应用数学和力学，第4卷第4期（1983年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

超静定桁架在多工况下的满应力设计(I)*

胡 定 钟

（吉林大学数学系，1981年2月23日收到）

摘 要

本文研究无病态杆的超静定桁架的杆数、自由度数和实现满应力的工况数之间的关系. 文中不仅修正了 R. H. Gallagher等人的结论，而且阐述了对工况性态（数目、大小和方式）的选择条件. 指出某些反例恰恰是违背工况选择原则的后果.

一、前 言

满应力设计是结构设计的传统概念，它要求桁架的每杆至少能在规定的某个工况下其应力达到材料的许可应力. 满应力设计只考虑对构件的应力约束条件. 满应力设计的传统任务是限于结构的材料常数、结构的几何形状已定的情况下来选择构件的截面面积. 应力比方法是传统的计算方法.

满应力设计，一般而言，不仅是最优设计的一个良好起始点[1],[2]，而且在一定条件下就是最优的结构设计[3]. R. L. Barnett和P. C. Herrmann[4]以及J. B. B. Owen[5]曾研究过单组工况的情形. 作者[6]和胡守信[7]，曾把对桁架杆件的应力约束条件转化为对节点独立位移的约束条件.

本文是[6]的推广，研究多工况下超静定桁架的满应力设计问题. E. Traum和 W. Zalewski[8], P. Dayaratnam和S. Patnaik[9],[10]，以及R. H. Gallagher[11]都曾研究过桁架满应力设计中的杆数n、自由度数m和工况数p的关系. 文献 [11]认为，实现满应力的工况数目是 $p\geqslant\frac{n}{m}$. 然而，由于他仅从满应力设计迭代方法收敛的角度出发，毫未顾及到工况性态（大小与方式）的要求，故数目 $p\geqslant\frac{n}{m}$是偏大的. 可以举出反例[12],[13]，或者 $p\geqslant\frac{n}{m}$不能实现满应力，或者尽管 $p<\frac{n}{m}$却实现了满应力[6].

本文将工况性态（数目、大小和方式）在满应力设计中全局的、统一的考虑. 在[6]的基础上、进一步阐述位移允许区域V——通过对称正定线性变换算子 (B^TKB)——与其对应的载荷允许区域Ω的关系. 文中首先研究桁架是否“病态”. 给出判别桁架“病态”的充要条件. 在适当调整各杆的材料常数(E_i,σ_i^0)、形状参数(b_{ij})和杆长(l_i)之后，可以消除桁架的

*钟万勰推荐.

"病态".其次，对无病态的桁架，文中引进下列诸概念：应力集度 s；满应力度数 r；满应力位移基底矢量$\{u^i\}_{i=1}^r$；满应力载荷基底矢量$\{P^i\}_{i=1}^r$. 从而将问题提法归结为正反两个互逆的问题——正问题和逆问题．指出实现满应力设计的最少工况数目是桁架本身的满应力度数，即$p=r\left(\leqslant\frac{n}{m}\right)$. 本文特别就自由度$m=2$的桁架，详尽地论述了对工况性态的要求、明确指出：在最少工况数目$p=r$确定之后，工况性态的选择范围是二维载荷空间中的一个无限角形开区域与一条半无限直线．或者表为三维空间的一个无限角形开区域．文[12]、[13]的反例，正是违背工况性态选择原则的结果，并非源于该例工况数目 $p=2$的不当．

对于自由度$m>2$的情况将在另文研究．

二、问题的概述

众所周知，由n杆组成的具有m个自由度的桁架设计问题，可归结为求解方程组

$$B^TF=P \tag{2.1}$$

$$F=K\delta \tag{2.2}$$

$$\delta=Bu \tag{2.3}$$

式中．符号

$F=(F_1,F_2,\cdots,F_n)^T$ 是杆件内力列矩阵．上角"T"代表转置；$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)^T$是杆件伸长量列矩阵；$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T$是桁架节点独立位移的列矩阵；$P=(P_1,P_2,\cdots,P_m)^T$是桁架节点处独立外载荷的列矩阵；

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots b_{nm} \end{bmatrix}$$

是表征桁架外形的$n\times m$阶的形状参数矩阵．B的第i行 $B^i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im})$ 对应着第 i 杆 L_i的形状参数．B的秩数为m．B的任意m个线性无关的行向量称为结构的一个静定基；

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & & 0 \\ & k_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix} \qquad k_{ii}=\frac{E_iA_i}{l_i}>0$$

是主对角线非零 $k_{ii}>0$，其余均为零元素的桁架的$n\times n$阶刚度矩阵．第 i 杆L_i 的弹性模量为E_i，许可应力为σ_i°，杆长为l_i，横截面面积为A_i，线刚度为k_{ii}.

