应用数学和力学，第4卷第4期（1983年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

极限分析的广义界限定理*

高　扬

(清华大学工程力学系，1982年5月21日收到)

摘　要

本文研究了非连续流动场中，刚塑性介质极限分析完全解的界限问题．提出了一个包括界面条件及间断面条件在内的混合边值问题的广义变分原理，建立了极限载荷乘子的变分解析公式．并证明了一个新的界限定理，其中的场变量将不再受到屈服条件、不可压缩条件等约束的限制．此定理的推论给出了变分解与完全解之间的关系．初步应用表明，对于简单选取的场变量，由本文公式可以得到准确解的较佳界限值，结果具有较好的稳定性．

一、引　言

刚塑性介质极限分析的完全解在数学上具有相当的困难，因此求取其近似值在工程技术问题中就有较大的实际意义．自 Prager-Hodge 提出极限分析理论的变分原理，并在1952年推广到非连续流动场[1]以后，上、下限定理得以广泛的应用．但是在经典的界限定理中，选取的静力许可应力场不能位于屈服超曲面以外；运动许可速度场应满足不可压缩条件，与之相关联的应力场须位于屈服超曲面上[2]；并且往往因不易妥善选择尝试函数而产生上、下限解相差很大，这就给实际应用带来较大的困难，有必要进一步地研究而使其趋于完善．

60年代中，钱令希、钟万勰[3]及 Mura-Lee 等[4]提出了有关问题的广义变分原理，为近似求解复杂结构极限分析问题，提供了一个较现实的新途径．此曾引起力学界的广泛讨论[5]．1975年，薛大为建立了刚塑性混合体极限分析的广义变分原理[6]，其后又推广到大变形的情况中[7]，并利用 Lagrange 乘子法导出其中乘子所代表的物理量．钱伟长[8]在其专著中对此方法的正确性与合理性给予了肯定，并系统地阐述了通过条件变分的 Lagrange 乘子法，建立广义变分原理及各级不完全广义变分原理的途径．

虽然通过变分公式可以得到较为准确的结果，但是此变分解与极限分析的完全解之间关系尚不能确定[5]．为此，本文在总结先前工作基础上，提出了一个非连续流动场中极限分析的广义变分原理，包括界面条件、间断面条件及不可压缩条件在内的极限分析问题全套方程均能在变分意义下得到满足．由此出发，建立了一个新的界限定理，其中的应力、速度自变函数将分别不再受到屈服条件和不可压缩条件等约束的限制．其推论给出了变分解与完全解之间的关系．初步应用表明，利用本文公式所求得的结果较经典法更接近于完全解，并具有

* 薛大为推荐．

较好的稳定性，使用上亦颇为方便.

二、极限分析的广义变分原理

在三维欧氏空间内，设刚塑性体的自然构型$\mathscr{R}(\Omega, S)$为已知，其中Ω为连续有界开域，$S=\partial\Omega$ 为其边界. 在 S_v 部分给定速度：$v_i|_{S_v}=\bar{v}_i$；在 S_t 部分给定面力：$T_i|_{S_t}=\mathscr{V}\bar{T}_i$；$\mathscr{V}$ 为载荷乘子，$\bar{T}_i$ 为基准外力. 现假定体积Ω内存在有限个刚塑性交界面 S_{pr}，其将Ω 分成不同的刚性区 Ω_{ri} 和塑性区 Ω_{pj}，则 $\sum_i \Omega_{ri}=\Omega_r$，$\sum_j \Omega_{pj}=\Omega_p$，$\Omega_r\cup\Omega_p=\Omega$，$\Omega_r\cap\Omega_p=S_{pr}$.

在非连续流动场中，塑性域 Ω_p 内可能存在着速度间断面 Γ_a $(a=1,2,\cdots,n)$，为讨论方便计，略去 Ω_p 中可能存在的应力间断面. 应当指出，刚塑性交界面 S_{pr} 只可能是速度间断面[9]. 定义 σ_{ij} 和 v_i 为分区连续 C^1 类函数，在相应的间断面上可以有有限的跳跃，则对于刚塑性体（不计体力）在抵达极限状态时，应满足如下方程和条件.

（1）平衡方程

$$\sigma_{ij,j}=(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)_{,j}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{中}) \tag{2.1}$$

式中 S_{ij}，σ 分别为应力偏张量和应力球张量.

（2）屈服条件

$$f(S_{ij})=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}-k^2=0 \qquad (\text{在 }\Omega_p\text{ 中}) \tag{2.2}$$

$$f(S_{ij})<0 \qquad (\text{在 }\Omega_r\text{ 中}) \tag{2.3}$$

（3）几何-物性方程和刚性条件

$$\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})-\lambda\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}=0 \qquad (\text{在 }\Omega_p\text{ 中}) \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})=0 \qquad (\text{在 }\Omega_r\text{ 中}) \tag{2.5}$$

（4）不可压缩条件

$$\delta_{ij}v_{i,j}=0 \qquad (\text{在 }\Omega\text{ 中}) \tag{2.6}$$

（5）边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\mathscr{V}\bar{T}_i,\ \int_{S_t}\bar{T}_iv_idS=1 \qquad (\text{在 }S_t\text{ 上}) \tag{2.7}$$

$$v_i=\bar{v}_i \qquad (\text{在 }S_v\text{ 上}) \tag{2.8}$$

这里令积分方程为一个单位仅仅是为了确定任意许可速度矢量的比率 (Scale)[4].

