变分原理

为方便起见, 在本文的分析中采用 Neale 的广义变分原理的 Lagrange 形式, 文中的基本变量都是参照物体的初始构形来定义的, 应力和应变分别采用 Kirchhoff 应力张量  $\tau^{ij}$  和 Green 应变张量  $E_{ij}$ , 如果用  $u_i$  表示位移向量的分量, 则:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_i|_j + u_j|_i + u_k|_i u^k|_j) \quad (3.1)$$

上式中的竖线表示关于初始 (物质) 坐标的共变导数。

考虑一个在初始状态下具有面积  $dS^\circ$  和单位法向量  $n_i^\circ$  的面元, 记该面元的单位面积上的接触力为  $F^j$ , 则:

$$F^i = n_i^\circ (\tau^{ij} + \tau^{ik} u^j|_k) \quad (3.2)$$

将 (3.1) (3.2) 两式分别对时间求偏导可得到 Lagrange 描述的增量方程:

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} (v_i|_j + v_j|_i + v_k|_i u^k|_j + u^k|_i v^j|_j) \quad (3.2)$$

及

$$\dot{F}^j = n_i^\circ (\dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{ik} u^j|_k + \tau^{ik} v^j|_k) \quad (3.4)$$

其中  $v_j = \dot{u}_j$  表示速度分量。

假定对于现时的平衡构形已经确定应力分布、变形状态和材料参数, 并把给定速度分量  $v_j^*$  的初始边界面记作  $S_0^\circ$ , 把给定法向接触力增量  $\dot{F}^{j*}$  的边界面记作  $S_F^\circ$ , 这样增量边界值问题的边界条件是:

$$\text{在 } S_0^\circ \text{ 上, } v_j = v_j^* \quad (3.5)$$

$$\text{在 } S_F^\circ \text{ 上, } \dot{F}^j = \dot{F}^{j*} \quad (3.6)$$

假设所考察的弹塑性应变硬化体具有如下形式的本构定律:

$$\dot{E}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\tau})}{\partial \dot{\tau}^{ij}} \quad (3.7)$$

其中  $W(\dot{\tau})$  是  $\dot{\tau}^{ij}$  的二次齐次势函数, 广义变分原理<sup>[9]</sup>指出, 增量边界值问题与变分问题  $\delta I^\circ = 0$  相等价, 这里的

$$I^\circ = \int_V \left[ \dot{\tau}^{ij} \dot{E}_{ij} + \frac{1}{2} \tau^{ij} v^k|_i v_k|_j - W(\dot{\tau}) \right] dV^\circ - \int_{S_F^\circ} \dot{F}^{j*} v_j dS^\circ - \int_{S_0^\circ} \dot{F}^j (v_j - v_j^*) dS^\circ \quad (3.8)$$

对于应力增量  $\dot{\tau}^{ij}$  和速度  $v_j$  的任意变分, 变分原理的欧拉方程是本构关系 (3.7) 以及增量平衡方程:

$$(\dot{\tau}^{ij} + \dot{\tau}^{ik} u^j|_k + \tau^{ik} v^j|_k)|_i = 0 \quad (3.9)$$

而 (3.5), (3.6) 是变分原理的自然边界条件。

### 四、几何方程

如果只保留与挠度有关的非线性项，薄板弹塑性失稳的几何方程（极坐标形式）为：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r = E_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \epsilon_\theta = E_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma_{r\theta} = 2E_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - z \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

由此可得增量几何方程：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{\dot{u}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} - z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} - \frac{\dot{v}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} - z \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

### 五、本构方程

对于用 Mises 函数  $J_2$  作为加载函数的各向同性应变硬化材料，其本构关系为：

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)g_{ik}g_{jl} - \nu g_{ij}g_{kl}] \dot{\tau}^{kl} + G \tau'_{ij} \tau'^{kl} \dot{\tau}^{kl} \quad (5.1)$$

其中  $E$  和  $\nu$  分别为杨氏模量和泊松比， $g_{ij}$  为度量张量， $\tau'_{ij}$  为 Kirchhoff 应力张量的偏量， $G$  为硬化函数。