应力约束条件是

$$|\sigma_i|\leqslant\sigma_i^\circ \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

使用节点的独立位移来表示平衡方程(2.1)和应力约束条件(2.4)，有

$$(B^TKB)u=P \tag{2.5}$$

$$\left|\frac{E_i}{l_i}(B^iu)\right|\leqslant\sigma_i^\circ \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.6}$$

引进无量纲的量

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_i=\frac{u_i}{l}, \quad \bar{P}_i=\frac{P_i}{P} \\ \bar{k}_{ii}=k_{ii}\frac{l}{P}, \quad c_i=\frac{\sigma_i^\circ l_i}{E_i l} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

和矩阵$\bar{D}$，它的第i行元素是

$$D^i=\frac{1}{c_i}B^i=\frac{1}{c_i}(b_{i1},b_{i2},\cdots.b_{im}) \tag{2.8}$$

则(2.5)、(2.6)两式可表为

$$(B^T\bar{K}B)\bar{u}=\bar{P} \tag{2.9}$$

$$|B^i\bar{u}|\leqslant c_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.10}$$

式中，l是某特征尺寸，比如可取某杆的长度；P是某特征载荷，比如可取某载荷或某载荷的一个分量.

位移$\bar{u}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_m)^T$和载荷$\bar{P}=(\bar{P}_1,\bar{P}_2,\cdots,\bar{P}_m)^T$分别构成$m$维的位移空间和载荷空间,方程(2.9)代表由$\bar{u}$空间，通过正定对称线性算子$(B^T\bar{K}B)$，到$\bar{P}$空间的一对一的映射，原点对应原点. 也可理解为$m$维空间中自身的一个坐标变换.

为了书写的方便，往后，仍把无量纲化的量$\bar{u}$,$\bar{P}$,$\bar{K}$,…记为$u,P,K,\cdots$.

定义 1 m维空间中，集合$V_i=V_i\{u;\ |B^iu|\leqslant c_i\}$中的点$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T$称为第$i$杆的允许位移，或者称为允许位移矢量.

显然，集合V_i是关于原点对称的、相互平行的两个超平面$B^iu=c_i$，$B^iu=-c_i$所夹成的带形区域. 它边界面上的点u. 使得第i杆达到许可应力σ_i°,集合V_i之外的点使第i杆破坏.

定义 2 在m维空间中，集合$V_i(i=1,2,\cdots,n)$的交集$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i$ 称为桁架的位移u的允许区域. V中的点u称为允许位移（或称允许位移矢量）. V的边界∂V称为位移约束曲面（它是由若干超平面组成).

显然、位移允许区域V是关于原点对称的、封闭的、凸的多面体. 边界∂V上的点将至少使一杆达到满应力. ∂V的角点位移u^*将使与经过该点的满应力超平面相对应的各杆同时实现满应力. 记其杆数为s，因B的秩数为m、故$m\leqslant s\leqslant n$.

定义 3 在满足应力约束条件$|\sigma_i|\leqslant\sigma_i^\circ(i=1,2,\cdots,n)$之下,无论怎样的工况均不能使桁架某杆$L_i$达到满应力、则称该杆$L_i$为此桁架的"病态杆"、此桁架称为病态桁架.

定理 1 桁架的第i杆L_i为病态杆的充要条件是至少存在第j杆L_j、和某一位移u°，使得$|B^iu^\circ|=c_i$，$|B^ju^\circ|>c_j$.

定理的几何意义是说：第i杆为病态杆的充要条件是它的一对满应力超平面永远位于位移允许区域V的外部而不与V相接触（相交或相切）.

再根据胡守信[7]的定理1，立刻得到

定理 2 桁架无病态杆的充要条件是对任意一组静定基$L_{i_1}, L_{i_2},\cdots L_{i_m}$（相应的形状参数行列式为$\det D_{i_1i_2\cdots i_m}$）和任意的另一杆$L_j$ ($j\neq i_1,i_2,\cdots,i_m$)（相应的形状参数为$D^j=\frac{1}{c_j}B^j$），总有下面的不等式成立

$$|\det D_{ji_2\cdots i_m}|+|\det D_{i_1ji_3\cdots i_m}|+\cdots+|\det D_{i_1i_2\cdots j}|\geqslant|\det D_{i_1i_2\cdots i_m}| \tag{2.11}$$

定理的几何意义是位移允许区域 V 与每杆的满应力超平面 $|D^i u|=1(i=1,2,\cdots,n)$ 必相接触。

区域V是由材料常数 (E_i,σ_i^0)、形状参数(b_{ij})和杆长l_i所唯一决定的。边界∂V 的构成能直接判别桁架是否病态。病态桁架是不能实现满应力的。但适当的调整上述诸量就可以清除"病态"成为"正常"桁架。

本文下面的讨论是建立"正常"桁架的满应力设计问题。

定义 4 V的边界∂V的角点所含满应力超平面的数目s，$m\leqslant s\leqslant n$，称为桁架的一个应力集度。

因此，与应力集度s所对应的位移u^s，可在工况$P^s=(B^TKB)u^s$之下，使 s 根杆实现满应力。令V的角点中、最大的应力集度为s_1，相应的角点位移为u^1；其余的$(n-s_1)$ 根杆在 V 的角点中最大应力集度为s_2，相应的角点位移为u^2；再余下的 $(n-s_1-s_2)$ 根杆的最大应力集度为s_3，相应角点位移为u^3；…．若注意到V是关于原点O对称，超平面 $u^1—O—(-u^1)$将V平分为两部分，故上述的选择$s_2,s_3\cdots$和$u^2,u^3,\cdots$只需在其一侧进行下去，最后直到这一侧的位移约束曲面上至少有一点属于所选取的角点位移。这样，由∂V得到一组角点位移 $u^1,u^2,\cdots,u^r$和相应的应力集度$s_1,s_2,\cdots,s_r$，且$n\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_r\geqslant 1$。