（6）间断面条件

$$\sigma^+_{nj}n^+_j+\sigma^-_{nj}n^-_j=0 \qquad (\text{在 }\Gamma_a\text{ 法向}) \tag{2.9}$$

$$\mathrm{sign}(\Delta v_i)\,k=-\sigma^+_{ij}n^+_j=\sigma^-_{ij}n^-_j \qquad (\text{在 }\Gamma_a\text{ 切向}) \tag{2.10}$$

其中

$$\mathrm{sign}\,(\Delta v_i)=\begin{cases}1 & (v^+_i>v^-_i)\\ -1 & (v^+_i<v^-_i)\end{cases}$$

字母上的“+”及“-”表示由间断面 Γ_a 两边趋近时所得的极限值，$n^+_i=-n^-_i$. 为了在选

取尝试函数时不必再考虑界面条件，在几何为复杂情况时可以人为地划分区域，并在各区域独立地选取尝试函数，此引入界面族函数Ψ[10]：

$\Psi>0$（在Ω_p中）；$\Psi<0$（在Ω_r中）；$\Psi=0$（在S_{pr}上）．并定义分域函数

$$\left.\begin{aligned}&U(\Psi)=\begin{cases}0 & (\Psi<0)\\ 1 & (\Psi>0)\end{cases}\\ &U(\Psi)+U(-\Psi)=1,\ \frac{dU}{d\Psi}=\delta(\Psi)\text{——Dirac 函数}\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

若称一切邻近于真实极限状态的场变量为许可状态，则可以提出下述广义变分原理：

极限分析的广义变分原理　在所有许可状态中，真实的极限状态将使泛函

$$\begin{aligned}\Pi(S_{ij},\sigma,v_i,\lambda,\Psi,R_i,\gamma)=&\int_\Omega\Big[S_{ij}\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})+\delta_{ij}\sigma v_{i,j}\\&-\lambda f(S_{ij})\,U(\Psi)\Big]d\Omega+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha}\text{sign}\,(\Delta v_t)\,k(v_t^+-v_t^-)\,dS\\&-\gamma\Big(\int_{S_t}\bar T_iv_idS-1\Big)-\int_{S_v}R_i(v_i-\bar v_i)\,dS\end{aligned}\tag{2.12}$$

取驻值，并给出刚塑性交界面的唯一分划．

证明　对（2.12）式进行一次变分（界面S_{pr}的变分可由对Ψ变分进行），利用Gauss定理进行积分变换，并注意到间断面的性质及分域函数的定义，整理后即得

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\int_\Omega\Big[\delta_{ij}v_{i,j}\delta\sigma-(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)_{,j}\,\delta v_i\Big]d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{2}(v_{i,j}\\&+v_{j,i})U(-\Psi)\,\delta S_{ij}d\Omega+\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})-\lambda\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\Big]U(\Psi)\,\delta S_{ij}d\Omega\\&-\int_\Omega f(S_{ij})U(\Psi)\,\delta\lambda d\Omega-\int_\Omega\lambda f(S_{ij})\frac{dU}{d\Psi}\delta\Psi\,d\Omega\\&+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha^+}[\text{sign}\,(\Delta v_t)\,k+(S_{tj}^++\delta_{tj}\sigma^+)n_j^+]\,\delta v_t^+dS\\&+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha^-}[(S_{tj}^-+\delta_{tj}\sigma^-)n_j^--\text{sign}\,(\Delta v_t)\,k]\,\delta v_t^-dS\\&+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha}[(S_{nj}^++\delta_{nj}\sigma^+)n_j^++(S_{nj}^-+\delta_{nj}\sigma^-)n_j^-]\,\delta v_ndS\\&+\int_{S_t}[(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)n_j-\gamma\bar T_i]\,\delta v_idS-\Big(\int_{S_t}\bar T_iv_idS-1\Big)\delta\gamma\\&+\int_{S_v}[(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)n_j-R_i]\,\delta v_idS-\int_{S_v}(v_i-\bar v_i)\,\delta R_idS\end{aligned}\tag{2.13}$$

根据分域函数$U(\Psi)$的定义及 Dirac 函数$\dfrac{dU}{d\Psi}=\delta(\Psi)$的性质，（2.13）式中前四个积分项分别在有关体积域中存在，第五个积分仅在界面S_{pr}上存在．由于相互独立无关的变分宗量任意性，则$\delta\Pi=0$等价于方程（2.1）—（2.10）式及界面条件

$$\lambda=0,\quad f(S_{ij})=0\qquad(\text{在}S_{pr}\text{上})\tag{2.14}$$

和支承表面约束条件

$$(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)n_j-R_i=0 \qquad (\text{在}S_v\text{上}) \tag{2.15}$$