假定由单轴拉伸实验确定的  $G$  对于多轴应力状态仍然适用，则：

$$G = \begin{cases} \frac{3}{4J_2} \left( \frac{1}{E^?} - \frac{1}{E} \right), & \text{对于 } J_2 > 0 \\ 0, & \text{对于 } J_2 \leq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

其中  $E^?$  是单轴拉伸应力-应变曲线的切线模量。

在广义平面应力的假设下，本构关系 (5.1) 可简化为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\gamma}_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_r \\ \dot{\sigma}_\theta \\ \dot{\tau}_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

其中的  $[a_{ij}]$  如下：（见 [10]）

$$\left. \begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{E} + \frac{G}{9} (2\sigma_r - \sigma_\theta)^2 \\
 a_{12} &= a_{21} = -\frac{r}{E} + \frac{G}{9} (2\sigma_r - \sigma_\theta) (2\sigma_\theta - \sigma_r) \\
 a_{13} &= a_{31} = \frac{2G}{3} \tau_{r\theta} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \\
 a_{23} &= \frac{1}{E} + \frac{G}{9} (2\sigma_\theta - \sigma_r)^2 \\
 a_{23} &= a_{32} = \frac{2G}{3} \tau_{r\theta} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \\
 a_{33} &= \frac{2(1+\nu)}{E} + 4G\tau_{r\theta}^2
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

另外, 假设材料的单轴拉伸应力-应变曲线可用如下形式的 Ramberg-Osgood 关系来表达:

$$E_s = \frac{\sigma_s}{E} + \left( \frac{\sigma_s}{E_0} \right)^n \quad (5.5)$$

其中的  $E_0$ ,  $n$  均为材料常数.

由此可导出在塑性加载时, 硬化函数为:

$$G = \frac{3n(\sqrt{3}J_2)^{n-1}}{4J_2 E_0^n} \quad (5.6)$$

$$\text{其中 } J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 \quad (5.7)$$

若取  $n=3$ , 则硬化函数变为常数:

$$G = \frac{27}{4E_0^3} \quad (5.8)$$

## 六、屈曲载荷的Ritz解法

对于内外边界简支、上下底面自由且受有平面静水压作用的圆环板来说, 为了确定其载荷-挠度特性以求得弹塑性屈曲载荷, 可将增量边界值问题归结如下: 给定圆环板外边界的面内位移增量  $\dot{u}^*$ , 以求得相应的静水压增量  $\dot{p}$ .

这时泛函  $I^\circ$  的表达式为:

$$I^\circ = \int_{-b}^{b} \int_{r_2}^{r_1} \int_0^{2\pi} \left[ \dot{\tau}^{ij} \dot{E}_{ij} + \frac{1}{2} \dot{\tau}^{ij} v_k |_{,i} v_k |_{,j} - W(\dot{\tau}) \right] d\theta dr dz \quad (6.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\tau}^{ij} \dot{E}_{ij} &= \dot{\sigma}_r \dot{\epsilon}_r + \dot{\tau}_{r\theta} \dot{\nu}_{r\theta} + \dot{\sigma}_\theta \dot{\epsilon}_\theta \\
 \dot{\tau}^{ij} v_k |_{,i} v_k |_{,j} &= \sigma_r \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sigma_\theta \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 \\
 W(\dot{\tau}) &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{\sigma}_r^2 + 2a_{12} \dot{\sigma}_r \dot{\sigma}_\theta + a_{22} \dot{\sigma}_\theta^2 + 2a_{13} \dot{\sigma}_r \dot{\tau}_{r\theta} \\
 &\quad + 2a_{23} \dot{\sigma}_\theta \dot{\tau}_{r\theta} + a_{33} \dot{\tau}_{r\theta}^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

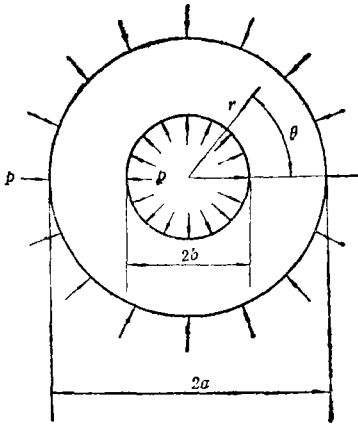


图 1

$h$  为圆环板的厚度,  $a$  和  $b$  分别为圆环板的外半径和内半径.