定义 5 m维空间中，集合

$$\Omega=\Omega\{P;\ \ P=(B^TKB)u,\ \ u\in V\}$$

称为载荷允许区域。

显然，Ω是m维空间中关于原点O对称的、封闭的、凸的多面体。Ω与V通过正定对称线性算子 (B^TKB) 构成一对一映射。边界$\partial\Omega$与边界∂V相对应。

定义 6 根据V的应力集度$n\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_r\geqslant 1$所确定的位移 $u^1,u^2,\cdots,u^r$ 称为桁架的满应力位移基底。与之对应的Ω中的载荷 $P^i=(B^TKB)u^i$ $(i=1,2,\cdots,r)$称为桁架的满应力载荷基底。数目r称为桁架的满应力度数。

尽管$u^1,u^2,\cdots,u^r$的选择一般而言并不唯一，但是，数目r，即满应力度数，却是由桁架本身所唯一决定的。

定理 3 设正常桁架的应力集度为$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_r\geqslant 1$，与之相对应的位移基底为 $u^1,u^2,\cdots,u^r$，则实现满应力的最少工况数目p为桁架的满应力度数r，$p=r$。且工况是载荷基底$P^i=(B^TKB)u^i$ $(i=1,2,\cdots,r)$。

显然，由于应力集度 $s_1,s_2,\cdots,s_r$ 的存在，故 $p=r\leqslant\dfrac{n}{m}$。当且仅当$s_1=s_2=\cdots=s_r=m$时，即得Gallagher[11]的结论：

$$p=r=\begin{cases}\dfrac{n}{m} & \text{当}m\text{能整除}n\\[2ex] \left[\dfrac{n}{m}\right]+q & \text{当}m\text{不能整除}n\end{cases}\tag{2.12}$$

式中，q 为小于 m 的某正整数。$\left[\dfrac{n}{m}\right]$代表$\dfrac{n}{m}$的最大整数值。

冯元生[12]的反例就是违背载荷的选择原则导致否定$p=2$的正确结论的。

两个互逆的问题。

(1) 第一问题——正问题：对完全确定的正常桁架（已知 E_i, σ_i°, b_{ij}, l_i 和 A_i），应至少需要怎样的工况性态（数目、大小和方式）才能实现桁架的满应力？若增多工况，应按何种规律才不致破坏原桁架的满应力设计要求？

(2) 第二问题——逆问题：对给定 E_i, σ_i°, b_{ij} 和 l_i 的待确定截面面积 A_i 的桁架，应怎样恰当的给定工况性态（数目、大小和方式），才有可能选择杆系的面积 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得刚好在这组工况下桁架实现满应力设计？

关于第一问题——正问题的回答是简单的。因为这时位移允许区域 V 是确定的，$s_1,s_2,\cdots,s_r$ 和 $u^1,u^2,\cdots,u^r$ 是已知的，故最少的工况数目 $p=r$。且工况性态为

$$P^i=(B^TKB)u^i \qquad (i=1,2,\cdots,r) \tag{2.13}$$

若增多工况，则只要载荷位于与 V 对应的载荷允许区域 Ω 内即可。

关于第二问题——逆问题，本文仅就 $m=2$ 的情况详细讨论，$m>2$ 的情况在另文研究。

三、自由度 m＝2 的平面桁架

图 1 表示 $m=2$ 的 n 杆正常桁架的位移允许区域 V，应力集度为 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_r\geqslant 1$，满应力度数是 r，$r\leqslant\dfrac{n}{m}=\dfrac{n}{2}$。当且仅当 $s_1=s_2=\cdots=s_r=2$ 时，有

$$p=r=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{当}n\text{为偶数时}\\ \left[\dfrac{n}{2}\right]+1 & \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases} \tag{3.1}$$

例 1 （正问题）图 2 所示 5 杆桁架，已知参数（为简单起见）

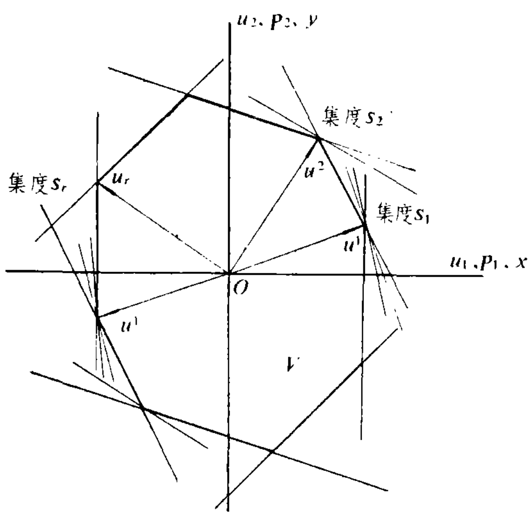

图 1

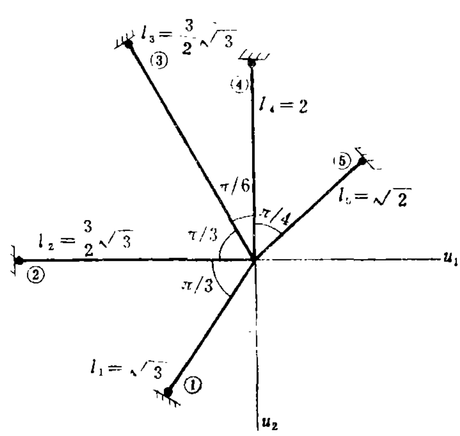

图 2

$$\left.\begin{aligned}&c_1=\sqrt{3},\quad c_2=\frac{3}{2}\sqrt{3},\quad c_3=\frac{3}{2}\sqrt{3}\\&c_4=2,\qquad c_5=\sqrt{2}\\&k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=1\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

