应用数学和力学，第3卷第3期（1982年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

拟周期系统的Floquet理论*

林　振　声

（福州大学数学系，1981年10月6日收到）

摘　要

在这篇文章，我们对拟周期系统

$$\frac{dx}{dt}=A(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)x \tag{0.1}$$

建立了Floquet理论．其中$n\times n$方阵$A(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$是$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$以$2\pi$为周期的周期方阵，同时假定$A(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(\tau)}$，$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2(m+1)$，$N=\frac{1}{2}n(n+1)$．我们定义了(0.1)的特征指数根$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$，假设下式成立：

（一）　$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}k_\mu\omega_\mu\right|\geqslant K(\omega)\left(\sum_{\mu=1}^{m}|k_\mu|\right)^{-(1+m)}$$

（二）　$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}ik_\mu\omega_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}j_\nu\beta_\nu\right|\geqslant K(\omega,\beta)\left(\sum_{\mu=1}^{m}|k_\mu|\right)^{-(m+1)}$$

其中$K(\omega)$，$K(\omega,\ \beta)>0$，k_μ，j_ν是整数，$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m$不全为零，$i^2=-1$

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}j_\mu\right|\leqslant 1,\quad \sum_{\mu=1}^{n}|j_\mu|\leqslant 2.$$

那末有拟周期线性变换，把(0.1)化为常系数的线性系统．

一、引　　言

考虑n阶常微分方程系

$$\frac{dy}{dt}=F(y) \tag{1.1}$$

具有周期解$y=p(\omega t)$，它的周期为$T=2\pi/\omega$，从周期解$y=p(\omega t)$的摄动理论来说，它的变分方程系

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F(p(\omega t))}{\partial y}y \tag{1.2}$$

* 秦元勋推荐．本文简报发表于数学学报20，4，(1977)．

起了重要的作用，这时(1.2)为周期系统，(1.2)可以通过周期变换$z=B(t)y$, $B(t+T)=B(t)$，使它变换为常系数的线性微分方程系

$$\frac{dz}{dt}=Az$$

A是常数方阵．这就是平常所说的Floquet理论，利用这关系，可以大大简化了周期解的摄动理论．

如果(1.1)具有拟周期解$y=p(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$，其中$p(u_1,\ u_2,\cdots,u_m)$关于$u_1$，$u_2$，$\cdots$，$u_m$是以$2\pi$为周期的．同样地$y=p(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$具有变分方程系，但是拟周期解的变分方程系的Floquet理论是否成立，迄今仍不知道，(当然$n=1$时，只要对频率ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m附加一些条件，就会使Floquet理论成立．）这样就构成拟周期解的摄动理论的极大困难．Arnold[1]在他的文章里提出一系列的问题，其中的一个，就是拟周期线性系统的Floquet理论是否成立的问题．在Giacaglia[4]的357—358页中，也叙述了此问题，他认为拟周期线性系统的Floquet理论的适当推广，是个很重要而且是很困难的问题．同时也指出$n>1$的情况，迄今一无所知．

这篇文章的目的，就是对拟周期线性系统的Floquet理论进行研究，加以推广．我们的办法，把拟周期系统看为周期系统的极限情况，利用周期系统的Floquet理论成立，诱导出拟周期系统的Floquet理论的成立．

为了建立拟周期系统的Floquet理论，在这里还把周期系统的Floquet特征指数推广到拟周期系统．我们只建立了拟周期线性系统的Floquet理论成立的充分性．至于条件的必要性，还没有作详细的说明．

在二、中讨论周期系统的三角型化的问题，为了叙述本文完整和清晰起见，一些初等的变换，还是很详细地予以阐明．三、叙述拟周期函数的一些重要性质，目的在于建立周期函数与拟周期函数的重要关系，作为论证本文的工具．四、把周期系统的Floquet特征指数推广到拟周期系统，建立了拟周期系统的Floquet特征指数．五、叙述并论证了本文的主要结果．

二、周期系统的三角型化

按照Diliberto[5]的方法可以证明周期线性系统

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y,\quad A(t+T)=A(t),\quad T>0 \tag{2.1}$$

存在周期的酉变换，把(2.1)化为三角型系统．现在把这结果写为下面的引理．

引理1．　对周期线性微分方程系(2.1)存在周期酉变换，把(2.1)化为周期的三角系统．也就是存在酉周期方阵$Q(t)$，对(2.1)施行变换$z=Q^{-1}(t)y$，使(2.1)化为

$$\frac{dz}{dt}=C(t)z,\qquad C(t+T)=C(t),$$

$C(t)$为三角型，如果$A(t)\in C^{(\tau)}$，则$C(t)\in C^{(\tau)}$，$Q(t)\in C^{(\tau+1)}$，τ为非负的整数．当$\|A(t)\|\leqslant M$，则$\|C(t)\|\leqslant 3M$．这绝对值都是表示方阵的各元素绝对值平方和的开方，今后对向量的绝对值也是这样的．

证明：设$Y(t)$为(2.1)的基本解方阵，可设

$$Y(t+T)=Y(t)C_0,\quad C_0=\exp(BT)$$

这时C_0为正则常数方阵，同时可设B为三角型常数方阵，否则只要(2.1)再施行一次常系数酉变换.