广义变分原理<sup>[10]</sup>指出, 对于上述增量边界值问题的解 $I^\circ$  必须取驻值. 因此, 只要适当选取 $\delta r, \delta \theta, \dot{r}_\theta, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  的表达式, 利用 Ritz 法就很容易求得这些增量, 因而只需在内外边界处逐次规定径向位移增量 $\dot{u}^*$ , 就可确定所需的载荷-挠度特性.

假定对于初始(未加载)状态, 圆环板具有如下形式的几何缺陷:

$$w^\circ = \begin{cases} \delta^\circ h f(r) \cos m\theta & \text{若 } m \neq 0 \\ \delta^\circ h g(r) & \text{若 } m = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

其中  $\delta^\circ$  为代表初始缺陷大小的无量纲参数.

$$f(r) = A_1 r^m + A_2 r^{-m} + A_3 J_m(sr) + Y_m(sr) \quad (6.4)$$

$$g(r) = B_1 + B_2 \ln r + B_3 J_0(sr) + Y_0(sr) \quad (6.5)$$

这里的  $f(r)$  及  $g(r)$  与等厚度无缺陷圆环板在平面静水压作用下屈曲的挠度函数只相差一个常数因子(见[10]).  $J_0$  和  $Y_0$  分别为零阶第一类及第二类贝塞尔函数,  $J_m$  和  $Y_m$  分别为  $m$  阶第一类及第二类贝塞尔函数.

$$s = \frac{k}{m} \quad (6.6)$$

$k$  和  $m$  可由[10]的表 2 来确定.

在初始状态下, 板的其他位移和应力均为零, 即:

$$u^\circ = v^\circ = \sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ = \tau_{r\theta}^\circ = 0 \quad (6.7)$$

对于初始状态适当规定圆环板外边界  $r=a$  处的径向位移增量 $\dot{u}^*$ , 此时内边界  $r=b$  处的径向位移增量也应相应规定为 $\dot{u}^* \cdot \frac{b}{a}$ , 位移和应力增量的近似解可选如下形式:

若  $m \neq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}^* \cdot \frac{r}{a}, \quad \dot{v} = 0, \quad \dot{w} = \delta h f(r) \cos m\theta \\ \dot{\sigma}_r &= -\dot{p} + \dot{\alpha}_1 \frac{z}{h} f(r) \cos m\theta, \quad \dot{\sigma}_\theta = -\dot{p} + \dot{\alpha}_2 \frac{z}{h} f(r) \cos m\theta \\ \dot{\tau}_{r\theta} &= \dot{\alpha}_3 \frac{z}{h} f(r) \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

若  $m = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}^* \cdot \frac{r}{a}, \quad \dot{v} = 0, \quad \dot{w} = \delta h g(r) \\ \dot{\sigma}_r &= -\dot{p} + \dot{\alpha}_1 \frac{z}{h} g(r), \quad \dot{\sigma}_\theta = -\dot{p} + \dot{\alpha}_2 \frac{z}{h} g(r), \quad \dot{\tau}_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

其中  $r$  为圆环板内某点到中轴的距离,  $z$  为该点到板中面的距离.