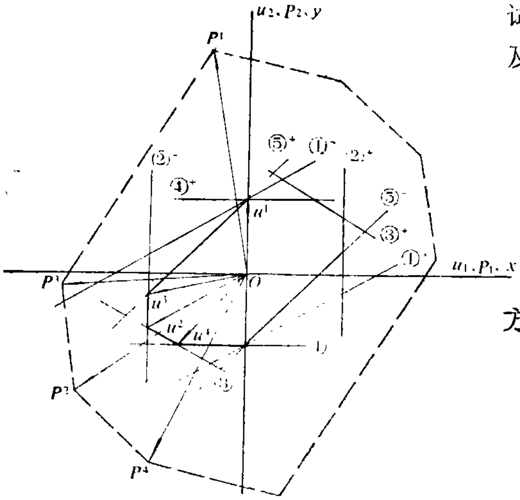

图 3

试求满应力度数 r，满应力位移基底和载荷基底以及载荷允许区域 Ω.

解：形状参数矩阵

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \tag{b}$$

方程(2.10)表示的位移约束方程为

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{1}{2}u_1-\frac{\sqrt{3}}{2}u_2\right|\leqslant\sqrt{3}, \quad |u_1|\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \left|\frac{1}{2}u_1+\frac{\sqrt{3}}{2}u_2\right|\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}, \quad |u_2|\leqslant 2 \\ \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}u_1+\frac{\sqrt{2}}{2}u_2\right|\leqslant\sqrt{2} \end{array}\right\} \tag{c}$$

位移允许区域V如图3的实线框内部，角点$u^1=(0\quad 2)^T$，$u^2=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\quad -\frac{3}{2}\right)^T$的应力集度分别是$s_1=3$，$s_2=2$。因此，桁架的满应力度数$r=2$，从而 $p=2$。与 u^1，u^2 对应的满应力载荷基底是 $P^1=(B^TKB)u^1=(-1\quad 6)^T$，$P^2=\left(-\frac{3}{4}(4\sqrt{3}-1)\quad -\frac{3}{4}(6-\sqrt{3})\right)^T$。载荷允许区域$\Omega$是图3的虚线框内部。

现在来研究第二问题——逆问题。

这时，由于V已知，故满应力度数r和满应力位移基底u^1，u^2，…，u^r 已知。怎样恰当的给定满应力载荷基底 P^1，P^2，…，P^r，才能存在正定对称线性算子 (B^TKB)，使得

$$P^i=(B^TKB)u^i \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

成立呢？

注意到位移空间与载荷空间都是二维的，二维空间的基底矢量是两个（不平行），因此，不妨取u^1，u^2 和 P^1，P^2 作为它们的基底矢量；此外，算子 $(B^T KB)$ 是二阶的，含有三个待定的元素。

分两步来研究

(i) 设$n=3$，一次静不定桁架。要求选择的三杆刚度系数是$k_{11}>0$，$k_{22}>0$，$k_{33}>0$。

将已知的位移 $u^1=(u_{11}\quad u_{12})^T$，$u^2=(u_{21}\quad u_{22})^T$ 和拟给定的工况 $P^1=(P_{11}\quad P_{12})^T$，$P^2=(P_{21}\quad P_{22})^T$用待定的对称正定线性算子$(B^TKB)$联系成矩阵方程

$$(B^TKB)(u^1\quad u^2)=(P^1\quad P^2) \tag{3.2}$$

u^1，u^2为基底，故逆矩阵$(u^1\quad u^2)^{-1}$存在，从而，有

$$(B^TKB)=(P^1\quad P^2)(u^1\quad u^2)^{-1} \tag{3.3}$$

或者表为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} b_{i1}^2 k_{ii} & \sum_{i=1}^{3} b_{i1} b_{i2} k_{ii} \\ \sum_{i=1}^{3} b_{i1} b_{i2} k_{ii} & \sum_{i=1}^{3} b_{i2}^2 k_{ii} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\det(u^1\ \ u^2)}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{22} & -u_{21} \\ -u_{12} & u_{11} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

因此，对称正定性质要求

(a) 正定性条件

$$\frac{\begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}}{\det(u^1\ \ u^2)}>0 \qquad \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}}{\det\ (u^1\ \ u^2)}>0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\det(P^1\ \ P^2)}{\det\ (u^1\ \ u^2)}>0 \tag{3.6}$$

(b) 对称性条件

$$\begin{vmatrix} P_{12} & P_{22} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P_{21} & P_{11} \\ u_{21} & u_{11} \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

