应用数学和力学，第3卷第3期（1982年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

非线性断裂动力学中的路径无关积分和断裂准则*

欧 阳 鬯**

（上海复旦大学数学系，1981年11月1日收到）

摘 要

本文考虑非线性断裂动力学中的路径无关积分和断裂准则．在讨论中计入了动力效应和裂纹的传播现象，考虑了裂纹在非线性弹性介质中的传播以及在弹塑性介质中的传播二种情况，作出了一些相应的路径无关积分．作为例子，讨论了裂纹的定常传播情况．最后，给出了这种路径无关积分的力学意义，说明它可用来作为非线性断裂动力学的一种断裂准则．

一、引 言

自从J．R．Rice[1] 在1968年作出J-积分以来，作为一种引入的断裂准则，人们花了不少功夫讨论它，我们有

$$J=\int_{\Gamma}\left(W dy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right)\tag{1.1}$$

这里W是应变能密度，Γ是环绕裂纹顶端的积分路径，$\vec{T}$是表面力向量，$\vec{u}$是位移向量．J积分的最基本特性是其路径无关性，这是为什么考虑它作为物理参数的主要原因．但其路径无关性的证明是建立在塑性形变理论之上的．由于这一塑性理论的局限，J积分不能适用于有卸载的情况，例如裂纹的传播问题．J积分路径无关性在增量塑性理论之下仍然正确否？这个问题只有一些数值试验结果[2,3]，没有一般的证明．对于弹塑性情况，由于应力和应变之间缺乏一一对应的关系，故在J积分中应变能密度W将失去明确的意义，这里就需要作

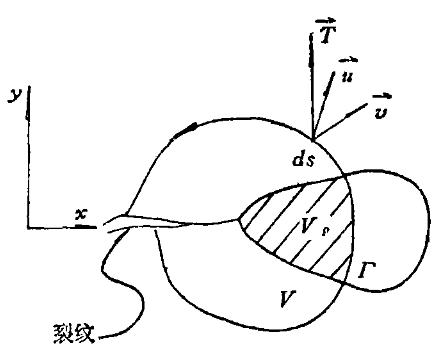

图 1

*本文是作者在美国得克萨斯大学计算力学研究所访问期间完成的，作者对所长J．T．Oden教授对本文的支持表示感谢，本文曾在国际第二届塑性断裂力学会议上报告．

**美国得克萨斯大学计算力学研究所访问教授．

出适当的修正[3,4].

在非线性断裂动力学中，路径无关积分也可以作为物理参数.这里必须在讨论中计入动力效应和裂纹扩展现象，因而分析将变得更为复杂．本文提出了若干新的非线性断裂动力学中的路径无关积分．我们首先考虑了裂纹在非线性弹性介质中的扩展，接着讨论裂纹在弹塑性介质中的传播问题，这里克服了 J 积分具有的上述困难．作为例子，研究了裂纹的定常传播问题.最后，给出了这种路径无关积分的力学意义，说明它就等于断裂动力学中的裂纹扩张力．因之，这种路径无关积分是 J 积分在断裂动力学中的推广，因而可作为断裂动力学的断裂准则．

二、非线性弹性情况

首先，让我们考察一般非线性弹性介质中的裂纹传播问题．在这里塑性效应不必考虑．因此，应力和应变之间具有一一对应的关系，而应变能密度 W 具有明确的含义，对于动力学问题，我们有如下的连续方程和运动方程:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=0 \tag{2.2}$$

这里 σ_{ij} 为应力张量，F_i 是单位体积体力，ρ 是密度，x_i 为坐标，t 是时间．现在我们首先给出下面的

定理 1 对于任何环绕裂纹顶端的路径(图 1)和任何时间 $t_1>t_0\geqslant 0$ 来说，积分

$$Y_1=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_\Gamma (W-F_iu_i-K)dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt+\int_V \rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{2.3}$$