现在采取Schmidt的方法，建立酉周期方阵$Q(t)$如下：可设

$$P(t)=Y(t)\exp(-Bt)=(p_1(t),\ P_2(t),\ \cdots,\ p_n(t))$$

那末$P(t)$为周期方阵：

$$\begin{aligned}P(t+T)&=Y(t+T)\exp(-B(t+T))\\&=Y(t+T)C_0^{-1}\exp(-Bt)\\&=Y(t)\exp(-Bt)=P(t)\end{aligned}$$

现在取

$$q_1(t)=\frac{1}{\|p_1(t)\|}p_1(t),\quad \|p_1(t)\|=\sqrt{(p_1(t),\ p_1(t))}$$

$(p_1(t),\ p_1(t))$表示数量积，那末$\|q_1(t)\|=1$. 当$q_1(t)$，$q_2(t)$，$\cdots$，$q_r(t)$已经取好，使

$$(q_i(t),\ q_j(t))=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

可取

$$q_{r+1}^0(t)=\sum_{i=1}^{r}(q_i(t),\ p_{r+1}(t))q_i(t)-p_{r+1}(t)$$

$$q_{r+1}(t)=\frac{1}{\|q_{r+1}^0(t)\|}q_{r+1}^0(t)$$

依此类推，可找到向量$q_1(t)$，$q_2(t)$，$\cdots$，$q_n(t)$，令

$$Q(t)=(q_1(t),\ q_2(t),\ \cdots,\ q_n(t))$$

从上面指出$P(t)$是t的周期向量，显见$Q(t)$是t以T为周期的，从上面$Q(t)$的取法. 可表示

$$\begin{aligned}Q(t)&=(p_1(t),\ p_2(t),\ \cdots,\ p_n(t))R_0(t)\\&=Y(t)\exp(-Bt)R_0(t)=Y(t)R(t)\end{aligned}$$

$R_0(t)$是三角型方阵，$R(t)=\exp(-Bt)R_0(t)$，又因为B为三角型方阵，所以$R(t)$也是三角型方阵，因之$\dfrac{dR^{-1}(t)}{dt}$也是三角型方阵.

现在对(2.1)施行变换$z=Q^{-1}(t)y$. 那末

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{dQ^{-1}(t)}{dt}Q(t)+Q^{-1}(t)A(t)Q(t)\right)z=C(t)z$$

所以$C(t)$是t以T为周期的，其次可直接计算：

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt}Q(t)+Q^{-1}(t)A(t)Q(t)=\frac{dR^{-1}(t)}{dt}R(t)$$

得$C(t)=\dfrac{dR^{-1}(t)}{dt}R(t)$是三角型和$t$的周期方阵.

如果$A(t)\in C^{(\tau)}$，则$Y(t)\in C^{(\tau+1)}$，从$Q(t)$的取法，推出$Q(t)\in C^{(\tau+1)}$，所以$R_0(t)$及$R(t)$属于$C^{(\tau+1)}$，因之$C(t)\in C^{(\tau)}$.

以下证明$\|C(t)\|\leqslant 3M$：

因为$Q(t)$是酉方阵，那末$Q^{-1}(t)=\overline{Q}^*(t)$，$\overline{Q}^*(t)$为$Q(t)$的转置共轭方阵. 所以

$$C(t)=\frac{d\overline{Q}^*(t)}{dt}Q(t)+\overline{Q}^*(t)A(t)Q(t)$$

$$\bar{C}^*(t)=\overline{Q}^*(t)\frac{dQ(t)}{dt}+\overline{Q}^*(t)\bar{A}^*(t)Q(t)$$

从$Q(t)$的取法，知

$$Q(t)=P(t)R_0(t)=Y(t)\exp(-Bt)R_0(t)$$

$R_0(t)$为三角型方阵，它的对角线是实的，直接计算得

$$C(t)=R_0^{-1}(t)B(t)R_0(t)+\frac{dR_0^{-1}(t)}{dt}R_0(t)$$

设

$$C(t)=\begin{pmatrix} c_{11}(t) & & * \\ & c_{22}(t) & \\ 0 & & \ddots \quad c_{nn}(t) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & b_2 & \\ 0 & & \ddots \quad b_n \end{pmatrix}$$

$$R_0(t)=\begin{pmatrix} \Delta_1(t) & & * \\ & \Delta_2(t) & \\ 0 & & \ddots \quad \Delta_n(t) \end{pmatrix}$$

那么

$$c_{ii}(t)=b_i+\frac{d\Delta_i^{-1}(t)}{dt}\Delta_i(t),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2.2}$$

这表示$c_{ii}(t)$的虚部分为b_i的虚部分，又因为

$$\|A(t)\|\leqslant M,\quad B=\frac{1}{T}\log Y(T),\quad \|Y(T)\|\leqslant\exp\left(\int_0^T\|\quad(\tau)\|d\tau\right)$$

所以$\|B\|\leqslant M$，现在$C(t)$为三角型，它的对角线虚部分的绝对值$\leqslant\|B\|\leqslant M$，可以推知

$$\|C(t)\|\leqslant\|C(t)+\bar{C}^*(t)\|+\|B\|=\|\overline{Q}^*(t)(A(t)+A^*(t))Q(t)\|+\|B\|\leqslant 3M$$

于是引理 1 证毕.

三、拟周期函数的一些重要的性质

1. 拟周期函数的不定积分

记$F(t)=F(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)$，$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$对$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$是以$2\pi$为周期的，若$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(\tau)}$，就称$F(t)\in C^{(\tau)}$，当$\tau$为适当的正整数时，那末$F(t)$可以展为 Fourier 级数：

$$F(t)=\sum a_k \exp(i(k,\ \omega)t)$$

其中 $k=(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m)$，$(k,\ \omega)=k_1\omega_1+k_2\omega_2+\cdots+k_m\omega_m$，$k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_m$ 为整数，即使当条件

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(\tau)d\tau=0$$

成立时，$F(t)$的不定积分 $G(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$也不一定是 t 的拟周期函数，例如当 $F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(\tau)}$,$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$关于$u_1$，$u_2$，$\cdots$，$u_m$是以$2\pi$为周期的：

$$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)=\sum_{k\neq 0} a_k \exp(i(k,\ u))$$

可取适当的实数ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m关于有理数独立，使

$$\sum_{k\neq 0}\left|\frac{a_k}{(k,\ \omega)}\right|^2=\infty$$

那末 $G(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$就不是拟周期函数.