不等式(3.6)的几何意义是说u^1转到u^2的转向应与P^1转到P^2的转向一致。今后，总假定它们的编号与坐标轴转向一致（右手系）。于是

$$\det(u^1\ \ u^2)>0 \qquad \det(P^1\ \ P^2)>0 \tag{3.8}$$

不等式(3.5)表明点$P^2=(P_{21}\ \ P_{22})^T$位于由坐标直线

$$Y_0=\frac{u_{21}}{u_{11}}P_{12},\quad X_0=\frac{u_{22}}{u_{12}}P_{11} \tag{3.9}$$

所分割成的$\frac{1}{4}$平面区域的内部。再有，等式(3.7)的实质是矢量内积

$$P^2\cdot u^1=P^1\cdot u^2 \tag{3.10}$$

说明P^2点在直线

$$Y=-\frac{u_{11}}{u_{12}}X+\frac{P_{11}u_{21}+P_{12}u_{22}}{u_{12}} \tag{3.11}$$

上。此直线与Ou^1直线垂直。总之，条件(a)(b)限制P^2在一条半直线上。

根据(3.4)式得到关于k_{11}，k_{22}、k_{33}的三元一次联立方程组，

$$\left.\begin{aligned} &\det(u^1\ \ u^2)(b_{11}^2k_{11}+b_{21}^2k_{22}+b_{31}^2k_{33})=P_{11}u_{22}-P_{21}u_{12} \\ &\det(u^1\ \ u^2)(b_{11}b_{12}k_{11}+b_{21}b_{22}k_{22}+b_{31}b_{32}k_{33})=P_{21}u_{11}-P_{11}u_{21} \\ &\det(u^1\ \ u^2)(b_{12}^2k_{11}+b_{22}^2k_{22}+b_{32}^2k_{33})=P_{22}u_{11}-P_{12}u_{21} \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

若杆件编号的次序的转向今后总是采用与坐标轴转向一致，则行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11}^2 & b_{21}^2 & b_{31}^2 \\ b_{11}b_{12} & b_{21}b_{22} & b_{31}b_{32} \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 & b_{32}^2 \end{vmatrix}=\det(Q^1\ \ Q^2\ \ Q^3)>0 \tag{3.13}$$

方程组(3.12)的其余克莱姆行列式为

$$\Delta_i=e_iP_{11}+f_iP_{12}+g_iP_{21} \qquad (i=1,2,3) \tag{3.14}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}
&e_1=\det(R_1\ \ Q^2\ \ Q^3),\ e_2=\det(Q^1\ \ R^1\ \ Q^3)\\
&e_3=\det(Q^1\ \ Q^2\ \ R^1),\ g_1=-\det(R^2\ \ Q^2\ \ Q^3)\\
&g_2=-\det(Q^1\ \ R^2\ \ Q^3),\ g_3=-\det(Q^1\ \ Q^2\ \ R^2)\\
&f_1=b_{21}\,b_{31}\begin{vmatrix}b_{21}&b_{31}\\b_{22}&b_{32}\end{vmatrix}\frac{\det(u^1\ \ u^2)}{u_{12}}\\
&f_2=b_{31}b_{11}\begin{vmatrix}b_{31}&b_{11}\\b_{32}&b_{12}\end{vmatrix}\frac{\det(u^1\ \ u^2)}{u_{12}}\\
&f_3=b_{11}b_{21}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{21}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}\frac{\det(u^1\ \ u^2)}{u_{12}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Q^i=(b_{i1}^2\ \ b_{i1}b_{i2}\ \ b_{i2}^2)^T \qquad (i=1,2,3)\\
&R^1=\left(u_{22}\ \ -u_{21}\ \ \frac{u_{11}}{u_{12}}u_{21}\right)^T\\
&R^2=\left(u_{12}\ \ -u_{11}\ \ \frac{u_{11}}{u_{12}}u_{11}\right)^T
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

方程组(3.12)有正的解$k_{11}>0$，$k_{22}>0$，$k_{33}>0$的充要条件是$\Delta_i>0$ $(i=1,2,3)$.

三个变量P_{11}. P_{12}，P_{21}的不等式方程$\Delta_i>0$ $(i=1,2,3)$一般而言，总界限出三维空间中以原点为顶点的一个无限开角形区域（不包含顶点和边界平面）. 这意味着该角形区域的任一内点 $(P_{11}\ \ P_{12}\ \ P_{21})^T$ [P_{22}在半直线(3.11)上]. 即工况 P^1, P^2, 均可以选出相应的刚度系数

$$k_{ii}=\frac{1}{\det(u^1\ \ u^2)}\ \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i=1,2,3) \tag{3.17}$$

使得(3.2)式成立.

但是，当三个平面$\Delta_i=0$ $(i=1,2,3)$共线形成平面束时，则当且仅当下面条件成立时才能界限出一个无限开角形区域：即不存在三个正常数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得

$$\lambda_1H^1+\lambda_2H^2+\lambda_3H^3=0 \tag{3.18}$$

式中，$H^i=(e_i\ \ f_i\ \ g_i)^T$ 是平面$\Delta_i=0$ $(i=1,2,3)$的法向矢量.

例2 材料相同的三杆桁架（图4），问怎样给定工况性态（数目、大小和方式）才能选出各杆刚度系数$k_{11}>0$，$k_{22}>0$，$k_{33}>0$，使其实现满应力?