由(6.8)和(6.9)可确定应变增量为:

若  $m \neq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_r &= \frac{\dot{u}^*}{a} - z\dot{\delta}hf''(r)\cos m\theta + \delta\dot{\delta}h^2[f'(r)]^2\cos^2 m\theta \\
 \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{\dot{u}^*}{a} - z\dot{\delta}h\left[\frac{1}{r}f'(r) - \frac{m^2}{r^2}f(r)\right]\cos m\theta + \frac{m^2}{r^2}\delta\dot{\delta}f^2(r)\sin^2 m\theta \\
 \dot{\nu}_{r\theta} &= 2mz\dot{\delta}h\left[\frac{1}{r}f'(r) - \frac{1}{r^2}f(r)\right]\sin m\theta \\
 &\quad - 2m\delta\dot{\delta}h^2\frac{1}{r}f(r)f'(r)\sin m\theta\cos m\theta
 \end{aligned} \right\} (6.10)$$

若  $m=0$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_r &= \frac{\dot{u}^*}{a} - z\dot{\delta}hg''(r) + \delta\dot{\delta}h^2[g'(r)]^2 \\
 \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{\dot{u}^*}{a} - z\dot{\delta}h\frac{1}{r}g'(r) \\
 \dot{\nu}_{r\theta} &= 0
 \end{aligned} \right\} (6.11)$$

(6.10)和(6.11)中的  $\delta$  是与任意时刻的挠度有关的无量纲参数, 对于初始状态  $\delta=\delta^0$ .

把(6.3)、(6.7)、(6.8)、(6.10)代入(6.1)(或把(6.3)、(6.7)、(6.9)、(6.11)代入(6.1))并利用条件:

$$\frac{\partial I^0}{\partial \delta} = \frac{\partial I^0}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial I^0}{\partial \dot{a}_1} = \frac{\partial I^0}{\partial \dot{a}_2} = \frac{\partial I^0}{\partial \dot{a}_3} = 0 \quad (6.12)$$

就可确定参数  $\dot{\delta}$ ,  $\dot{p}$ ,  $\dot{a}_1$ ,  $\dot{a}_2$ ,  $\dot{a}_3$ .

将增量表达式(6.8)(或(6.9))与(6.3)、(6.7)相加, 则得与初始给定位移增量  $\dot{u}^*$  相应的应力分布和位移分布. 重复以上的近似求解的过程, 可得应力和位移的一般表达式:

若  $m \neq 0$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= u^*\frac{r}{a}, \quad v=0, \quad w = \delta hf(r)\cos m\theta \\
 \sigma_r &= -p + \alpha_1 \frac{z}{h} f(r)\cos m\theta, \quad \sigma_\theta = -p + \alpha_2 \frac{z}{h} f(r)\cos m\theta \\
 \tau_{r\theta} &= \alpha_3 \frac{z}{h} f(r)\sin m\theta
 \end{aligned} \right\} (6.13)$$

若  $m=0$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 u &= u^*\frac{r}{a}, \quad v=0, \quad w = \delta hg(r) \\
 \sigma_r &= -p + \alpha_1 \frac{z}{h} g(r), \quad \sigma_\theta = -p + \alpha_2 \frac{z}{h} g(r), \quad \tau_{r\theta} = 0
 \end{aligned} \right\} (6.14)$$

因此, 上述增量边界值问题的近似解可归结为逐次求解代数方程组(6.12), 它们关于增

量参数 $\delta, \dot{p}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ 是线性的, 并可表示为如下的矩阵形式(其中的 $[c_{ij}]$ ,  $[d_i]$ 及 $[\bar{c}_{ij}]$ ,  $[\bar{d}_i]$ 只与“目前”的状态有关):

若  $m \neq 0$ ,

$$[c_{ij}(\delta \ p \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)][\dot{\delta} \ \dot{p} \ \dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2 \ \dot{\alpha}_3]^T = [d_i] \quad (6.15)$$

若  $m=0$ ,

$$[\bar{c}_{ij}(\delta \ p \ \alpha_1 \ \alpha_2)][\dot{\delta} \ \dot{p} \ \dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2]^T = [\bar{d}_i] \quad (6.16)$$

初始条件为

$$\delta = \delta^0, \ \alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = p^0 = 0 \quad (6.17)$$

为简单起见, 在(5.5)中取应变硬化指数  $n=3$ , 可得 $[c_{ij}]$ ,  $[d_i]$ ,  $[\bar{c}_{ij}]$ ,  $[\bar{d}_i]$ 如下:

若  $m \neq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= p(I_1 + m^2 I_4), \quad c_{12} = c_{21} = \delta(I_1 + m^2 I_4) \\ c_{13} = c_{31} &= \frac{1}{12} I_2, \quad c_{14} = c_{41} = \frac{1}{12} (I_3 - m^2 I_4) \\ c_{15} = c_{51} &= -\frac{m}{6} (I_3 - I_4) \\ c_{22} &= \frac{G}{108h^2} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 I_5 + \frac{2(a^2 - b^2)}{h^2} \left( \frac{1-\nu}{E} + \frac{2G}{9} p^2 \right) \\ c_{23} = c_{32} &= \frac{Gp}{108h^2} (5\alpha_1 - \alpha_2) I_5 \\ c_{24} = c_{42} &= \frac{Gp}{108h^2} (5\alpha_2 - \alpha_1) I_5, \quad c_{25} = c_{52} = \frac{Gp}{9h^2} \alpha_3 I_5 \\ c_{33} &= \frac{1}{12h^2} \left( \frac{1}{E} + \frac{G}{9} p^2 \right) I_5 + \frac{G}{960h^2} (2\alpha_1 - \alpha_2)^2 I_5 \\ c_{34} = c_{43} &= \frac{1}{12h^2} \left( \frac{G}{9} p^2 - \frac{\nu}{E} \right) I_5 + \frac{G}{960h^2} (2\alpha_1 - \alpha_2) (2\alpha_2 - \alpha_1) I_5 \\ c_{35} = c_{53} &= \frac{G}{480h^2} (2\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3 I_5 \\ c_{44} &= \frac{1}{12h^2} \left( \frac{1}{E} + \frac{G}{9} p^2 \right) I_5 + \frac{G}{960h^2} (2\alpha_2 - \alpha_1)^2 I_5 \\ c_{45} = c_{54} &= \frac{G}{480h^2} (2\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_3 I_5 \\ c_{55} &= \frac{1+\nu}{6Eh^2} I_5 + \frac{3G}{80h^2} \alpha_3^2 I_5 \\ d_1 = d_3 = d_4 = d_5 &= 0, \quad d_2 = -\frac{2(a^2 - b^2)}{ah^2} \dot{u}^* \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_b^a r [f'(r)]^2 dr, \quad I_2 = \int_b^a r f(r) f''(r) dr \\ I_3 &= \int_b^a f(r) f'(r) dr, \quad I_4 = \int_b^a \frac{1}{r} f^2(r) dr \\ I_5 &= \int_b^a r f^2(r) dr, \quad I_6 = \int_b^a r f^4(r) dr \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

若  $m=0$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{c}_{11} &= p I_1, \quad \bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} = \delta I_1, \quad \bar{c}_{13} = \bar{c}_{31} = \frac{1}{12} I_2 \\
 \bar{c}_{14} &= \bar{c}_{41} = \frac{1}{12} I_3 \\
 \bar{c}_{22} &= \frac{G}{108 h^2} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 I_5 + \frac{a^2 - b^2}{h^2} \left( \frac{1 - \nu}{E} + \frac{2G}{9} p^2 \right) \\
 \bar{c}_{23} &= \bar{c}_{32} = \frac{G p}{108 h^2} (5\alpha_1 - \alpha_2) I_5 \\
 \bar{c}_{24} &= \bar{c}_{42} = \frac{G p}{108 h^2} (5\alpha_2 - \alpha_1) I_5 \\
 \bar{c}_{33} &= \frac{1}{12 h^2} \left( \frac{1}{E} + \frac{G}{9} p^2 \right) I_5 + \frac{G}{720 h^2} (2\alpha_1 - \alpha_2)^2 I_6 \\
 \bar{c}_{34} &= \bar{c}_{43} = \frac{1}{12 h^2} \left( \frac{G}{9} p^2 - \frac{\nu}{E} \right) I_5 + \frac{G}{720 h^2} (2\alpha_1 - \alpha_2) (2\alpha_2 - \alpha_1) I_6 \\
 \bar{c}_{44} &= \frac{1}{12 h^2} \left( \frac{1}{E} + \frac{G}{9} p^2 \right) I_5 + \frac{G}{720 h^2} (2\alpha_2 - \alpha_1)^2 I_6 \\
 \bar{d}_1 &= \bar{d}_3 = \bar{d}_4 = 0, \quad \bar{d}_2 = -\frac{a^2 - b^2}{a h^2} \dot{u}^*
 \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{其中} \quad \bar{I}_1 &= \int_b^a r [g'(r)]^2 dr, \quad \bar{I}_2 = \int_b^a r g(r) g''(r) dr \\
 \bar{I}_3 &= \int_b^a g(r) g'(r) dr, \quad \bar{I}_4 = \int_b^a \frac{1}{r} g^2(r) dr \\
 \bar{I}_5 &= \int_b^a r g^2(r) dr, \quad \bar{I}_6 = \int_b^a r g^4(r) dr
 \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