由此可见，拟周期函数的不定积分，要保持拟周期的性质，跟它的频率ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m有密切的关系.

Kolmogorov和Arnold研究拟周期的Hamilton系统，遇到

$$\sum_{i=1}^m \omega_i\frac{\partial H}{\partial u_i}=F(x,u),\ \ F(x,u+\pi)=F(x,u)$$

的解含有小除数（small denominators）的问题，往往使H的级数解发散，这方面的工作，可参考[4]，但他们提出下面的命题：

“几乎所有向量$(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_m)$，对不为零向量的所有整数向量 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ 满足不等式

$$|(k,\ \omega)|\geqslant k(\omega)\left(\sum_{i=1}^m |k_i|\right)^{-(m+1)} \tag{3.1}$$

$k(\omega)$ 为某正数”.

证明：可参考[1]的104页，或[4]的188页，或本文的附注 1 .

因此关于此方面的问题，都假定ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m满足条件(3.1).

我们在这篇文章里，要求拟周期函数 $F(t)$ 的不定积分 $G(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$为拟周期函数，同样地遇到小除数的问题，因此也同样地假定ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m满足(3.1).

引理2. 如果拟周期函数 $F(t)=F(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)$ 的频率 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m 满足条件 (3.1)，又$F(t)\in C^{(\tau)}$，$\tau=s+2(m+1)$，当$F(t)$表达为

$$F(t)=\sum_{k\neq 0} a_k \exp(i(k,\ \omega)t)$$

则

$$I_F(u)=\sum_{k\neq 0}\frac{a_k}{(k,\ \omega)}\exp(i(k,\ u))$$

为绝对收敛的，因之 $F(t)$ 的不定积分 $G(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$ 为拟周期函数，同时可以保证 $G(t)\in C^{(s)}$.

证明：设 $\|k\|_0=\max(|k_1|,\ |k_2|,\ \cdots,\ |k_m|)$，从

$$D_{u_j}^{\tau}F(u)=\sum_{k\neq 0}k_j^{\tau}a_k\exp(i(k,\ u))$$

$$(ik_j)^{\tau}a_k=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}D_{u_j}^{\tau}F(u)\exp(-i(k,\ u))du$$

特别取 $|k_j|=\|k\|_0$，那末

$$|a_k|\leqslant\|k\|_0^{-\tau}\max_{j,u}|D_{u_j}^{\tau}F(u)|$$

对非负整数向量 $h=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_m)$，$\|h\|=h_1+h_2+\cdots+h_m$.

令

$$M=\max_{0\leqslant\|h\|\leqslant\tau}\left|\frac{\partial^{\|h\|}F(u)}{\partial u_1^{h_1}\partial u_2^{h_2}\cdots\partial u_m^{h_m}}\right|$$

那末

$$|a_k|<M\|k\|_0^{-\tau} \tag{3.2}$$

其次对整数向量 $k=(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m)$，显然有关系式

$$C(l,\ m)=\sum_{\|k\|_0=}1\leqslant 2m(2l+1)^{m-1}$$

这因为当 $k_1=\pm l$ 时，$k_2,\ k_3,\ \cdots,\ k_m$ 可以任意地取0，±1，±2，$\cdots$，$\pm l$ 的 $2l+1$ 个的数值.

因之有常数 $C(m)$ 使

$$C(l,m)\leqslant C(m)l_0^{m-1}$$

又因为 $\|k\|_0\leqslant\|k\|\leqslant m\|k\|_0$，结合(3.1)，(3.2)得

$$\sum_{\|k\|_0=l}\left|\frac{a_k}{(k,\ \omega)}\right|\leqslant\frac{M}{k(\omega)}\sum_{\|k\|_0=l}\frac{\|k\|_0^{-\tau}}{\|k\|^{-(m+1)}}$$

$$\leqslant\frac{M}{k(\omega)}m^{m+1}\sum_{\|k\|_0=l}\|k\|_0^{-\tau+(m+1)}\leqslant C_0(m)l^{-\tau+2m}$$

其中 $C_0(m)=\dfrac{M}{k(\omega)}m^{m+1}C(m)$，当 $\tau=s+2(m+1)$，则

$$\sum_{\|k\|_0=l}\left|\frac{a_k}{(k,\ \omega)}\right|\leqslant C_0(m)l^{-(s+2)}$$

故 $I_F(\omega)$ 为绝对收敛级数，因之 $G(t)$ 为拟周期函数，同时也表明 $G(t)=G(\omega_1t,\omega_2t,\cdots,\omega_mt)$，$G(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$ 经过 s 次逐项求偏导数后，仍为绝对收敛的级数，故知 $G(t)\in C^{(s)}$。

2. 拟周期函数与周期函数的关系

设拟周期函数 $F(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$ 满足了(3.1)的假定，可取正有理数列 $r_j^{(1)}$，$r_j^{(2)}$，$\cdots$，$r_j^{(m)}$，$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，使

$$\lim_{j\to\infty} r_j^{(i)}=\omega_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

易证$F(r_j^{(1)}t,\ r_j^{(2)}t,\ \cdots,\ r_j^{(m)}t)$是$t$的周期函数，事实上可取

$$r_j=\min\left\{\sum_{i=1}^{m} n_i r_j^{(i)}\ \middle|\ n_i\text{为整数},\ \sum_{i=1}^{m} n_i r_j^{(i)}>0\right\}$$

则$F(r_j^{(1)}t,\ r_j^{(2)}t,\ \cdots,\ r_j^{(m)}t)$是$t$以$2\pi/r_j$为周期的.

反之，设有一列周期函数

$$F_j(t)=\sum a_n^{(j)}\exp(inr_jt)$$

其中$r_j=\sum_{i=1}^{m} n_i^{(j)}r_j^{(i)}$，$n_i^{(j)}$为整数，$r_j^{(i)}$为有理数.