是路径无关的，这里

$$W=\int\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij} \tag{2.4}$$

为应变能，ε_{ij} 是应变张量，而

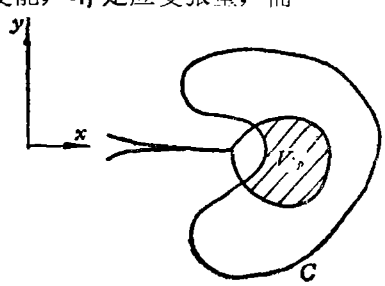

图 2

$$K=\frac{1}{2}\rho v_iv_i$$

为动能密度，$v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}$ 为速度，V 是 Γ 和裂纹表面所界限的区域（图 1），且设 F_i 与 x 无关．

证明 我们首先考虑内部不含裂纹顶端之任意回路 C(图 2)，对于曲线 C，我们有

$$\int_C T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=\int_C \sigma_{ij}\nu_j\frac{\partial u_i}{\partial x}ds=\int_V\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dV$$

$$=\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x}dV+\int_V \sigma_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial x_j}dV \tag{2.6}$$

这里 ν_j 是 C 之单位法向量，利用方程（2.1）及应变位移关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.7}$$

从（2.6）我们有

$$\int_C T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds=\int_V\left(\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-F_i\right)\frac{\partial u_i}{\partial x}dV+\int_V\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}dV$$

$$=\int_V\left(\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-F_i\right)\frac{\partial u_i}{\partial x}dV+\int_V\frac{\partial W}{\partial x}dV$$

$$=\int_V\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\frac{\partial u_i}{\partial x}dV+\int_C(W-F_iu_i)dy$$

因之，我们有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_C (W-F_iu_i)\,dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt=-\int_{t_0}^{t_1}\int_V\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\,dt \tag{2.8}$$

但是，我们看到

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\,dt=\int_V\int_{t_0}^{t_1}\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\frac{\partial u_i}{\partial x}dt\,dV$$

$$=\int_V\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_V dV\left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial u_i}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dt\right) \tag{2.9}$$

且由连续方程（2.2）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)$$

我们知道在（2.9）的括号中项 $\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x}$ 较之其它项为高阶小量，因而可加以略去，这样，我们得到

$$L=\int_V\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\int_V\rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}dV\,dt$$

$$=\int_V\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_V\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\rho v_iv_i dV\right)dt$$

$$=\int_V\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\int_C K\,dy\,dt \tag{2.10}$$

将（2.9），（2.10）代入（2.8），最后我们得到方程：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_C (W-K)\,dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt+\int_V\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}=0 \tag{2.11}$$

如果有二个不同的路径 Γ_1，Γ_2，如图 3 所示，那么，我们取 $C=\Gamma_1+\overline{AC}+\Gamma_2^-+\overline{DB}$，这里“—”号表示原有路径方向之逆，由（2.11），我们得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_C (W-K)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{V_0}\rho v_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\,\bigg|_{t_0}^{t_1}=0$$

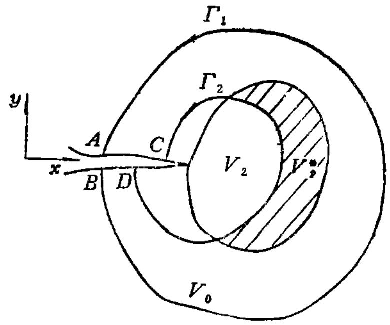

图　3

V_0是Γ_1，Γ_2之间的区域，由于在$\overline{AC}$,$\overline{BD}$上$dy=0$及$T_i=0$，又$V_1=V_0+V_2$，从上面的方程立即可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma_1}(W-K)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{V_1}\rho v_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\,\bigg|_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma_2}(W-K)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt+\int_{V_2}\rho v_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\,\bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{2.12}$$

Q. E. D.

有时候，在讨论问题中选取随时间t变化的路径Γ是方便的．例如，要是我们考虑裂纹的定常传播问题，就最好考虑随裂纹顶端一道运动的路径Γ，在这样的情况下，我们有$\Gamma=\Gamma(t)$，且给定下面的