解：形状参数矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^T \tag{a}$$

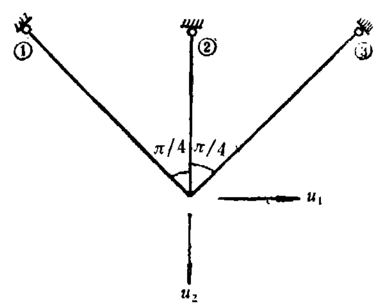

图 4

取$l=l_2$为特征长度. 于是

$$c_1=\sqrt{2}\,a,\ c_2=a,\ c_3=\sqrt{2}\,a\ \left(a=\frac{\sigma^\circ}{E}\right) \tag{b}$$

位移约束方程(2.10)为

$$|u_1+u_2|\leqslant 2a,\quad |u_2|\leqslant a,\quad |-u_1+u_2|\leqslant 2a \tag{c}$$

位移允许区域如图5。角点$u^1=(a\ \ a)^T$的应力集度$s_1=2$，角点$u^2=(-a\ \ a)^T$的应力集度$s_2=1$。桁架的满应力度数$r=2$。

正定对称性条件(3.5)、(3.6)、(3.7)为

$$P_{21}<P_{11},\quad P_{22}>-P_{12},\quad P_{22}=-P_{21}+P_{12}-P_{11} \tag{d}$$

方程(3.12)的解为

$$k_{11}=\frac{P_{11}}{a},\quad k_{22}=\frac{1}{a}(P_{12}-P_{11}),\quad k_{33}=-\frac{1}{a}P_{21} \tag{e}$$

即 $(P_{11}\ P_{12}\ P_{21})$ 的选择范围是三维空间的无限开角形区域（或二维空间的开角形区域与一条半直线）：

$$P_{11}>0,\quad P_{12}-P_{11}>0,\quad P_{21}<0 \tag{f}$$

（P_{22}由 (d) 式决定）。在图5中，取定的是$P^1=(1\ \ 2)^T$，$P^2=(-2\ \ 3)^T$。相应的$k_{11}=\frac{1}{a}$，$k_{22}=\frac{1}{a}$，$k_{33}=\frac{2}{a}$。载荷允许区域Ω为图5中的虚线框内部。

文献[12][13][14]不恰当的选择$P^1=(1\ \ 1)^T$，$P^2=(-1\ \ 1)^T$，破坏条件(f)式，使得$k_{22}=0$，并导致错误的否定$p=2$的正确结论。

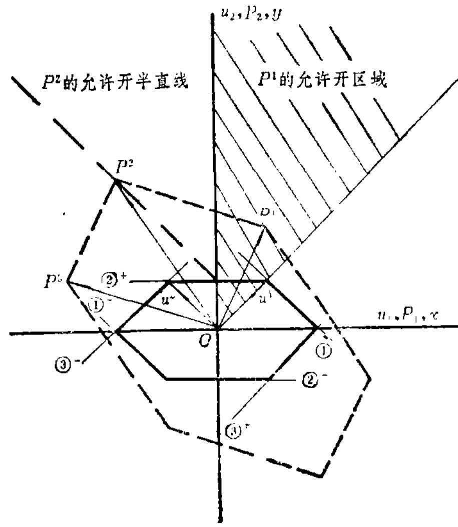

图 5

(ii) 设$n>3$，桁架是$(n-2)$次超静定的。

这时，方程(3.4)变为

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{i1}^2k_{ii} & \sum\limits_{i=1}^{n}b_{i1}b_{i2}k_{ii}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_{i1}b_{i2}k_{ii} & \sum\limits_{i=1}^{n}b_{i2}^2k_{ii}\end{pmatrix}=\frac{1}{\det(u^1\ \ u^2)}\begin{pmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{22} & -u_{21}\\ -u_{12} & u_{11}\end{pmatrix} \tag{3.19}$$

方程(3.12)为

$$\left.\begin{aligned}&\det(u^1\ \ u^2)\,(b_{11}^2k_{11}+b_{21}^2k_{22}+b_{31}^2k_{33})=(P_{11}u_{22}-P_{21}u_{12})\\&\qquad\qquad-\det(u^1\ \ u^2)\sum_{i=4}^{n}b_{i1}^2k_{ii}\\&\det(u^1\ \ u^2)\,(b_{11}b_{12}k_{11}+b_{21}b_{22}k_{22}+b_{31}b_{32}k_{33})=(P_{21}u_{11}-P_{11}u_{21})\\&\qquad\qquad-\det(u^1\ \ u^2)\sum_{i=4}^{n}b_{i1}b_{i2}k_{ii}\\&\det(u^1\ \ u^2)\,(b_{12}^2k_{11}+b_{22}^2k_{22}+b_{32}^2k_{33})=(P_{22}u_{11}-P_{12}u_{21})\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$$-\det(u^1\ \ u^2)\sum_{j=4}^{n}b_{i2}^2k_{ii}$$

因此，代替(3.14)式，是方程

$$\Delta_i'=e_iP_{11}+f_iP_{12}+g_iP_{21}-h_i=\Delta_i-h_i \qquad (i=1,2,3) \tag{3.21}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} h_1&=\det\ (u^1\ \ u^2)\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det(Q^j\ \ Q^2\ \ Q^3)\\ h_2&=\det\ (u^1\ \ u^2)\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det(Q^1\ \ Q^j\ \ Q^3)\\ h^3&=\det\ (u^1\ \ u^2)\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det(Q^1\ \ Q^2\ \ Q^j)\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

