

# 关于求解二相渗流的平面 问题的一类新方法

陈钟祥                      袁益让   王文洽

(石油勘探开发科学研究院)

(山东大学)

(钱伟长推荐, 1981年10月6日收到)

## 摘 要

本文提出一类求解二相平面渗流问题的新方法: 用有限元法求解关于压力分布的椭圆型方程, 然后利用所得的对压力梯度的半解析解, 根据已有的饱和度沿流线传播的精确公式求得饱和度场. 其主要特点和优点是能克服通常的数值模拟方法所具有的数值弥散, 给出准确清晰的水驱油前沿饱和度间断面的位置, 并且完全避免了通常必须与压力方程联立求解或交替求解的饱和度方程, 从而使计算工作量大大减少.

研究二相渗流问题, 其实际背景是用高压泵将水强行注入油层, 使原油从生产井排出, 这是近代采油的一种重要手段. 将水强行注入油层后, 水驱动油层中的石油, 这就是两相渗流问题. 为了对油田合理地进行开发, 了解地下油、水运动规律, 对油田开发来说是十分重要的.

对于这类问题, 通常采用有限差分方法或有限元方法<sup>[1],[2],[3]</sup>. 经过离散化后, 每一步均要解两个联立的代数方程组, 计算工作量大, 特别是油、水前沿不明确, 缺乏其明显的力学特征.

本文提出一类新的方法, 在已知  $t_n$  时刻的  $P^n(x, y)$ ,  $S^n(x, y)$  的条件下, 求  $t_{n+1}$  时刻的  $P^{n+1}(x, y)$ ,  $S^{n+1}(x, y)$  对压力方程采取不完全三次 Hermite 型有限元, 用很少的单元. 即可得到高精度的压力函数  $P^{n+1}(x, y)$ ,  $\text{grad } P^{n+1}$  的半解析解, 对于饱和度方程不是直接求离散解, 而是利用由特征线方法导出的饱和度沿流线移动的十分准确的公式<sup>[4]</sup>, 并充分利用求解压力方程所得的半解析解, 从而得出饱和度场的数值结果, 完全避免了再次解一个代数方程组.

从数值分析及模型试算的结果来看, 它比传统的方法更能真实地反映问题的力学特征. 能清晰地反映出油、水前沿的推进情况, 这对生产实际无疑是十分重要的. 由于充份利用了压力及其梯度的半解析解, 同传统的方法比较, 计算时间大大缩短且提高了精度.

## 一、数学模型的提法

在忽略毛细管压力差时，油、水两相不可压缩且互不相溶的液体，在各向同性均质多孔介质中渗流的运动方程和连续性方程分别为：

$$\vec{W}_o = - \frac{k k_{ro}(S)}{\mu_o} \text{grad } P \quad (1.1)$$

$$\vec{W}_w = - \frac{k k_{rw}(S)}{\mu_w} \text{grad } P \quad (1.2)$$

$$\text{div } \vec{W} + \Phi \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div } \vec{W}_w - \Phi \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

其中  $\vec{W}_o$ ,  $\vec{W}_w$  分别为油相、水相渗流速度,  $P = P(x, y, t)$ ,  $S = S(x, y, t)$  分别是压力函数和饱和度函数,  $k$ ,  $\Phi$  是多孔介质的绝对渗透率和孔隙度,  $k_{ro}(S)$  和  $k_{rw}(S)$  分别为油相和水相的相对渗透率,  $\mu_o$ ,  $\mu_w$  分别是油相、水相粘度。

由式(1.1)、(1.2)和式(1.3)、(1.4)可得：

$$\vec{W} = -k \left[ \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} \right] \text{grad } P$$

$$\text{div } \vec{W} = 0$$

其中  $\vec{W} = \vec{W}_o + \vec{W}_w$  是合成渗流速度, 最后导出压力函数  $P$  和饱和度函数  $S$  所满足的封闭方程组：

$$\text{div} \left\{ k \left[ \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} \right] \text{grad } P \right\} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{\Phi} f'(S) k \left[ \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} \right] \text{grad } P \cdot \text{grad } S = 0 \quad (1.6)$$