又假定$\lim_{j\to\infty} r_j^{(i)}=\omega_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，那末

$$F_j(t)=\sum a_n^{(j)}\exp\left(in\sum_{s=1}^{m} n_s^{(j)}r_j^{(s)}t\right)=F_j(r_j^{(1)}t,\ r_j^{(2)}t,\ \cdots,\ r_j^{(m)}t)$$

$F_j(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$对$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$是以$2\pi$为周期的. 在适当的条件下，可以证明$F_j(t)$具有子函数列收敛于拟周期函数$F(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$，把这关系式写为下面的引理.

引理3. **设有周期函数列**$F_j(t)=F_j(r_j^{(1)}t, r_j^{(2)}t,\cdots, r_j^{(m)}t)$，$r_j^{(i)}$**为有理数列**，$\lim_{j\to\infty} r_j^{(i)}=\omega_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，$F_j(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$**是**$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$**的以**$2\pi$**为周期的周期函数**，$F_j(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(\tau)}$，$\tau=s+2(m+1)$，$|D^hF_j(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)|\leqslant M$，$\|h\|\leqslant\tau$，$M$**是个常数，它与**$h=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_m)$，$j$，$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$**无关，那末存在子函数列**$F_{j_s}(r_j^{(1)}t,\ r_j^{(2)}t,\ \cdots,\ r_j^{(m)}t)$，**在任何有限区间上一致收敛于拟周期函数**$F(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$，$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$**对**$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$**是以**$2\pi$**为周期的，而且**$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(s)}$.

证明：可设

$$F_j(t)=\sum a_k^{(j)}\exp(i(k_1r_j^{(1)}+k_2r_j^{(2)}+\cdots+k_mr_j^{(m)})t),\quad k=(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m),\ \text{由于}$$

假定$|D^hF_j(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)|\leqslant M$，$\|h\|=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \tau$，如引理2的证明中所推导的，知

$$|a_k^{(j)}|\leqslant M\|k\|_0^{-\tau},\qquad \sum_{\|k\|_0=l}|a_k^{(j)}|\leqslant C_0(m)l^{-(s+2)} \tag{3.3}$$

对数列$\{a_k^{(j)}\}$可用对角线方法，可以得到数列j_s使$\lim_{j_s\to\infty} a_k^{(j_s)}=a_k$，$\|k\|_0=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，从(3.3)得

$$\sum_{\|k\|_0=l}|a_k|\leqslant C_0(m)l^{-(s+2)}.$$

$$\lim_{j_s\to\infty} F_{j_s}(t) = \sum a_K \exp(i(k,\ \omega)t) = F(t)$$

在任何有限区间上一致收敛，且$F(t)\in C^{(s)}$.

四、Floquet特征指数

考虑上面(2.1)的周期线性系统

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y,\ A(t+T)=A(t) \tag{2.1}$$

设$Y(t)$是它的基本解方阵，令$Y^{-1}(0)Y(T)=\exp(B_0T)$. 叫B_0的特征根为(2.1)的Floquet特征指数. 很容易指出Floquet特征指数具有下面的性质:

(i) Floquet特征指数跟基本解方阵$Y(t)$的取法无关.

(ii) Floquet特征指数跟以T为周期的周期线性变换无关.

事实上当B_0的特征根为$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$，而$Y^{-1}(0)Y(t)$的特征根为$\delta_1(t),\delta_2(t),\cdots,\delta_n(t)$，取$\delta_j(t)$为$t$的连续函数，则有

$$\beta_j=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{lT}\log\delta_j(lT),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

现在要从这角度进行考察，把周期线性系统的Floquet特征指数根推广到拟周期线性系统

$$\frac{dx}{dt}=A(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)x \tag{4.1}$$

其中$A(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$对$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$是以$2\pi$为周期的. 为了说明定义(4.1)的Floquet特征指数根的合理性，可先证明下面的引理4.

引理4. 设(4.1)的$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_m$满足了(3.1)，同时假定(4.1)的$A(u_1,u_2,\ \cdots,\ u_m)\in C^{(\tau)}$，$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2(m+1)$，$N=\frac{1}{2}n(n+1)$，$n$为(4.1)的阶数. 设$X(t)$为(4.1)的基本解方阵. $X^{-1}(0)X(t)$的特征根为$\delta_1(t),\ \delta_2(t),\ \cdots,\ \delta_n(t)$，要求$\delta_i(t)$为$t$的连续函数，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 则有与基本解方阵取法无关的数，$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m$，使

$$\beta_i=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{t_j}\log\delta_i(t_j),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{4.2}$$

其中数列t_j服从关系式

$$\lim_{t_j\to\infty}(\omega_1t_j,\ \omega_2t_j,\ \cdots,\ \omega_mt_j)=(0,\ 0,\ \cdots,0)(\mathrm{mod}\,2\pi) \tag{4.3}$$

证明：取有理数列$r_j^{(s)}$使$\lim\limits_{j\to\infty}r_j^{(s)}=\omega_s$，$s=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 其次考虑周期线性系统

$$\frac{dx}{dt}=A_j(t)x,\ A_j(t)=A(r_j^{(1)}t,\ \ r_j^{(2)}t,\ \cdots,\ \ r_j^{(m)}t) \tag{4.4}$$

这时$A_j(t)$是t以$2\pi/r_j$为周期的周期方阵，r_j为某有理数. 为方便起见，可取(4.1)的基本解方阵$X(t)$，$X(0)=E$，取(4.4)的基本解方阵$X_j^{(t)}$，$X_j(0)=E$，E为单位方阵，由于引理3知道下面的极限

$$\lim_{j\to\infty}A_j(t)=A(\omega_1t,\ \omega_2t,\ \cdots,\ \omega_mt)$$

在任何有限区间上一致地成立，故得

$$\lim_{j\to\infty} X_j(t)=X(t) \tag{4.5}$$

同时此极限也同样地在任何有限区间上一致成立.