(2.14)式兼有刚性域与塑性域二种性质，而刚塑性域是唯一确定的，故其唯一定界面．证毕．

泛函Π中Lagrange乘子λ的物理意义由相应的欧拉方程(2.4)及(2.14)表征为流动因子，不计硬化效应时，以S_{ij}乘以(2.4)式两端，结合二次型性质，并取

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$$

则可得

$$\lambda_1=\frac{S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{2k^2} \qquad (\text{在}\Omega_p\text{中})$$

若以$\dot{\varepsilon}_{ij}$同乘(2.4)式两端，则有$\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\lambda^2S_{ij}S_{ij}=2k^2\lambda^2$ (在Ω_p中)[8]，于是得λ的另一表达式

$$\lambda_2=\frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}{\sqrt{2}k} \qquad (\text{在 }\Omega_p\text{ 中})$$

因为 $S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\sqrt{2}k\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}=W_p$ 表示为塑性功率密度，则λ_1，λ_2在变分意义下是等价的，其物理意义唯一的表征为$\lambda=W_p/2k^2$．

乘子R_i由(2.15)式表征为S_v面上应力场的支承反力，因此其物理意义也是唯一确定的．

若速度边界条件为齐次的：$v_i|_{S_v}=0$，则Π可写成

$$\Pi_1(S_{ij},\sigma,v_i,\lambda,\Psi,\mathscr{V},R_i)=\int_\Omega[S_{ij}v_{i,j}+\delta_{ij}\sigma v_{i,j}-\lambda f(S_{ij})U(\Psi)]d\Omega+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha}\tau[v_i]dS-\mathscr{V}\left(\int_{S_t}\bar{T}_iv_idS-1\right)-\int_S R_iv_idS \tag{2.16}$$

式中$[v_i]=v_i|_{n^+}-v_i|_{n^-}$，为$\Gamma_\alpha$上速度阶跃值；$\tau$为应力场在$\Gamma_\alpha$上的切向分力，极限状态时$\tau=\text{sign}(\Delta v_i)k$．由泛函$\Pi_1$，我们可以提出

定理1　刚塑性体抵达极限状态时，载荷乘子$\mathscr{V}$为下式的驻值：

$$\mathscr{V}=\text{sta}\frac{\int_\Omega[S_{ij}v_{i,j}+\delta_{ij}\sigma v_{i,j}-\lambda f(S_{ij})U(\Psi)]d\Omega+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha}\tau[v_i]dS-\int_{S_v}R_iv_idS}{\int_{S_t}\bar{T}_iv_idS} \tag{2.17}$$

式中，$S_{ij},\sigma,v_i,R_i,\Psi$互相无关，同时独立变分．

此定理的证明可由泛函Π_1的一次变分为零等价于(2.1)—(2.10)式完成（注意此时$v_i|_{S_v}=0$），此略．为了便于实用，不妨设取$S_{ij}+\delta_{ij}\sigma=\sigma_{ij}=\eta\bar{\sigma}_{ij}$，此处$\bar{\sigma}_{ij}$为预先给定的应力场，其和基准外力$\bar{T}_i$构成平衡；$\eta$为一正数乘子，可由(2.17)式对应力场取驻值而得．若令$\lambda=\lambda_1$，则有

$$\eta^2=\frac{2}{3}\frac{\int_\Omega\left[\bar{\sigma}_{ij}v_{i,j}+\frac{1}{2}\bar{S}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}U(\Psi)\right]d\Omega+\sum_\alpha\int_{\Gamma_\alpha}\bar{\tau}[v_i]dS}{\int_\Omega\frac{\bar{S}_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{2k^2}\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}U(\Psi)d\Omega} \tag{2.18}$$

代入(2.17)式则有

$$\mathscr{V}=\frac{\eta\left\{\int_{\Omega}\left[\frac{2}{3}\bar{\sigma}_{ij}v_{i,j}+\frac{1}{3}\bar{S}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}U(\Psi)\right]d\Omega+\frac{2}{3}\sum_{\alpha}\int_{\Gamma_{\alpha}}\bar{\tau}[v_i]dS\right\}-\int_{S_v}R_iv_idS}{\int_{S_t}\bar{T}_iv_idS} \tag{2.19}$$

若取 $\lambda=\lambda_2$ 时，同理有

$$\eta=\frac{\int_{\Omega}\bar{\sigma}_{ij}v_{i,j}d\Omega+\sum_{\alpha}\int_{\Gamma_{\alpha}}\bar{\tau}[v_i]dS}{\int_{\Omega}\frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}{\sqrt{2}\,k}\bar{S}_{kl}\bar{S}_{kl}U(\Psi)d\Omega} \tag{2.20}$$

$$\mathscr{V}=\frac{\int_{\Omega}\frac{1}{2}k\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}\,U(\Psi)d\Omega+\frac{1}{2}\eta\left[\int_{\Omega}\bar{\sigma}_{ij}v_{i,j}d\Omega+\sum_{\alpha}\int_{\Gamma_{\alpha}}\bar{\tau}[v_i]dS\right]-\int_{S_v}R_iv_idS}{\int_{S_t}\bar{T}_iv_idS} \tag{2.21}$$