定理2　对于任意环绕裂纹顶端的路径$\Gamma(t)$和$t_1>t_0\geqslant 0$来说，积分

$$Y_2=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma(t)}(W+\overline{\rho a_i-F_i}\,u_i)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{V(t)}\rho u_i\,\frac{\partial a_i}{\partial x}dV dt \tag{2.13}$$

或简单地

$$Y_3=\int_{\Gamma(t)}(W+\overline{\rho a_i-F_i}u_i)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds$$

$$-\int_{V(t)}\rho u_i\,\frac{\partial a_i}{\partial x}dV \tag{2.14}$$

是路径无关的，这里a_i是加速度$\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$．

证明　为了作出证明，我们只须前面的一个等式开始，即

$$\int_C T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds=\int_C(W-F_iu_i)dy+\int_V\rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV \tag{2.15}$$

（2.15）中的最后一项可以重新写为

$$\int_V\rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV=\int_V\rho a_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}dV=\int_V\rho a_iu_idy-\int_V\rho u_i\,\frac{\partial a_i}{\partial x}dV \tag{2.16}$$

因此，以（2,16）代入（2.15），我们得到

$$\int_C(W+\overline{\rho a_i-F_i}u_i)dy-T_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x}ds-\int_V\rho u_i\,\frac{\partial a_i}{\partial x}dV=0 \tag{2.17}$$

从（2.17），很容易证明积分Y_2或Y_3的路径无关性．

三、弹塑性情况

在塑性范围内，σ_{ij} 和 ε_{ij} 之间没有一一对应关系，因此应变能密度 W 将失去明确的意义，假若应力历程不加以规定的话，为了克服这一困难，我们考虑另外的积分

$$Y_4=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_\Gamma (W_e-K-F_iu_i)dy-T_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p}\sigma_{ij}\ \frac{\partial\varepsilon^p_{ij}}{\partial x}\ dxdydt+\int_V \rho v_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}\ dV\ \Big|_{t_0}^{t_1} \tag{3.1}$$

这里 W_e 是弹性应变能密度

$$W_e=\int\sigma_{ij}d\varepsilon^e_{ij} \tag{3.2}$$

对于 Prandtl—Reuss 材料，我们有

$$W_e=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon^e_x+\sigma_y\varepsilon^e_y+\tau_{xy}\varepsilon^e_{xy}) \tag{3.3}$$

V_p 是路径 Γ 内部的塑性区域(图1)，ε^p_{ij} 是塑性应变.

对于弹塑性裂纹扩展情况，我们给出下面的

定理3 对于任何环绕裂纹顶端的路径 Γ 和时间 $t_1>t_0\geqslant 0$ 来说，在弹塑性裂纹传播的情况下积分 Y_4 是路径无关的.

证明 首先考虑一个不包含裂纹顶端的闭路 C，我们有

$$L_e=\int_C W_edy-T_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}ds=\int_V\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}-\sigma_{ij}\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}\right)dxdy$$

$$-\int_V(\rho a_i-F_i)\ \frac{\partial u_i}{\partial x}dV$$

$$=\int_V\left(\sigma_{ij}\ \frac{\partial\varepsilon^e_{ij}}{\partial x}-\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}\right)dxdy-\int_V(\rho a_i-F_i)\ \frac{\partial u_i}{\partial x}dV$$

$$=-\int_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon^p_{ij}}{\partial x}\ dxdy-\int_V(\rho a_i-F_i)\ \frac{\partial u_i}{\partial x}dV$$

因之，利用等式 (2.10)

$$L=\int_V\rho v_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}\ dV\ \Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\int_C Kdydt$$

我们得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_C(W_e-K-F_iu_i)dy-T_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p}\sigma_{ij}\ \frac{\partial\varepsilon^p_{ij}}{\partial x}dxdydt$$

$$+\int_V\rho v_i\ \frac{\partial u_i}{\partial x}\ dV\ \Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

对于任意两个不同的环绕裂纹顶端的路径 Γ_1，Γ_2(图 3)，令 $C=\Gamma_1+\overline{AC}+\Gamma_2^-+\overline{DB}$，