显然，不等式$\Delta_i'>0$ $(i=1,2,3)$所界限的开角形区域是$\Delta_i>0$ $(i=1,2,3)$的开角形区域的平移，移动取决于h_i，也就是$k_{jj}>0$ $(j=4,5,\cdots,n)$的约定值。故当$k_{jj}>0$ $(j=4,5,\cdots,n)$约定后，P_{11},P_{12},P_{21}（从而P_{22}）的选择范围随之被限定，相应的$k_{ii}>0$ $(i=1,2,3)$即可求得

$$\left.\begin{aligned} k_{11}&=\frac{1}{\det(Q^1\ \ Q^2\ \ Q^3)}\left[\frac{\Delta_1}{\det\ (u^1\ \ u^2)}-\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det\ (Q^j\ \ Q^2\ \ Q^3)\ \right]\\ k_{22}&=\frac{1}{\det\ (Q^1\ \ Q^2\ \ Q^3)}\left[\frac{\Delta_2}{\det\ (u^1\ \ u^2)}-\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det\ (Q^1\ \ Q^j\ \ Q^3)\ \right]\\ k_{33}&=\frac{1}{\det\ (Q^1\ \ Q^2\ \ Q^3)}\left[\frac{\Delta_3}{\det\ (u^1\ \ u^2)}-\sum_{j=4}^{n}k_{jj}\det\ (Q^1\ \ Q^2\ \ Q^j)\ \right]\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

一旦$k_{ii}>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$确定后，根据正问题的求解步骤，对其余$(r-2)$个满应力位移基底$u^3,u^4,\cdots,u^r$，作变换(B^TKB)，即得相应的满应力载荷基底$P^3,P^4,\cdots,P^r$。从而，逆问题获得解决。

例 3 （逆问题）。图6所示的六杆桁架，已知$c_1=\frac{5}{2}$，$c_2=2$，$c_3=4$，$c_4=2\sqrt{3}$，$c_5=\frac{5}{\sqrt{6}}$，$c_6=\frac{5}{6}\sqrt{3}$。问怎样选择工况性态，才能存在$k_{ii}>0$ $(i=1,2,\cdots,6)$，使它实现满应力？

解：形状参数矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \tag{a}$$

位移允许区域如图7。点$u^1=(2\ \ 2\sqrt{3})^T$和$u^2=\left(0\ \ \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^T$的应力集度均为3。故桁架满应力

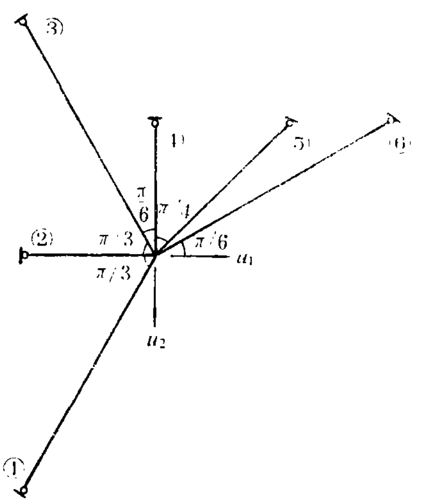
图 6

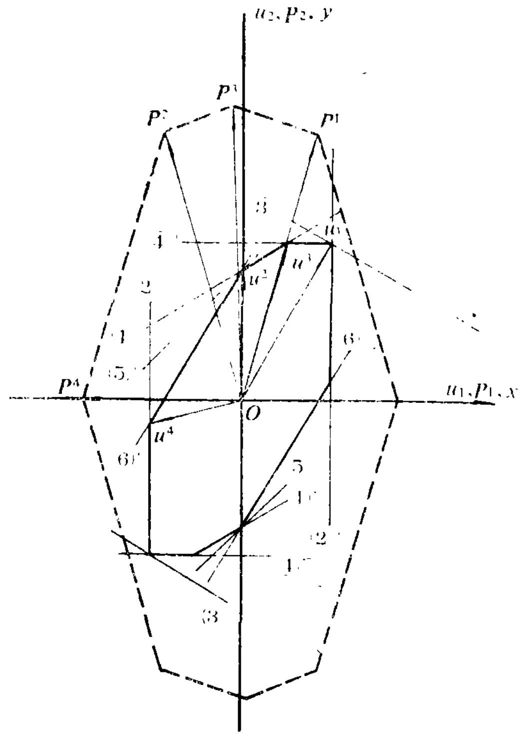
图 7

度数$r=2$．满应力最少工况数$p=r=2$．正定对称性条件(3.5)、(3.6)、(3.7)为

$$\frac{5}{\sqrt{3}}P_{11}-2\sqrt{3}\,P_{21}>0,\quad P_{22}>0,\quad P_{22}=\frac{5}{6}P_{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}P_{21}\tag{b}$$