如设一切静力许可状态为Φ°，运动许可状态为Φ^*，此处

$$\Phi^{\circ}=\{\sigma^{\circ}_{ij}:\ \sigma^{\circ}_{ij}=\sigma^{\circ}_{ji},\quad \sigma^{\circ}_{ij}=S^{\circ}_{ij}+\delta_{ij}\sigma^{\circ},\ \sigma^{\circ}_{ij,j}=0,$$

$$f(S^{\circ}_{ij})\leqslant 0\ (\text{在}\Omega\text{中});\ \sigma^{\circ}_{ij}n_j=\mathscr{V}^{\circ}\bar{T}_i\ (\text{在}S_t\text{上})\} \tag{2.22}$$

$$\Phi^*=\Big\{v^*_i:\dot{\varepsilon}^*_{ij}=\frac{1}{2}\left(v^*_{i,j}+v^*_{j,i}\right),\ \delta_{ij}v^*_{i,j}=0\ (\text{在}\Omega\text{中});$$

$$\dot{\varepsilon}^*_{ij}=\lambda S^*_{ij},\ f(S^*_{ij})=0\ (\text{在}\Omega_p\text{中}),\ v^*_i=0\ (\text{在}S_v\text{上})\Big\} \tag{2.23}$$

则可以提出

定理2 对于任意的$\sigma^{\circ}_{ij}\in\Phi^{\circ}$，$v^*_i\in\Phi^*$，使得$\sigma^{\circ}_{ij}v^*_{i,j}\geqslant 0$，则由变分式(2.17)或(2.19)及(2.21)所决定的载荷乘子必将介于由经典的界限定理给出的上、下限之间，即

$$\mathscr{V}_{\text{下}}(\sigma^{\circ}_{ij})\leqslant\mathscr{V}(\sigma^{\circ}_{ij},\ v^*_i)\leqslant\mathscr{V}_{\text{上}}(v^*_i,\ \sigma^*_{ij}) \tag{2.24}$$

这里的σ^*_{ij}是与v^*_i相关联的应力场，注意到$f(S^{\circ}_{ij})\leqslant 0$，$\tau^*\leqslant k$，$\sigma^{\circ}_{ij}v^*_{i,j}\geqslant 0$，$f(S^*_{ij})=0$，对于$\lambda=\lambda_1$或$\lambda=\lambda_2$时，分别利用不等式[11]

$$\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\geqslant\frac{2k^2-f(S^{\circ}_{ij})}{2k^2}\sigma^{\circ}_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}$$

及 $\forall\sigma^{\circ}_{ij}\in\Phi^{\circ}$，$v^*_i\in\Phi^*$

$$\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\geqslant\frac{2k^2}{2k^2+f(S^{\circ}_{ij})}\sigma^{\circ}_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}$$

即得证实定理2.

三、极限分析的广义界限定理

解除集合 Φ°及Φ^*中有关约束条件，分别得

$$\Sigma'=\{\sigma'_{ij}:\sigma'_{ij}=\sigma'_{ji};\ \sigma'_{ij}=S'_{ij}+\delta_{ij}\sigma,\ \sigma'_{ij,j}=0\ (\text{在}\Omega\text{中});$$

$$\sigma'_{ij}n_j=\mathscr{V}'\bar{T}_i \text{ (在}S_t\text{上)}\} \tag{3.1}$$

$$V'=\left\{v'_i:\varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2}(v'_{i,j}+v'_{j,i}) \text{ (在}\Omega\text{中)}; v'_i=0 \text{ (在}S_v\text{上)}\right\} \tag{3.2}$$

显然$\Phi^\circ\subset\Sigma'$，$\Phi^*\subset V'$，σ'_{ij}与v'_i完全相互独立。

若假定真正的极限状态为$\Phi(S_{ij},\sigma,v_i,\lambda,\Psi,\mathscr{V},R_i)$，则对于与之邻近的许可状态应有

$$\left.\begin{aligned}&S'_{ij}=S_{ij}+\delta S_{ij},\ \sigma'=\sigma+\delta\sigma,\ v'_i=v_i+\delta v_i\\&\lambda'=\lambda+\delta\lambda,\Psi'=\Psi+\delta\Psi,\mathscr{V}'=\mathscr{V}+\delta\mathscr{V},R'_i=R_i+\delta R_i\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

为此，在扩大了的函数空间Σ'，V'内可以提出

下限定理 对于任意给定的$\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，恒有不等式

$$\mathscr{V}\geqslant\frac{\mathscr{V}'+\max\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}(\mathscr{A}-1)\sum\limits_{\alpha}\int_{\Gamma_\alpha}k[v_i]dS}{\max\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}\mathscr{A}} \tag{3.4}$$

式中$\mathscr{A}$为点函数，

$$\mathscr{A}\overset{\text{df}}{=}\frac{\sqrt{S'_{ij}S'_{ij}}}{\sqrt{2}k},\quad \mathscr{V}'=\mathscr{V}(\sigma'_{ij},v'_i)$$