因此，我们有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_C (W_e-K-F_iu_i)dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p^*}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdydt$$

$$+\int_{V_0}\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

V_p^* 是 Γ_1，Γ_2 之间的塑性区域，V_0 是 Γ_1，Γ_2 和裂纹面所界限的区域（图3），但是我们有 $V_1=V_0+V_2$，$V_p^1=V_p^*+V_p^2$，又在 $\overline{AC},\overline{BD}$ 上有 $dy=0$ 和 $T_i=0$，因此，我们有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma_1}(W_e-K-F_iu_i)dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p^1}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdydt$$

$$+\int_{V_1}\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dxdy\Big|_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma_2}(W_e-K-F_iu_i)dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p^2}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdydt+\int_{V_2}\rho v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}dV\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Q. E. D.

对于运动路径 $\Gamma(t)$，我们容易证明下面的

定理4 积分

$$Y_6=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Gamma(t)}(W_e+\overline{\rho a_i-F_iu_i})dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds\right)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdydt-\int_{t_0}^{t_1}\int_V\rho u_i\frac{\partial a_i}{\partial x}dVdt \tag{3.4}$$

或简单地

$$Y_6=\int_{\Gamma(t)}(W_e+\overline{\rho a_i-F_iu_i})dy-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x}ds$$

$$+\int_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdy-\int_V\rho u_i\frac{\partial a_i}{\partial x}dxdy \tag{3.5}$$

对任何环绕裂纹顶端之路径 $\Gamma(t)$ 和任何 $t_1>t_0\geqslant 0$ 是路径无关的，这里 V_p 是 $\Gamma(t)$ 内部之塑性区，V 是 Γ 和裂纹表面所界限的区域.

四、定常裂纹扩展情况

现在我们来考虑非线性断裂动力学中的一种有兴趣的情况，即裂纹定常扩展的情况.

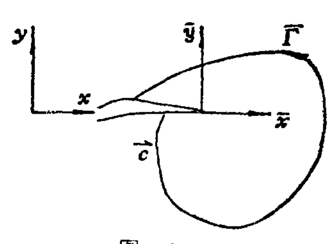

图 4

假设裂纹顶端的传播速度为 c，考虑以同样速度 c 移动的路径 $\bar{\Gamma}$ 及与裂纹顶端一道移动的坐标系 $\bar{x}$，$\bar{y}$（图4），从 x，y，t 到 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{t}$ 的变换为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=x-ct,\quad c\text{：速度}\\&\bar{y}=y\\&\bar{t}=t\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

从（4.1）我们有

$$u_i(x,\ y,\ t)=u_i(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{t}) \tag{4.2}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\\ \frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial \bar{t}}+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \bar{t}}-c\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

因之，我们有

$$\left.\begin{aligned}v_i&=\frac{\partial u_i}{\partial t}=\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}}-c\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}}\\ a_i&=\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{t}^2}-2c\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}}\right)+c^2\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

对于裂纹之定常运动，我们有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}=0 \tag{4.5}$$

故从 (4.4) 得

$$\left.\begin{aligned}v_i&=-c\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}}\\ a_i&=c^2\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

因此，在 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 系统中考虑一个不变的路径$\bar{\Gamma}$，从定理 2，对非线性弹性情况我们有

$$Y_6=Y_3=\int_{\bar{\Gamma}}\left(W+c^2\rho u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2}-F_i u_i\right)d\bar{y}-T_i\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}}d\bar{s}$$

$$-\int_{\bar{V}}c^2\rho u_i\frac{\partial^3 u_i}{\partial \bar{x}^3}dV \tag{4.7}$$

它对于不同的$\bar{\Gamma}$是路径无关的，对于弹塑性裂纹传播，我们有

$$Y_7=Y_6=\int_{\bar{\Gamma}}\left(W_e+\overline{c^2\rho u_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2}-F_i\cdot u_i}\right)d\bar{y}-T_i\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}}d\bar{s}$$

$$+\int_{\bar{V}}\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial \bar{x}}d\bar{x}d\bar{y}-\int_{\bar{V}}c^2\rho u_i\frac{\partial^3 u_i}{\partial \bar{x}^3}d\bar{x}d\bar{y} \tag{4.8}$$

五、Y 积分和裂纹扩展力间的关系

考虑如图 5 所示的缺口试件．当缺口宽度趋于零时，我们就得到一个裂纹体，设边界S_T上的面力是 T_i，单位体积体力是 F_i，假设裂纹由长度 a 扩展到 $a+\Delta a$.