从引理 1 知道存在酉周期方阵 $Q_j(t)$以 $T_j=2\pi/r_j$ 为周期的，且$Q_j(t)\in C^{(\tau+1)}$. 对(4.4)施行变换 $z=Q_j^{-1}(t)x$，可得

$$\frac{dz}{dt}=C_j(t)z \tag{4.6}$$

$C_j(t)\in C^{(\tau)}$，$C_j(t)$是 t 以 $2\pi/r_j$ 为周期的三角型方阵.

从引理 3 推导了下面的关系式:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{甲})、C_j(t)=\frac{d\bar{Q}_j^*(t)}{dt}Q_j(t)+\bar{Q}_j^*(t)A_j(t)Q_j(t)\\&(\text{乙})、\bar{C}_j^*(t)=\bar{Q}_j^*(t)\frac{dQ_j(t)}{dt}+\bar{Q}_j^*(t)\bar{A}_j^*(t)Q_j(t)\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

由于$\|A_j(t)\|\leqslant M$，从引理 1 指出$\|C_j(t)\|\leqslant 3M$，即 $C_j(t)$ 为一致有界. 因之从（甲）得到

$$\left\|\frac{d\bar{Q}_j^*(t)}{dt}\right\|\leqslant\|C_j(t)\bar{Q}_j^*(t)\|+\|\bar{Q}_j^*(t)A_j(t)\|\leqslant 4M$$

即 $\dfrac{d\bar{Q}_j^*(t)}{dt}$，$\dfrac{dQ_j(t)}{dt}$为一致有界，再从（甲）、（乙）推出

$$\frac{d}{dt}(C_j(t)+\bar{C}_j^*(t))=\frac{d}{dt}(\bar{Q}_j^*(t)(A_j(t)+\bar{A}_j^*(t))Q_j(t))$$

为一致有界. 注意到引理 1 的证明，指出(2.2)的 $C(t)$ 的对角线元素的虚部分是常数，故得

$$\left\|\frac{dC_j(t)}{dt}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\frac{dC_j(t)}{dt}+\frac{dC_j^*(t)}{dt}\right\|$$

因之$\dfrac{dC_j(t)}{dt}$为一致有界，从 $A(t)\in C^{(\tau)}$，同样地推出$D^{\|h\|}C_j(t)$，$\|h\|=0$，1，2，…，τ，$D^{\|s\|}Q_j(t)$，$\|s\|=0$，1，2，…，$(\tau+1)$为一致有界，所以$C_j(t)$,$Q_j(t)$满足了引理 3 中$F_j(u)$的条件，故有正整数子列$\{j_s\}$，使下面的极限在任何有限区间上一致地成立

$$\lim_{j_s\to\infty} Q_{j_s}(t)=Q(t),\quad \lim_{j_s\to\infty} C_{j_s}(t)=C(t)$$

$Q(t)=Q(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)$，为酉拟周期方阵，$C(t)=C(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)$ 为三角型拟周期方阵，$C(t)\in C^{(N\tau_0)}$，$Q(t)\in C^{(N\tau_0+1)}$. 对(4.1)施行变换，$z=Q^{-1}(t)x$，则有

$$\frac{dz}{dt}=C(t)z \tag{4.8}$$

此可证明如下:

从 (4.7) 得

$$Q_{j_s}^{-1}(t)Z_{j_s}(t)=Q_{j_s}^{-1}(0)+\int_0^t C_{j_s}(\tau)\,Q_{j_s}^{-1}(\tau)Z_{j_s}(\tau)d\tau$$

上面说过$Q_{j_s}(t)$，$C_{j_s}(t)$，$Z_{j_s}(t)$ 在任何有限区间上一致收敛于 $Q(t)$，$C(t)$，$Z(t)$，故得

$$Q^{-1}(t)Z(t)=Q^{-1}(0)+\int_0^t C(\tau)Q^{-1}(\tau)Z(\tau)d\tau$$

此即表示(4.8)成立.

对(4.1)的任何基本解方阵$X(t)$，可取(4.8)的基本解方阵$Z(t)=Q^{-1}(t)X(t)$，可表达

$$\begin{aligned}X^{-1}(0)X(t)&=Z^{-1}(0)Q^{-1}(0)Q(t)Z(t)\\&=Z^{-1}(0)Q^{-1}(0)Q(t)Z(t)Z^{-1}(0)Z(0)\end{aligned}$$

其次注意到(4.8)的$C(t)$为三角型方阵

$$C(t)=\begin{pmatrix}c_{11}(t) & & & * \\ & c_{22}(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

那末$Z(t)Z^{-1}(0)$可表达为

$$Z(t)Z^{-1}(0)=E+\int_0^t C(\tau)d\tau+\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}C(t_1)C(t_2)dt_2+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}\exp\left(\int_0^t c_{11}(\tau)d\tau\right) & & & * \\ & \exp\left(\int_0^t c_{22}(\tau)d\tau\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp\left(\int_0^t c_{nn}(\tau)d\tau\right)\end{pmatrix}$$

由于$Q(t)=Q(\omega_1 t,\omega_2 t,\cdots,\omega_m t)$，$t_i$满足(4.3)的关系式，那末当$t_i\to\infty$时，使$Q(t_i)\to Q(0)$，所以

$$X^{-1}(0)X(t_i)=Z^{-1}(0)(E+o(1))Z(t_i)Z^{-1}(0)Z(0),$$

又因为$Z(t_i)Z^{-1}(0)$的特征根为$\exp\left(\int_0^{t_i}c_{ii}(\tau)d\tau\right)$，$i=1, 2, \cdots, n$. 故得$X^{-1}(0)X(t_i)$的特征根为

$$\exp\left(\int_0^{t_i}c_{ii}(\tau)d\tau\right)\left(1+o(1)\right),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

$c_{ii}(t)$为拟周期函数，且$c_{ii}(t)\in C^{(N\tau_0)}$，故有$\beta_i$使

$$\lim_{t_i\to\infty}\frac{1}{t_i}\log\delta_i(t_i)=\lim_{t_i\to\infty}\frac{1}{t_i}\int_0^{t_i}c_{ii}(\tau)d\tau=\beta_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

此即表示(4.2)成立. 同时也从上式得到β_1, β_2, $\cdots$, β_n与基本解$Z(t)$的取法无关.