为变分解，可由(2.17)或(2.19)、(2.21)式给出。

证明 以(3.3)式替换泛函(2.16)中的宗量，利用 Gauss 定理进行积分变换，取

$$U(\Psi')=U(\Psi)+\frac{dU}{d\Psi}\delta\Psi$$

并注意到(2.1)—(2.10)及(2.14)、(2.15)式，整理得

$$\begin{aligned}&\Pi_1(S'_{ij},\sigma',v'_i,\lambda',\mathscr{V}',\Psi',R'_i)\\&=\mathscr{V}-\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda\delta S_{ij}\delta S_{ij}U(\Psi)d\Omega-\int_\Omega f(S'_{ij})U(\Psi')\delta\lambda d\Omega\end{aligned} \tag{3.5}$$

对于任意的变分宗量$S'_{ij},\sigma',v'_i,\lambda',\Psi',\mathscr{V}',R'_i$，进行积分变换后，由$\Pi_1$同样可得到

$$\begin{aligned}&\Pi_1(S'_{ij},\sigma',v'_i,\lambda',\mathscr{V}',\Psi',R'_i)\\&=\mathscr{V}'-\int_\Omega\lambda f(S'_{ij})U(\Psi)d\Omega-\int_\Omega f(S'_{ij})U(\Psi')\delta\lambda d\Omega\end{aligned} \tag{3.6}$$

合并(3.5)、(3.6)二式，并将其中$f(S'_{ij})$展开为

$$f(S'_{ij})=f(S_{ij}+\delta S_{ij})=S'_{ij}S_{ij}-S_{ij}S_{ij}+\frac{1}{2}\delta S_{ij}\delta S_{ij}$$

则有

$$\mathscr{V}'=\mathscr{V}+\int_\Omega\lambda S_{ij}S'_{ij}U(\Psi)d\Omega-\int_\Omega\lambda S_{ij}S_{ij}U(\Psi)d\Omega \tag{3.7}$$

根据Schwartz不等式，应有

$$S_{ij}S'_{ij}\leqslant\sqrt{S_{ij}S_{ij}}\sqrt{S'_{ij}S'_{ij}}=\sqrt{2}k\sqrt{S'_{ij}S'_{ij}} \quad \text{(在}\Omega_p\text{中)}$$

代入(3,7)式，则得

$$\begin{aligned}\mathscr{V}'&\leqslant\mathscr{V}+\int_\Omega\sqrt{2}k\lambda\sqrt{S'_{ij}S'_{ij}}\,U(\Psi)d\Omega-\int_\Omega 2k^2\lambda U(\Psi)d\Omega\\&=\mathscr{V}+\int_\Omega 2k^2(\mathscr{A}-1)\lambda U(\Psi)d\Omega\end{aligned}$$

因为 $\lambda\geqslant 0$，利用积分中值定理并取$(\mathcal{A}-1)$的最大值，则有

$$\mathscr{V}'\leqslant\mathscr{V}+2k^2\max_{\mathcal{A}\in\Sigma'_p}(\mathcal{A}-1)\int_\Omega\lambda U(\Psi)d\Omega \tag{3.8}$$

此处Σ'_p为定义在域 Ω_p 中的 Σ' 集合。因为

$$\begin{aligned}\mathscr{V}=\mathscr{V}\int_{S_t}\bar{T}_iv_idS&=\int_{S_t}\sigma_{ij}n_jv_idS\\&=\int_\Omega[\sigma_{ij,j}v_i+(S_{ij}+\delta_{ij}\sigma)v_{i,j}]d\Omega+\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS\\&=\int_\Omega[S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}U(-\Psi)+S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}U(\Psi)+\delta_{ij}\sigma\dot{\varepsilon}_{ij}]d\Omega+\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS\\&=\int_\Omega S_{ij}\lambda\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}U(\Psi)d\Omega+\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS\\&=2k^2\int_\Omega\lambda U(\Psi)d\Omega+\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS\end{aligned}$$

所以有

$$2k^2\int_\Omega\lambda U(\Psi)d\Omega=\mathscr{V}-\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS \tag{3.9}$$

将（3.9）式代入（3.8）式中整理后下限定理即得证。

注意到在 9 维应力空间中，S'_{ij} 不一定满足屈服条件，$f(S'_{ij})\lesseqgtr 0$；不难验证 $S'_{ij}/\mathcal{A}$ 却总是位于屈服超曲面上的，只是其与 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 间并非满足本构方程；但 S_{ij} 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 间是符合本构方程的，且$f(S_{ij})=0$（在 Ω_p 中）。根据 Drucker 定理，则应有

$$(S_{ij}-S'_{ij}/\mathcal{A})\dot{\varepsilon}_{ij}\geqslant 0\qquad(\text{在 }\Omega_p\text{ 中}) \tag{3.10}$$

$$\because\quad \mathcal{A}\geqslant 0,\ \dot{\varepsilon}_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}=\lambda S_{ij}$$

$$\therefore\quad \lambda S'_{ij}S_{ij}\leqslant\lambda S_{ij}S_{ij}\mathcal{A}=2k^2\mathcal{A}\lambda\qquad(\text{在 }\Omega_p\text{ 中}) \tag{3.11}$$