此处  $f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} / \left( \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} \right)$

方程(1.5)对  $P$  是椭圆型方程, 方程(1.6)对  $S$  是一阶双曲型方程。对  $P$  的边界条件可以认为是不渗透的, 将井点看成源汇点, 用  $\delta$ -函数来处理。对饱和度方程还要给出初始条件。

## 二、关于压力方程的三次Hermite有限元方法

压力函数  $P^{n+1}(x, y)$  满足下述方程和边界条件：

$$\nabla \cdot [M(S^n) \nabla P^{n+1}] = \sum_i Q_i \delta(x - x_i) (y - y_i) \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{\partial P^{n+1}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

此处  $(x_i, y_i)$  是井点坐标,  $Q_i$  为井点产量,  $\Omega$  为平面区域,  $\Gamma$  为边界围道, 微分算子

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $M(S^n) = k \left( \frac{k_{ro}(S^n)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(S^n)}{\mu_w} \right)$ , 由于  $S^n(x, y)$  已知, 故  $M(S^n)$  也为已知函数.

首先按一般有限元方法对区域进行三角剖分, 求出在节点处的函数值  $P^{n+1}$  以及  $\text{grad} P^{n+1}$  来, 并得出半解析解, 以备计算饱和度函数  $S^{n+1}(x, y)$  时应用. 我们采用不完全三次 Hermite 有限元.

问题(2.1)、(2.2)的等价变分问题为

$$J(P) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} M(S^n) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \sum_i (-Q_i P) \quad (2.3)$$

设  $u(x, y)$  是单元  $\Delta_e$  上一个三次多项式, 它具有十个系数  $u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + \dots + a_{10} y^3$ , 它由 9 个参数  $P_1, p_1, q_1, P_2, p_2, q_2, P_3, p_3, q_3$  唯一确定, 即

$$u(A_i) = P_i, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(A_i) = p_i, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A_i) = q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

在中心  $A_0$  处的值由其余 9 个值的线性组合决定.

$$\begin{aligned} u(A_0) = & \frac{1}{3} (P_1 + P_2 + P_3) + \frac{1}{18} [(x_2 + x_3 - 2x_1)p_1 + (y_2 + y_3 - 2y_1)q_1 \\ & + (x_1 + x_3 - 2x_2)p_2 + (y_1 + y_3 - 2y_2)q_2 \\ & + (x_1 + x_2 - 2x_3)p_3 + (y_1 + y_2 - 2y_3)q_3] \end{aligned} \quad (2.4)$$

此处  $A_i (i = 1, 2, 3)$  为单元  $\Delta_e$  的三顶点, 如图(1)所示,  $(x_i, y_i)$  为对应点的坐标.

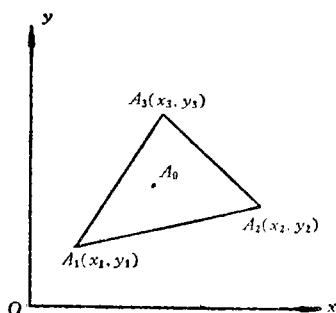


图1  $(x, y)$  平面图

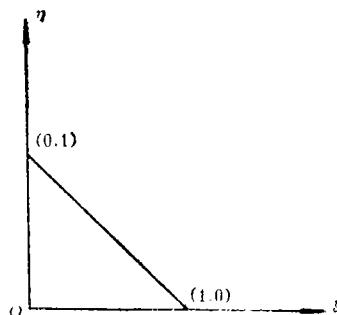


图2  $(\xi, \eta)$  平面图

下面讨论其单元刚度分析, 为此考虑

$$\Phi(P) = \iint_{\Delta_e} \frac{1}{2} M(S^n) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.5)$$

首先考虑  $u(x, y)$  为完全三次多项式, 其系数由  $P_i, p_i, q_i (i = 1, 2, 3), P_0$  决定. 作坐标变换



下面依次讨论积分项

$$\iint_T M(S^n) a \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta, \quad 2 \iint_T M(S^n) b \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta, \quad \iint_T M(S^n) c \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta$$