外面力 T_i 在裂纹扩展中的功为

$$\Delta A_T=\int_{S_T}T_i(\tilde{u}_i-u_i)ds$$

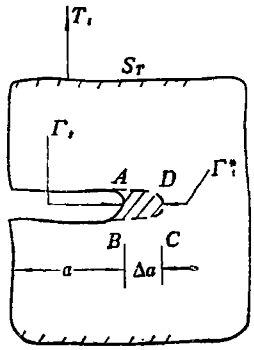

图 5

这里$\tilde{u}_i$是裂纹扩展后的位移，外体力作的功由两部分构成：其一是在裂纹扩展中阴影区ΔV中释放的功：

$$\Delta A_{B1}=-\int_{\Delta V}(F_i-\rho a_i)u_i dV$$

其二是在区域$V-\Delta V$上的功，它等于

$$\Delta A_{B2}=\int_{V-\Delta V}(F_i-\rho a_i)(\tilde{u}_i-u_i)dV$$

内力作的功也包含两部分，其一是在区域ΔV的功，它等于在裂纹扩展中释放的弹性应变能：

$$\Delta A'=-\int_{\Delta V}W_e dV$$

其二是

$$\Delta A''=\int_{V-\Delta V}\sigma_{ij}(\tilde{e}_{ij}-e_{ij})dV$$

$\tilde{e}_{ij}$是裂纹扩展后的应变.

下式决定了裂纹扩展力$\tilde{G}$：

$$\tilde{G}\Delta a=\Delta A_T+\Delta A_{B1}+\Delta A_{B2}-(\Delta A'+\Delta A'')$$

因之，

$$\tilde{G}=\int_{S_T}T_i\frac{\partial u_i}{\partial a}ds+\int_V(F_i-\rho a_i)\frac{\partial u_i}{\partial a}dV-\int_V\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a}dV$$

$$+\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\Delta V}W_e dV-\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\Delta V}(F_i-\rho a_i)u_i dV$$

$$=\int_{\Gamma_t}W_e dy-\int_{\Gamma_t}(F_i-\rho a_i)u_i dy \tag{5.1}$$

但是，从方程（3.5），我们知道：对于缺口试件

$$Y_6=\int_{\Gamma_t}(W_e+\overline{\rho a_i-F_i}u_i)dy=\tilde{G} \tag{5.2}$$

因此，令缺口宽度趋于零，我们得到

$$Y_6=G \tag{5.3}$$

这就意味着，路径无关的积分Y_6等于动力学中的裂纹扩展力. 因之，这里的Y-积分可用来作为非线性断裂动力学中的断裂准则.

注意，非线性断裂动力学中的裂纹扩展力$\tilde{G}$和缺口试件的路径无关积分Y_6过去没有过，这里第一次给出这些结果.

参 考 文 献

1. Rice, J. R., *JAM*, 35, 2 (1968).
2. Ouyang, C., *Int. J. Eng. Sc.*, 18, 2 (1980).
3. Ouyang, C., TICOM Report 80—12, Univ. of Texas at Austin, U. S. A. (1980).
4. Wang, J. C., *Mechanics*, 2, (1977).

On Path-Independent Integrals and Fracture Criteria in Nonlinear Fracture Dynamics

Ouyang Chang

(Dept. of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

In this paper, we consider path-independent integrals and fracture criteria in nonlineer fracture dynamics. The dynamic effect and crack propagation are induded in the discussion. Both nonlinear elastic and elastic-plastic case for crack propagation have been considered, and the related path-independent integrals are proposed. As an example, the steady state propagation of crack has been discussed. Lastly, we give the mechanical meaning of this path-independent integral as the crack extension force, and make it possible to use the path-independent integral as fracture criterion in nonlinear fracture dynamics.