将（3.11）代入（3.7）式后，同样可得不等式（3.8）.即由此途径，下限定理亦可得证。因此对于完全独立无关的自变函数 $\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，下限定理均严格成立。

上限定理 对于任意给定的 $\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，在不计二阶变分小量范围内，下列不等式成立：

$$\mathscr{V}\leqslant\frac{\mathscr{V}'+\frac{1}{2}\min\limits_{\mathcal{A}\in\Sigma'_p}(\mathcal{A}^2-1)\sum\limits_a\int_{\Gamma_a}k[v_i]dS}{\min\limits_{\mathcal{A}\in\Sigma'_p}(\mathcal{A}^2+1)/2} \tag{3.12}$$

证明 合并（3.5）、（3.6）二式，则有

$$\mathscr{V}'=\mathscr{V}+\int_\Omega\lambda\left(\frac{1}{2}S'_{ij}S'_{ij}-k^2\right)U(\Psi)d\Omega-\int_\Omega\frac{1}{2}\lambda\delta S_{ij}\delta S_{ij}U(\Psi)d\Omega \tag{3.13}$$

略去二次变分小量，则得：

$$\mathscr{V}'=\mathscr{V}+k^2\int_\Omega(\mathcal{A}^2-1)\lambda U(\Psi)d\Omega$$

利用积分中值定理并取（$\mathcal{A}^2-1$）的最小值，则有

$$\mathscr{V}'\geqslant\mathscr{V}+k^2\min_{\mathcal{A}\in\Sigma'_p}(\mathcal{A}^2-1)\int_\Omega\lambda U(\Psi)d\Omega \tag{3.14}$$

将（3.9）式代入上式（3.14）中并经整理后即得证.

至此，本文提出的广义界限定理可表述为

定理 3 对于一切任意给定的许可场变量，$\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，刚塑性介质极限分析的完全解介于下面不等式表达的界限之间

$$\frac{\mathscr{V}'+\max\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}(\mathscr{A}-1)N}{\max\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}\mathscr{A}}\leqslant\mathscr{V}\leqslant\frac{\mathscr{V}'+\frac{1}{2}\min\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}(\mathscr{A}^2-1)N}{\min\limits_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}\frac{1}{2}(\mathscr{A}^2+1)} \tag{3.15}$$

式中$N=\sum\limits_a\int_{\Gamma_a}k[v_t]dS$. 在连续流动场中，$N=0$。

在此定理中，由于放松了屈服条件、不可压缩条件等约束，因此在具体使用上较经典的界限定理更为方便. 根据定理 3，可以提出

推论 I 对于任意的$\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，若

$$\max\frac{1}{2}S'_{ij}S'_{ij}=k^2\qquad\forall S'_{ij}\in\Sigma'_p \tag{3.16}$$

则变分解$\mathscr{V}'$为完全解的下限，即$\mathscr{V}'\leqslant\mathscr{V}$；

推论 II 对于任意的$\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$，若

$$\min\frac{1}{2}S'_{ij}S'_{ij}=k^2\qquad\forall S'_{ij}\in\Sigma'_p \tag{3.17}$$

则变分解$\mathscr{V}'$为完全解的上限，即$\mathscr{V}'\geqslant\mathscr{V}$.

此推论给出了变分解与完全解之间的关系. 特别地，若选择的应力场$\sigma'_{ij}\in\Sigma'_p$恒满足$f(S'_{ij})=0$，则变分式（2.17）即退化为虚功率原理. 此时由于$\mathscr{A}\equiv1$（在Ω_p中），则由定理 3 和虚功率原理将同时给出$\mathscr{V}=\mathscr{V}'$，此就进一步表明了本文公式的正确性. 但应注意，上限定理（3.12）式及推论 II 在不计二阶应力变分小量范围内准确成立，如若应力场选择的太差时，此将引起较大的误差，以至可能由此求得的结果低于完全解. 对于各向异性材料，只要屈服条件可表示成二次齐次形式，以上公式均可适用. 对于非齐次边界条件：$v_i|_{S_v}=\bar{v}_i$，若约束反力R_i为已知，对此固定的Lagrange乘子$\bar{R}_i$，泛函Π_1中最后一项可写成$\int_{S_v}\bar{R}_i\bar{v}_i dS$形式，则$\Pi_1$即转化为满足$v_i|_{S_v}=\bar{v}_i$条件的不完全广义变分形式变分式（2.17）及（2.19）、（2.21）中稍做修正即可适用[12]；定理 3 中N应写成

$$N=\sum_a\int_{\Gamma_a}k[v_t]dS-\int_{S_v}\bar{R}_i\bar{v}_i dS$$

四、应用举例

1. 平冲头压入半无限体

简单起见，选用图示塑性域[6]：

$$\Omega_p=\{r,\ \theta:\ 0\leqslant r\leqslant b,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