方程(3.20)是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}k_{11}+k_{22}+\frac{1}{4}k_{33}+\frac{1}{2}k_{55}+\frac{3}{4}k_{66}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}}P_{11}-2\sqrt{3}\,P_{21}\\&\frac{10}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}k_{11}+\frac{\sqrt{3}}{4}k_{33}-\frac{1}{2}k_{55}-\frac{\sqrt{3}}{4}k_{66}\right)=2P_{21}\\&\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}k_{11}+\frac{3}{4}k_{33}+k_{44}+\frac{1}{2}k_{55}+\frac{1}{4}k_{66}\right)=\frac{5}{3}P_{12}-\frac{2}{\sqrt{3}}P_{21}\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

预先约定其中三根杆的刚度系数，比如

$$\frac{10}{\sqrt{3}}k_{44}=1,\quad \frac{10}{\sqrt{3}}k_{55}=2,\quad \frac{10}{\sqrt{3}}k_{66}=4\tag{d}$$

代(d)到(c)，解出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{10}{\sqrt{3}}k_{11}=\frac{10}{9}P_{12}-\frac{16}{3\sqrt{3}}P_{21}-4-\frac{2}{\sqrt{3}}\\&\frac{10}{\sqrt{3}}k_{22}=\frac{5}{\sqrt{3}}P_{11}-\frac{5}{9}P_{12}-\frac{16}{3\sqrt{3}}P_{21}-3\\&\frac{10}{\sqrt{3}}k_{33}=\frac{10}{9}P_{12}+\frac{8}{3\sqrt{3}}P_{21}+\frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

根据$k_{11}>0$，$k_{22}>0$，$k_{33}>0$的要求，有不等式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{10}{9}P_{12}-\frac{16}{3\sqrt{3}}P_{21}-4-\frac{2}{\sqrt{3}}>0\\&\frac{10}{9}P_{12}+\frac{8}{3\sqrt{3}}P_{21}+\frac{2}{\sqrt{3}}>0\\&\frac{5}{\sqrt{3}}P_{11}-\frac{5}{9}P_{12}-\frac{16}{3\sqrt{3}}P_{21}-3>0\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{f})$$

(b)与(f)就界限出三维空间的一个无限角形开区域（或者二维空间中一个无限角形开区域与一条半直线(b)）．今取该开域内的一个点：$P_{11}=\sqrt{3}$，$P_{12}=6$，$P_{21}=-\sqrt{3}$，($P_{22}=6$)或

$$P^1=(\sqrt{3}\quad 6)^T,\ P^2=(-\sqrt{3}\quad 6)^T\qquad(\mathrm{g})$$

则得

$$\left.\begin{aligned}&k_{11}=\frac{4\sqrt{3}-1}{5},\quad k_{22}=\frac{2}{5}\sqrt{3},\quad k_{33}=\frac{2\sqrt{3}+1}{5}\\&k_{44}=\frac{\sqrt{3}}{10},\quad k_{55}=\frac{\sqrt{3}}{5},\quad k_{66}=\frac{2}{5}\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{h})$$

由它构成的变换矩阵(B^TKB)，使得

$$(B^TKB)u^i=P^i\qquad(i=1,2)\qquad(\mathrm{i})$$

位移允许区域V的另外两角点是$u^3=(1\quad 2\sqrt{3})^T$，$u^4=(-2\quad -1/\sqrt{3})^T$；相应的载荷允许区域$\Omega$的角点为$P^3=(-\sqrt{3}/10\quad 33/5)^T$，$P^4=(-2\sqrt{3}\quad 0)^T$．$\Omega$的图形示于图7．

参 考 文 献

[1] Gellatly, R. A., and R. H. Gallagher, *Aeronautical Quart.*, XVII, (Aug. 1966).

[2] Wright, P. M. and C. C. Feng, *Trans. Engrg. Inst. of Canada*, (1971).

[3] Spillers, W. R. and John Farrell *J Math. and Appl.*, 25, 2(1969).

[4] Barnett, R. L. and P. C. Herrmann, *NASACR*-1038, (May 1968).

[5] Owen, J. B. B., *The Analysis and Design of Light Structures*, Arnold, London, (1965).

[6] 胡定钟，吉林大学自然科学学报，3 (1979).

[7] 胡守信，吉林大学自然科学学报，4 (1981).

[8] Traum, E. and W. Zalewski, *Civil Engrg. Magz.*, (July 1968).

[9] Dayaratnam, P. and S. Patniak, *AIAA. J.*, 7 (Apr. 1969).

[10] Patniak, S. and P. Dayaratnam, *Int. J. Num Methods Engrg.*, 2 (1970).

[11] Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, *Optimum Structural Design Theory and Application*, London, New York, Sydney, Toronto, (1973).

[12] 冯元生，教育部高等学校1978年计算结构力学学术交流会论文集Ⅱ.

[13] 李炳威，《结构的优化设计》，科学出版社(1979).

[14] Aoki, M., *Introduction to Optimization Techniques*, Macmillan, New York, (1971).

Fully Stressed Design of Superstatic Truss with a Multiple Loads (Ⅰ)

Hu Ding-zhong

(Jilin University, Changchun)

Abstract

In this paper, we give a certain relationship between the number of members and freedoms in a superstatic truss without sick members and the number of load conditions for the truss must be fully stressed design.

This paper not only revises the result of R. H. Gallagher, but also manifests the choice of load conditions (number, magnitude and form). It has been proved that some anti-examples is contradicted with the choice of load conditions.