对于积分项  $\iint_T M(S^n) a \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta$

取  $M(S^n) = (1-\xi)(1-\eta)M_1 + \xi M_2 + \eta M_3, \quad M_i = M(S^n(A_i)), \quad (i=1, 2, 3), \quad \frac{\partial r}{\partial \xi} = \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_6\eta + 3\alpha_7\xi^2 + 2\alpha_8\xi\eta + \alpha_9\eta^2 = l^T \alpha$   
 $l = (0, 1, 0, 2\xi, \eta, 0, 3\xi^2, 2\xi\eta, \eta^2, 0)^T$

若记  $L_{i,j} = \iint_T [(1-\xi)(1-\eta)M_1 + \xi M_2 + \eta M_3] l_i l_j d\xi d\eta, \quad L = \{L_{i,j}\}.$

经计算可得

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(M_1 + M_2 + M_3) & 0 & \frac{1}{12}(M_1 + 2M_2 + M_3) & \frac{1}{24}(M_1 + M_2 + 2M_3) & 0 & \frac{1}{20}(M_1 + 3M_2 + M_3) & \frac{1}{60}(M_1 + 2M_2 + 2M_3) & \frac{1}{60}(M_1 + M_2 + 3M_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15}(M_1 + 3M_2 + M_3) & \frac{1}{60}(M_1 + 2M_2 + 2M_3) & 0 & \frac{1}{20}(M_1 + 4M_2 + M_3) & \frac{1}{90}(M_1 + 3M_2 + 2M_3) & \frac{1}{180}(M_1 + 2M_2 + 3M_3) & \frac{1}{180}(M_1 + 2M_2 + 3M_3) & \frac{1}{180}(M_1 + 2M_2 + 3M_3) & 0 \\ \frac{1}{60}(M_1 + M_2 + 3M_3) & 0 & \frac{1}{120}(M_1 + 3M_2 + 2M_3) & \frac{1}{180}(M_1 + 2M_2 + 3M_3) & \frac{1}{180}(M_1 + 2M_2 + 3M_3) & \frac{1}{120}(M_1 + M_2 + 4M_3) & \frac{1}{120}(M_1 + M_2 + 4M_3) & \frac{1}{120}(M_1 + M_2 + 4M_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{70}(3M_1 + 15M_2 + 3M_3) & \frac{1}{140}(M_1 + 4M_2 + 2M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 3M_2 + 3M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 3M_2 + 3M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 3M_2 + 3M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 2M_2 + 4M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 2M_2 + 4M_3) & \frac{1}{420}(M_1 + 2M_2 + 4M_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

对 称









$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{\Phi} f'(S) \vec{W} \cdot \text{grad } S = 0 \quad (3.2)$$

它是对  $S$  的一阶拟线性双曲型方程, 其对应的特征方程为

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = -\frac{1}{\Phi} f'(S) \vec{W} \quad (3.3)$$

因此沿特征线有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \text{grad } S = 0 \quad (3.4)$$

故沿特征饱和度不变, 饱和度的传播速度为<sup>[4]</sup>

$$\vec{V} = -\frac{1}{\Phi} f'(S) \vec{W} \quad (3.5)$$

此式可写  $\frac{dt}{dl} = \frac{\Phi}{f'(S)|\vec{W}|}$ , 并由此推得

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{f'(S)} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{\Phi(l)}{|\vec{W}(l)|} dl \quad (3.6)$$

其中  $l$  为沿特征移动的距离,  $l_n$  是  $t_n$  时刻饱和度  $S$  的位置,  $l_{n+1}$  是  $t_{n+1}$  时刻  $S$  传播到的位置, 利用梯形积分公式

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2f'(S)} \left[ \frac{\Phi(l_n)}{|\vec{W}^n(l_n)|} + \frac{\Phi(l_{n+1})}{|\vec{W}^{n+1}(l_{n+1})|} \right] (l_{n+1} - l_n) + O((l_{n+1} - l_n)^3)$$