Ω_p余集为刚性域，并设定：

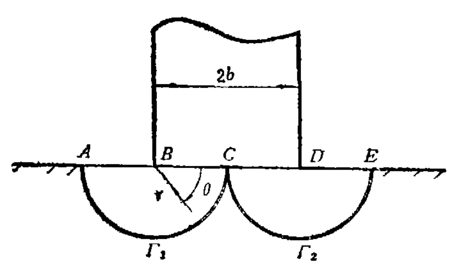

图 1

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_r=\eta(2+\cos\theta),\ \sigma_\theta=\eta(2+2\cos\theta),\ \tau_{r\theta}=\eta\sin\theta\\ v_r=0,\ v_\theta=B\ (\text{在 }\Omega_p\text{ 中});\ v_r=v_\theta=0\ (\text{在 }\Omega_r\text{ 中})\end{array}\right\}\tag{4.1}$$

显然，这样的选择是十分简单的，但$\sigma'_{ij}\in\Sigma'$，$v'_i\in V'$。其中B为任意常数，此可由（2.7）式求得，即由$\int_0^b -Bdr=1$得出$B=-\frac{1}{b}$。此时

$$\mathscr{A}^2=\eta^2\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)/k^2\tag{4.2}$$

$$\max_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}\mathscr{A}=\mathscr{A}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\eta}{k},\quad \min_{\mathscr{A}\in\Sigma'_p}\mathscr{A}^2=\mathscr{A}^2\Big|_{\theta=0,\pi}=\frac{\eta^2}{4k^2}\tag{4.3}$$

注意$\widehat{AC}$与$\widehat{CE}$面为速度间断面，将（4.1）代入（2.18）式，求得$\eta^2=\frac{20}{9}k^2$，代入(2.19)式则求得变分解为$\mathscr{V}'=4.97k$。将求得的结果代入定理3则求得

$$4.37k\leqslant\mathscr{V}\leqslant5.49k\tag{4.4}$$

此问题的完全解由Hill给出：$\mathscr{V}=5.14k$。若采用同样的许可场（4.1），由经典界限定理则得

$$\mathscr{V}_{\text{下}}=4k,\quad \mathscr{V}_{\text{上}}=6.28k$$

足见此较本文给出的界限值（4.4）为差。

2. 均布载荷作用下的轴对称简支圆板

所论体积域为$\Omega=\{r,\ \theta:0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$。为和文献[5]比较起见，设板在极限状态下处于全塑性。在此轴对称弯曲情况下，选择弯矩函数及挠度函数

$$M_r=\eta\overline{M}_r,\quad M_\theta=\eta\overline{M}_\theta\in\Sigma',\quad W\in V'$$

在变分式（2.17）中取$\lambda=\lambda_1$，则有

$$\mathscr{V}'=\text{sta}\,\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{1}{2}\eta(3-\mathscr{A}^2)(-\overline{M}_rW_{,rr}-\overline{M}_\theta W_{,r}/r)rdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^a W\,r\,drd\theta}\tag{4.5}$$

其中

$$\mathscr{A}^2=(\overline{M}_r^2+\overline{M}_\theta^2-\overline{M}_r\overline{M}_\theta)\eta^2/M_T^2\tag{4.6}$$

此时η可由(2.18)式给出

$$\eta^2=\frac{M_T^2\int_0^a\int_0^{2\pi}(-\overline{M}_rW_{,rr}-\overline{M}_\theta W_{,r}/r)rdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^a(-\overline{M}_rW_{,rr}-\overline{M}_\theta W_{,r}/r)(\overline{M}_\theta^2+\overline{M}_r^2-\overline{M}_\theta\overline{M}_r)\,rdrd\theta}\tag{4.7}$$

式中M_T为屈服弯矩。现以文献[5]选用的许可场进行计算，以示比较。

(a) $\overline{M}_r=1-\frac{r^2}{a^2}$，$\overline{M}_\theta=1$，$W=B_1\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$

由(2.7)式求得比率

$$B_1=1\Big/\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)rdrd\theta=\frac{2}{\pi a^2}$$

由(4.6)式给出

$$\mathscr{A}^2=\left(1-\frac{r^2}{a^2}+\frac{r^4}{a^4}\right)\frac{\eta^2}{M_T^2}$$

经(4.7)式求得$\eta=1.095M_T$后，代入(4.5)式即求得变分解$\mathscr{V}'=6.57M_T/a^2$. 另由 $\min\mathscr{A}^2=0.899$ 及 $\max\mathscr{A}=1.095$，将有关结果代入 (3.15) 式，则求得界限值为

$$6M_T/a^2\leqslant\mathscr{V}\leqslant 6.92M_T/a^2 \tag{4.8}$$

若令$\max\mathscr{A}=1$，则求得$\eta=M_T$，代入(4.5)式即得$\mathscr{V}'=6.5M_T/a^2$；若令 $\min\mathscr{A}=1$，则求得 $\eta=\frac{2}{\sqrt{3}}M_T$，代入(4.5) 式即得 $\mathscr{V}'=6.54M_T/a^2$. 根据定理3的推论Ⅰ、Ⅱ，即知此二变分解分别就是完全解的下、上限，即

$$6.5M_T/a^2\leqslant\mathscr{V}\leqslant 6.54M_T/a^2 \tag{4.9}$$

对于同样的许可场(a)，由经典界限定理则得

$$6M_T/a^2\leqslant\mathscr{V}\leqslant 8M_T/a^2 \tag{4.10}$$

比较则见此上、下限相差太大. 应当注意，当$\eta=1.095M_T$及$\eta=2M_T/\sqrt{3}$ 时，$f(M_{ij})>0$，即 $M_{ij}\overline{\in}\Phi^\circ$，但此时 $M_{ij}\in\Sigma'$. 对此弯矩函数，若使用经典的界限定理将导致荒谬的下限值，但应用本文公式却能得到较准确的结果.