事实上只要$C(t)\in C^{(\tau_0)}$，就可以保证极限

$$\lim_{t_i\to\infty}\frac{1}{t_i}\int_0^{t_i}c_{ii}(\tau)d\tau$$

存在. 为了建立下面的定理，才要求$A(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in C^{(N+1)\tau_0}$，即$C(t)\in C^{(N\tau_0)}$. 总之只要$A(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in C^{(2\tau_0)}$，数列$\{t_i\}$服从关系式(4.3)，常有$\beta_1$, β_2, $\cdots$, β_n为(4.1)

的 Floquet 特征指数.

定义 当(4.1)的$A(u_1,u_2, \cdots, u_m)\in C^{(4(m+1))}$，常有$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_n$使(4.2)成立，称$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_n$为(4.1)的 Floquet 特征指数.

五、Floquet 理论的推广

从上面的几节来看，(4.1)可以经过拟周期线性变换成为(4.8)，而(4.8)为三角形的拟周期系统，不难看出在适当的条件下，(4.8)为可约系，因之(4.1)为可约系，（所谓(4.1)为可约系是指(4.1)可以通过拟周期线性变换，化为常系数微分方程系).

从上面所讨论的，要使(4.1)成为可约系，需要(4.1)的频率ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m满足(3.1)外，尚会出现小除数

$$i\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu\omega_\nu+\sum_{\mu=1}^{n}j_\mu\beta_\mu$$

的问题，其中$k=(k_1,k_2,\cdots.k_m)$，$j=(j_1, j_2, \cdots, j_n)$是整数向量，$\Sigma|j_\mu|\leqslant 2$，$|\Sigma j_\mu|\leqslant 1$，$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_n$为(4.1)的 Floquet 特征指数，因此对我们所讨论的问题，尚进一步假定下式成立:

$$\left|i\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu\omega_\nu+\sum_{\mu=1}^{n}j_\mu\beta_\mu\right|\geqslant k(\omega, \beta)(1+\|k\|^{(m+1)})^{-1} \tag{5.1}$$

其中$k(\omega, \beta)$是正的常数，只跟$\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$和$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$有关系. $k=(k_1, k_2, \cdots k_m)$，$j=(j_1, j_2, \cdots,j_n)$为整数向量，$\|k\|=|k_1|+|k_2|+\cdots+|k_m|\neq 0$，

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}j_\mu\right|\leqslant 1, \quad \sum_{\mu=1}^{n}|j_\mu|\leqslant 2,$$

关于ω和β的关系的详细讨论，可参考[2]及[3].

下面的定理是本文所得的结果

定理：对(4.1)的n阶拟周期线性系统，如果满足了下面的条件：

（i） $A(u_1, u_2, \cdots,u_m)\in C^{(\tau)}$，$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2(m+1)$，$N=\frac{1}{2}n(n+1)$.

（ii） **拟周期频率ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_m满足条件(3.1)，这时(4.1)存在Floquet特征指数β_1，$\beta_2,\cdots,\beta_n$. 同时假定(5.1)成立. 那末(4.1)是可约系，也就是(4.1)存在拟周期线性变换，把(4.1)化为常系数的线性微分方程系**

$$\frac{dy}{dt}=\Omega y$$

其中Ω为常数方阵，同时Ω的特征根就是(4.1)的 Floquet 特征指数根，进一步来说，如果任何拟周期线性变换把(4.1)化为常系数微分方程系

$$\frac{dy}{dt}=\Omega^0 y$$

则Ω^0的特征根一定是(4.1)的Floquet特征指数根.

证明：当 $A(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in C^{(\tau)}$，$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2(m+1)$，引理4指出可以经某拟周期酉变换把(4.1)化为(4.8)，因此只证明定理对(4.8)成立．可把(4.8)写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=c_{11}(t)z_1+c_{12}(t)z_2+\cdots+c_{1n}(t)z_n\\ \frac{dz_2}{dt}&=\qquad\qquad c_{22}(t)z_2+\cdots+c_{2n}(t)z_n\\ &\cdots\cdots\\ \frac{dz_n}{dt}&=\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}(t)z_n\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

设这系数方阵$C(t)$的平均方阵为

$$\bar{C}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)d\tau$$

由于上面说过$C(t)\in C^{(N\tau_0)}$，故 $C(t)-\bar{C}$ 的不定积分$\int_0^t(C(\tau)-\bar{C})d\tau$为拟周期的，可设

$$c_{ii}(t)=\beta_i+f_i(t),\quad g_i(t)=\int_0^t f_i(\tau)d\tau\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\tag{5.3}$$

如四、所说的，这里β_1，β_2，…，β_n是(4.1)的Floquet特征指数根，$g_i(t)$为拟周期函数，从(5.2)得

$$z_n(t)=z_n(0)\exp(\beta_n t+g_n(t))$$

取拟周期变换$y_n=z_n\exp(-g_n(t))$，那末

$$\frac{dy_n}{dt}=\beta_n y_n\tag{5.4}$$

为常系数线性微分方程，可归纳假定有$n-1$阶拟周期正则三角型方阵$J_{n-1}(t)$，使

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=J_{n-1}(t)\begin{pmatrix}z_2\\z_3\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\\ &\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\Omega_{n-1}\begin{pmatrix}y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \Omega_{n-1}=\begin{pmatrix}\beta_2 & & \\ & \beta_3 & * \\ 0 & & \ddots\ \beta_n\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