于是可得数值公式

$$l_{n+1} - l_n = \frac{2f'(S)}{\frac{\Phi(l_n)}{|\vec{W}^n(l_n)|} + \frac{\Phi(l_{n+1})}{|\vec{W}^{n+1}(l_{n+1})|}} (t_{n+1} - t_n) \quad (3.7)$$

若记  $l_{n+1}^* = l_n + f'(S) \left[ \frac{\Phi(l_n)}{|\vec{W}^n(l_n)|} \right]^{-1} (t_{n+1} - t_n)$ , 于是得实际计算公式

$$l_{n+1} - l_n = \frac{2f'(S)}{\frac{\Phi(l_n)}{|\vec{W}^n(l_n)|} + \frac{\Phi(l_{n+1}^*)}{|\vec{W}^{n+1}(l_{n+1}^*)|}} (t_{n+1} - t_n) \quad (3.8)$$

此处  $\vec{W}^n(l_n) = -M(S^n) \text{grad } P^n(l_n)$ ,  $\vec{W}^{n+1}(l_{n+1}^*) = -M(S^n) \text{grad } P^{n+1}(l_{n+1}^*)$ .

在实际计算时我们这样处理节点  $A$  处的饱和度的传播: 为了简单起见, 过此点的流线可以用以  $\vec{W}^{n+1}(A)$  为方向的直线段来代替, 于是得  $l_{n+1}^* = l_n + \frac{f'(S)}{\Phi(A)} |\vec{W}^{n+1}(A)| \Delta t_n$ , 由此可以初步定出饱和度为  $S$  的点  $A$  经过  $\Delta t_n$  时刻后传播到的位置  $A'$ , 在此点算出  $\Phi(A')$ ,  $\vec{W}^{n+1}(A')$ , 由公式

$$l_{n+1} - l_n = \frac{2f'(S)}{\frac{\Phi(A)}{|\vec{W}^n(A)|} + \frac{\Phi(A')}{|\vec{W}^{n+1}(A')|}} \Delta t_n$$

由此定出点  $A'$ , 即为我们最后求得的饱和度为  $S$  的点  $A$  经  $\Delta t_n$  时刻后传播到的位置, 对所有单元的节点均作这样的计算, 再作插值, 即可求出  $t_{n+1}$  时刻的饱和度场  $S^{n+1}(x, y)$ .

在油水前沿饱和度分布函数  $S(x, y)$  是间断的, 利用间断关系, 即下列公式<sup>[4]</sup>

$$\frac{df_w(S_*)}{dS} = \frac{f_w(S_*) - f_w(S_c)}{S_* - S_c} \quad (3.9)$$

可以算出前缘饱和度  $S_*$ ，此处  $S_c$  是束缚水饱和度。

根据(3.9)可以这样确定油水前缘饱和度  $S_*$ 。过  $S=S_c, f_w=0$  作曲线  $f_w=f_w(S)$  的切线。切点的横坐标即为  $S_*$ 。

在计算过程中，我们用到函数  $f'(S)$ ，而在实际问题中它是由  $k_{ro}(S), k_{rw}(S)$  的离散实验数据插值得到，一般可用三次样条函数逼近，可以达到很高的精度：

$$f'(S) - S'_3(S) = O(h^3) \quad (0.27 \leq S \leq 0.72)$$

而且在利用电子计算机计算时，简单且方便。

### 四、模型试算及结果分析

表1 渗透率  $k_{ro}(S), k_{rw}(S)$  及  $f(S)$

S	$k_{ro}(S)$	$k_{rw}(S)$	$f(S)$
0.27	0.75	0.000	0.000
0.30	0.480	0.002	0.1724
0.33	0.350	0.005	0.4167
0.36	0.265	0.0085	0.6159
0.39	0.197	0.0125	0.7603
0.42	0.149	0.017	0.8509
0.45	0.115	0.0215	0.9034
0.48	0.085	0.0265	0.9397
0.51	0.061	0.0315	0.9627
0.54	0.045	0.0370	0.9763
0.57	0.030	0.0425	0.9861
0.60	0.022	0.0485	0.9910
0.63	0.015	0.055	0.9946
0.66	0.010	0.0615	0.9968
0.69	0.006	0.0685	0.9983
0.72	0.000	0.0755	1.000