选择足够小的步长，逐次求解线性代数方程组(6.15)或(6.16)可得近似的载荷-挠度曲线，如果把其最大承载作为弹塑性屈曲的临界载荷，问题就得到了解决。

## 七、结果与讨论

计算是对厚度为0.1时，外半径为10时，内半径分别为1至9时的圆环板进行的，假设应力-应变关系可用如下的 Ramberg-Osgood 三参数方程  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \left( \frac{\sigma_x}{E_0} \right)^3$  来表示，并且其中  $E = 30000$  千磅/吋<sup>2</sup>， $E_0 = 100$  千磅/吋<sup>2</sup>。对于  $\delta^0 = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ ，分别就不同的  $m$  计算圆环板的最大承载，其中最小者，即为在给定的初始几何缺陷下的临界屈曲载荷。计算结果可见表1。

表中屈曲载荷的单位为千磅/吋<sup>2</sup>，括号内的数是与该屈曲载荷相对应的屈曲波数， $\beta = \frac{b}{a}$  为圆环板的内外半径比。

理想板的屈曲载荷是分别根据塑性增量理论和塑性形变理论求得的（见[10]）。



表 1 内外筒支圆环板的平面静水压屈曲载荷

$\beta$	理想板( $\delta^0=0$ )		有初始几何缺陷的圆环板( $\delta^0=$ )					
	增量理论	形变理论	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
0.1	3.477(0)	3.174(0)	2.656(0)	2.656(0)	2.645(0)	2.602(0)	2.450(0)	1.939(0)
0.2	3.631(0)	3.296(0)	3.036(1)	3.036(1)	3.025(1)	2.987(1)	2.842(1)	2.253(0)
0.3	4.102(0)	3.653(0)	3.594(1)	3.592(1)	3.577(1)	3.531(1)	3.345(0)	2.521(0)
0.4	4.879(0)	4.197(0)	4.171(2)	4.170(2)	4.159(2)	4.111(2)	3.941(2)	3.365(2)
0.5	6.100(0)	4.961(0)	4.979(3)	4.979(3)	4.966(3)	4.916(3)	4.739(3)	4.137(3)
0.6	8.173(0)	6.036(0)	6.085(5)	6.085(5)	6.072(5)	6.030(5)	5.844(4)	5.039(3)
0.7	12.456(0)	7.659(0)	7.729(7)	7.728(7)	7.709(7)	7.644(7)	7.113(5)	5.355(5)
0.8	24.896(0)	10.467(0)	15.754(3)	14.938(3)	13.875(3)	12.391(3)	10.114(3)	9.347(3)
0.9	95.282(0)	17.220(0)	31.074(0)	29.389(0)	27.399(0)	24.967(0)	21.801(0)	17.296(0)

根据表 1 可得以下结论:

① 在分别运用塑性增量理论与塑性形变理论得到的理想板的分支性屈曲载荷中, 后者与考虑了初始几何缺陷的圆环板的屈曲载荷比较接近, 这就进一步证实了 Onat, Drucker 和 Neale 等人的结论: 只要在  $J_2$  增量理论的解中计入初始几何缺陷的影响, 就能消除  $J_2$  增量理论的分支性屈曲载荷与实验事实不相吻合的这一矛盾。当  $\beta=0.8$  和  $0.9$  时, 从表中可以看出须有较大初始几何缺陷的圆环板, 其屈曲载荷才与形变理论的结果相接近, 这种情况可能是由于  $\beta$  较大时圆环板变得很窄, 因而再用薄板假设不很妥当所致。

② 同样以塑性增量理论为出发点, 有初始几何缺陷圆环板的屈曲载荷明显低于理想板的屈曲载荷, 这一事实说明了圆环板具有一定的缺陷敏感性。随着塑性程度的发展 (对于本文考虑的材料, 单轴拉伸屈服应力  $\sigma_{ys} \approx 3.78$  千磅/吋<sup>2</sup>), 这两种屈曲载荷的差距也就随之增大, 这说明圆环板的缺陷敏感性会随着塑性的发展而增加。

③ 对于内外筒支的理想圆环板来说, 不论内外半径比  $\beta$  的大小如何, 板的屈曲都是径向对称的 (见 [10])。但是如果考虑了板的初始几何缺陷, 则除了少数情况以外, 板一般都发生非径向对称屈曲。甚至对具有相同  $\beta$  的圆环板来说, 初始缺陷的大小也可能会影响到屈曲波数的多少 (例如当  $\beta=0.6$  时,  $m=5, 4$  或  $3$ ), 而 Neale 在他的文章 [7—9] 中都忽略了这一点。

本文是在欧阳曾教授的指导下完成的, 复旦大学固体力学教研室马文华、王开福等老师也对本文提了一些有益的意见, 在此特向他们表示深切的谢意。

#### 参 考 文 献

- [1] Hill, R. and M. J. Sewell, A general theory of inelastic column failure-I, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8, (1960), 105—111.
- [2] Batterman, S. C., Plastic buckling of axially compressed cylindrical shells, *AIAA Journal*, 3, (1965), 316—325.
- [3] Ariaratnam, S. T. and R. N. Dubey, Instability in an elastic-plastic cylindrical shell under axial compression, *J. Appl. Mech.*, 36, (1969), 47.
- [4] Onat, E. T. and D. C. Drucker, Inelastic instability and incremental theories of plasticity, *Journal of the Aerospace Sciences*, 20, (1953), 181—186
- [5] Drucker, D. C. and E. T. Onat, On the concept of stability of inelastic systems,

- Journal of the Aerospace Sciences*, 21, (1954), 543—548.
- [ 6 ] Neale, K. W., A method for the estimation of plastic buckling loads, *Int. J. Solids Structures*, 10 (1974), 217—230.
- [ 7 ] Neale, K. W., Bifurcation in an elastic-plastic cylindrical shell under torsion, *J. Appl. Mech.*, 40, (1973), 826.
- [ 8 ] Neale, K. W., Effect of imperfections on the plastic buckling of rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, (March 1975), 115—120.
- [ 9 ] Neale, K. W., A general variational theorem for the rate problem in elastic-plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 8, (1972), 865.
- [ 10 ] 姜稚清, 薄圆环板的弹塑性稳定性, 复旦大学78级研究生毕业论文, (1981).

## Effect of Initial Imperfections in Geometry on the Elastic-Plastic Stability of a Thin Annular Plate

Jiang Zhi-qing

(The Engineering College of the Railway Units of the P.L.A., Shijiazhuang)

### Abstract

In this paper, Neale's generalized variational principle about incremental boundary-value problems is utilized to study the effect of initial imperfections in geometry on the critical loads of elastic-plastic buckling of thin annular plates. The calculations show that, if the effect of initial imperfections in geometry is taken into account in the solutions by  $J_2$  incremental theory, the results are very close to the bifurcational buckling loads of the perfect annular plates according to the plastic deformation theory.