Ω_{n-1}为常数方阵，上面指出$\Omega_1=(\beta_n)$，$J_1(t)=\exp(-g_n(t))$，故这归纳假定是合理的．

现在考虑

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=c_{11}(t)z_1+c_{12}(t)z_2+\cdots+c_{1n}(t)z_n\\ &=c_{11}(t)z_1+s_2(t)y_2+s_3(t)y_3+\cdots+s_n(t)y_n\end{aligned}$$

其中 $$\begin{aligned}&(s_2(t),\ s_3(t),\ \cdots,\ s_n(t))\\ &=(c_{12}(t),\ c_{13}(t),\ \cdots,\ c_{1n}(t))J_{n-1}^{-1}(t)\end{aligned}\tag{5.6}$$

参照(5.2)，(5.3)得

$$\frac{d}{dt}(z_1\exp(-g_1(t)))=\beta_1 z_1\exp(-g_1(t))$$
$$+\exp(-g_1(t))(s_2(t)y_2+s_3(t)y_3+\cdots+s_n(t)y_n) \tag{5.7}$$

令

$$H^*(t)=(h_{12}(t),\ h_{13}(t),\ \cdots,\ h_{1n}(t))$$

为待定的拟周期向量，施行变换

$$y_1=z_1\exp(-g_1(t))+H^*(t)\vec{y}_0$$
$$\vec{y}_0=\begin{pmatrix} y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

得到

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{d}{dt}(z_1\exp(-g_1(t)))+\left(\frac{dH^*(t)}{dt}+H^*(t)\Omega_{n-1}\right)\vec{y}_0$$

从关系式(5.7)，上式可表为

$$\frac{dy_1}{dt}=\beta_1 y_1+\left(\frac{dH^*(t)}{dt}-\beta_1 H^*(t)+H^*(t)\Omega_{n-1}+D^*(t)\right)\vec{y}_0$$

其中$D^*(t)=\exp(-g_1(t))(s_2(t),\ s_3(t),\ \cdots,\ s_n(t))$.

只要证明存在拟周期向量$H^*(t)$使

$$\frac{dH^*(t)}{dt}-\beta_1 H^*(t)+H^*(t)\Omega_{n-1}+D^*(t)=(\sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \cdots,\ \sigma_{1n}) \tag{5.8}$$

为常数向量．从

$$y_1=z_1\exp(-g_1(t))+H^*(t)\vec{y}_0$$
$$=z_1\exp(-g_1(t))+H^*(t)J_{n-1}(t)\begin{pmatrix} z_2\\ z_3\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

可取

$$J_n(t)=\begin{pmatrix}\exp(-g_1(t)) & H^*(t)J_{n-1}(t)\\ 0 & J_{n-1}(t)\end{pmatrix}$$

显然$J_n(t)$为正则的三角型的拟周期方阵，而上面y_1，y_2，$\cdots$，y_n与z_1，z_2，$\cdots$，z_n的关系，可写为

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=J_n(t)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

直接计算得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Omega_n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Omega_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \sigma_{12}, & \cdots, & \sigma_{1n} \\ 0 & & \Omega_{n-1} & \end{pmatrix}$$

而Ω_n的特征根为(4.1)的 Floquet 特征指数根β_1，β_2，…，β_n.

以下将证明拟周期行向量$H^*(t)$的存在性：

上面说过$C(t)\in C^{(N\tau_0)}$，$g_n(t)$为$f_n(t)$的不定积分，从引理 2 可以保证

$$J_1(t)=\exp(-g_n(t))\in C^{((N-1)\tau_0)},$$

$J_{n-1}(t)$为三角型方阵，它的非零元素不超过$\frac{1}{2}n(n-1)$个，$J_{n-1}(t)$的元素可以由 $C(t)$ 中的元素至多不超过$\frac{1}{2}n(n-1)$次积分而得到. 故$J_{n-1}(t)\in C^{(N\tau_0-\frac{1}{2}n(n-1)\tau_0)}$，即$J_{n-1}(t)\in C^{(n\tau_0)}$，从(5.6)知$D^*(t)\in C^{(n\tau_0)}$，因之$D^*(t)$的转置向量$D(t)$的平均向量存在. 可取

$$\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \vdots \\ \sigma_{1n} \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t D(\tau)d\tau \tag{5.9}$$

令

$$D_0(t)=\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \vdots \\ \sigma_{1n} \end{pmatrix} - D(t) = \begin{pmatrix} d_2(t) \\ d_3(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

则$D_0(t)$的平均向量为零向量，设$H(t)$为$H^*(t)$的转置向量，Ω^*_{n-1}为Ω_{n-1}的转置方阵，则(5.8)可写为

$$\frac{dH(t)}{dt}+(\Omega^*_{n-1}-\beta_1 E)H(t)+D(t)=\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \vdots \\ \sigma_{1n} \end{pmatrix}$$

即

$$\frac{dH(t)}{dt}=(\beta_1 E-\Omega^*_{n-1})H(t)+D_0(t)$$

先考察$H(t)$的第一分向量$h_{12}(t)$所满足的方程式

$$\frac{dh_{12}(t)}{dt}=(\beta_1-\beta_2)h_{12}(t)+d_2(t)$$

这时$d_2(t)\in C^{(n\tau_0)}$,从(5.9)，(5.10)知$d_2(t)$的平均值为零，所以 $d_2(t)$ 为拟周期函数，可设

$$d_2(t)=\sum_{k\neq 0} d_k^{(2)}\exp(i(k,\ \omega)t)$$

那末

$$\frac{d}{dt}(h_{12}(t)\exp(-(\beta_1-\beta_2)t))$$

$$=\sum_{k\neq 0} d_k^{(2)}\exp(i(k,\ \omega)t-(\beta_1-\beta_2)t)$$

可取

$$h_{12}(t)=\sum_{k\neq 0}\frac{d_k^{(2)}\exp(i(k,\ \omega)t)}{i(k,\ \omega)-(\beta_1-\beta_2)}$$