我们采用油田提供的地质参数(表1, 表2), 对年开采率2%试算了四年, 时间步长  $\Delta t$  取为1年, 其结果用图表示如下(图3~5)。

表2 基本地质参数

名称	记号	数值
孔隙度	$\phi$	0.3
水粘度	$\mu_w$ (厘泊)	0.4
油粘度	$\mu_o$ (厘泊)	20
绝对渗透率	$k$ (达西)	2

经计算得知, 0.4的等饱和度线为水驱前缘。

对于二相渗流问题我们提出新的数值解法和传统的数值解法<sup>[1], [2]</sup>相比有如下特点:

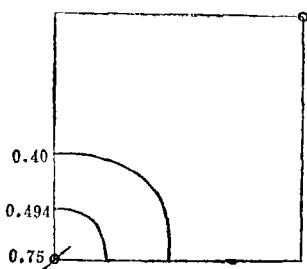


图3 初始分布

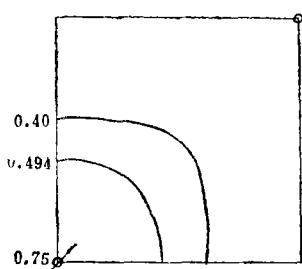


图4 注水采油二年后平面水线图

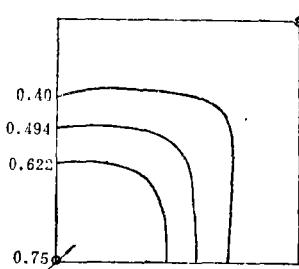


图5 注水采油四年后平面水线图

1. 对饱和度方程, 不采用传统的差分方法或有限元方法求解, 而采用饱和度沿流线的传递的公式。这样能清晰地反映油水前缘的推进情况, 同时由于避免了求解一个代数方程组并且充分利用了关于压力  $P(x, y), \text{grad} P$  的半解析解。因此同传统的方法比较, 计算时间大大缩短, 且提高了精度。

2. 利用压力方程对时间  $t$  的不敏感性, 我们采取了不完全三次有限元和大步长。既保

持了一定的精度，又节省了计算时间，而且还保持了有限元方法对复杂边界条件和不规则井网布局处理方便的优点。

3. 在计算过程中采用了浮动网格，即在开始计算时，按初始水线的位置划分网格，在计算过程中，网格随水线的推进而浮动，这样使网格比较真实地逼近水线的分布，减少了计算中的插值，提高了精度。

4. 从模型试算来看，结果平稳可靠，水驱前缘推进合理。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Bjordammen, J. and K. H. Coats, Comparison of alternating-direction and successive overrelaxation techniques in simulation of reservoir fluid flow, *S. P. E. J.*, 9, 1 (March 1969), 47—58.
- [ 2 ] Pinder, G. F. and W. G. Gray, Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic, New York, (1977).
- [ 3 ] 袁益让、王文洽, 关于油水两相渗流平面弹性驱动问题的有限元方法, 石油学报, 1, 4(1980), 65—76.
- [ 4 ] 陈钟祥、袁曾光, 关于二相渗流的多维问题, 力学学报, 1(1980), 12—17.

## On a New Kind of Methods to Solve the Plane Problems of Two-Phase Flow Through Porous Media

Chen Zhong-xiang

*(Scientific Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Beijing)*

Yuan Yi-rang Wang Wen-qia

*(Shandong University, Jinan)*

### Abstract

This paper presents a new kind of methods to solve the plane problems of two-phase flow in porous media. The elliptical partial differential equation for pressure distribution is solved by finite element method, and then the semi-analytical solution for pressure gradient is used to determine the new saturation field according to the existing exact formula describing the saturation propagation along the streamlines. The main distinguishing feature and advantage of this kind of methods are able to overcome the numerical dispersion which is inherent in the ordinary numerical simulation methods, and, thereby, to give a precise and clear-cut position of the saturation discontinuity in the water-oil displacement front. Moreover, the saturation equation, which should commonly be solved simultaneously or alternatively with the pressure equation, is completely avoided, so that the computer time is greatly reduced.