(b) $\overline{M}_r=1-\frac{r}{a}$, $\quad\overline{M}_\theta=1$, $\quad W=\left(1-\frac{r}{a}\right)B_2$

此时 $\mathscr{A}^2=\left(1-\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{\eta^2}{M_T^2}$，计算后同样得 $\eta=1.095M_T$，$\mathscr{V}'=6.57M_T/a^2$. 由定理3及其推论将分别得到与(4.8)、(4.9)完全一致的答案.而由经典的界限定理则将给出

$$4M_T/a^2\leqslant\mathscr{V}\leqslant 6.93M_T/a^2 \tag{4.11}$$

(c) $\overline{M}_r=1-\frac{r^2}{a^2}$, $\quad\overline{M}_\theta=1$, $\quad W=\left(1-\frac{r}{a}\right)B_3$

计算得 $\eta=\sqrt{\frac{15}{13}}M_T$，$\mathscr{V}'=6.45M_T/a^2$.由定理3则得到同样的界限值(4.8). 而由经典的界限定理将求得

$$6M_T/a^2\leqslant\mathscr{V}\leqslant 6.93M_T/a^2 \tag{4.12}$$

此问题的准确解为$\mathscr{V}=6.51M_T/a^2$[13].

分析比较以上结果，可见对于简单选取的不同许可场，本文公式能够给出几乎一致的结果，此说明这些公式本身具有较好的稳定性. 这是由于变分式 $\mathscr{V}'$ 和点函数$\mathscr{A}$对许可场有较强的调节能力，因此所求得的结果亦较经典法更接近于准确解. 由经典的界限定理给出的结果(4.10)、(4.11)及(4.12)摆动较大，其上、下界的相对误差$(\mathscr{V}_{上}-\mathscr{V}_{下})/\mathscr{V}$分别为31%、45%及15%；而本文公式给出的界限值(4.9)相对误差仅为0.6%，其中最佳的变分解

$$\mathscr{V}'=6.5\frac{M_T}{a^2}$$

的相对误差为0.15%.

本文在完成过程中曾得到钱伟长教授及研究员潘良儒先生的亲切关怀和指教，并承蒙薛大为教授提出宝贵意见，作者在此一并表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Drucker, D. C., W. Prager and H. J. Greenberg, Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, 4(1952), 381—389.

[2] Prager, W., *An Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Reading, Massachusetts(1959).

[3] 钱令希、钟万勰，论固体力学中的极限分析并建立一个一般的变分原理，力学学报，6,4(1963), 287—303.

[4] Mura, T., W. H. Rimawi and S. L. Lee, Extended theorems of limit analysis, *Quart Appl. Math.*, 23,2(1965).171—179

[5] 王仁、黄文彬、曲圣年、赵祖武、梅占馨、王长兴等，对"固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理"一文的讨论，力学学报，8, 1(1965), 63—79.

[6] 薛大为，建议一组关于极限分析的定理，科学通报，20,4(1975),175—181.

[7] 薛大为，建议一个计及大变形的极限分析定理，1980年全国计算力学会议文集，361—362.

[8] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社出版(1980).

[9] Martin J. B., *Plasticity*: Fundamentals and General Results, The MIT Press (1975).

[10] 彭恒武，包含界面条件在内的变分近似法，科学通报，20, 9(1975), 416—418.

[11] 高扬，一组关于塑性加工中求解极限载荷的公式，北京航空学院科研报告，BH-B754(1981).

[12] 高扬，非连续流动场中极限分析的广义变分原理，合肥工业大学学报，1(1982), 44—51.

[13] Hopkings, H. G. and A. J. Wang(王仁), Load carrying capacities for circular platers of perfectly-plastic material with arbitrary yield condition, *Journal of Mechanics and Physic Solids*, 3, 2(1954),117—129.

Extended Bounding Theorems of Limit Analysis

Gao Yang

(*Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing*)

Abstract

This paper studies the bounding problems of the complete solution of limit analysis for a rigid-perfectly plastic medium, allowing for discontinuity of plastic flow. A generalized variational principle involving conditions of the rigid-plastic interface and the discontinuous surface of a velocity field has been put forward for the mixed-boundary value problem. Based on this principle, a set of variational formulae of limit analysis is established. The safety factors obtained by these formulae lie in between the upper and lower bounds obtained by the classical bounding theorems with the same kinematically and statically admissible field.

Moreover, extended bounding theorems have been derived and proved, which hold for a broader stress and velocity field than the classical admissible field. The corollaries of these theorems indicate the relationship between the variational solution and the complete solution of limit analysis. Applications of these theorems show that a close approximation can be obtained by the proposed method with different admissible fields.