由于$d_2(t)\in C^{(n\tau_0)}$，又从条件(ii)，得$h_{12}(t)$为拟周期函数，且$h_{12}(t)\in C^{((n-1)\tau_0)}$. 可归纳假定已经取好了拟周期函数$h_{12}(t)$，$h_{13}(t)$，…，$h_{1r-1}(t)$，它的平均值为零，且这些函数属于$C^{((n-r+2)\tau_0)}$，不难看出

$$\frac{dh_{1r}(t)}{dt}=(\beta_1-\beta_r)h_{1r}(t)+\bar{d}_r(t)$$

$\bar{d}_r(t)\in C^{((n-r+2)\tau_0)}$，$\bar{d}_r(t)$为拟周期函数，它的平均值为零. 故可同于上面$h_{12}(t)$的取法而确定了$h_{1r}(t)$. $h_{1r}(t)\in C^{((n-r+1)\tau_0)}$，$h_{1r}(t)$为拟周期函数，它的平均值为零. 这样，就用归纳法确定拟周期向量$H(t)$，$H(t)\in C^{(\tau_0)}$，而定理的第一部分得到.

如果(4.1)经过任何一种拟周期线性变换

$$y=R(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)x$$

后，所得的常系数线性微分方程系为

$$\frac{dy}{dt}=\Omega^0 y$$

Ω^0为常数方阵，设(4.1)的基本解方阵$Z(t)$，可设$Z(0)=E$，E为单位方阵，那末

$$Z(t)=R^{-1}(t)\exp(-\Omega^0 t)R(0)$$

$$R(t)=R(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)$$

当$t_j\to\infty$服从(4.3)关系，则

$$Z(t_j)=\exp(-\Omega^0 t_j)(E+o(1))$$

设$Z(t)$的特征根为$\delta_1(t)$，$\delta_2(t)$，…，$\delta_n(t)$，Ω^0的特征根为β'_1，β'_2，…，β'_n，那末

$$\delta_i(t)=(1+o(1))\exp(\beta'_i t),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{5.11}$$

但$\delta_i(t)$与(4.1)的Floquet特征指数β_1，β_2，…，β_n的关系式为

$$\beta_i=\lim_{t_j\to\infty}\frac{1}{t_j}\log\delta_i(t_j).\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

把此关系与(5.11)相比较，即得$\beta'_i=\beta_i$，$i=1$，2，…，n. 于是定理的第二部分证毕.

附注1. (3.1)的关系式，可以改进为下面的命题.

命题. 在m维欧氏空间R_m中，几乎所有向量$\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_m)$满足不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{m}k_i\omega_i\right|\geqslant k(\omega)\|k\|^{-(m-1+\rho)} \tag{§}$$

其中 $k=(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m)$ 为非零的整数向量，$\|k\|=|k_1|+|k_2|+\cdots+|k_m|$. ρ 为任何固定的正数，$k(\omega)$为某正数.

证明：只证明对R_m中任何有界区域I，在I中不满足(§)的点ω的集合是个Lebesgue零集.

对任何$\varepsilon>0$及固定的非零整数向量$k=(k_1, k_2, \cdots, k_m)$，在$I$中满足

$$\left|\sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j\right| \leqslant \varepsilon \|k\|^{-(m-1+\rho)}$$

的集合，记为$I(\varepsilon, k)$. 其次考虑两个平行的超平面

$$P_1:\ \sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j = \varepsilon \|k\|^{-(m-1+\rho)}$$

$$P_2:\ \sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j = -\varepsilon \|k\|^{-(m-1+\rho)}$$

则不满足(§)的点集均在此两平行超平面之间，可设

$$\|k\|_0 = \max(|k_1|, |k_2|, \cdots, |k_m|) = |k_1|$$

则此两平行超平面的距离

$$d \leqslant \frac{2\varepsilon}{\|k\|_0}\|k\|^{-(m-1+\rho)}$$

这是因为点$\left(\pm\frac{1}{k_1}\varepsilon\|k\|^{-(m-1+\rho)}, 0, \cdots, 0\right)$分别在$P_1$，$P_2$上. 因之可得常数$K(I)$，只跟区域$I$有关. 使$I(\varepsilon, k)$的测度满足不等式

$$m(I(\varepsilon, k)) \leqslant \varepsilon K(I)\|k\|_0^{-(m+\rho)}$$

如引理2所推导的，则有

$$\sum_{\|k\|_0=l} m(I(\varepsilon, k)) \leqslant \varepsilon K(I) c_0(m) l^{-(m+\rho)} \cdot l^{m-1}$$

$$= \varepsilon K(I) c_0(m) l^{-(1+\rho)}$$

那末

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\|k\|_0=l} m(I(\varepsilon, k)) \leqslant \varepsilon K(I) c_0(m) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-(1+\rho)} \to 0\text{，当 } \varepsilon \to 0.$$

这样就得到了命题的证明.

附注2. 当(3.1)改为(§)，则定理对光滑性的要求条件，可以改为$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2m$.

参 考 文 献

1. Arnold, V. I., Small Denominators and problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics, uspekhi Mat. Nauk. USSR. 18. (1963) 91—192.
2. Moser, J., On the theory of Quasi-Periodic Motions, *SIAM. Rev.*, 8, (1966). 145—172.
3. Moser, J., Convergent Series Expansion of Quasi-Periodic Motions *Math. Ann.* 169, (1967) 136—176.
4. Giacaglia, G. E. O., Perturbation Method in Nonlinear Systems. *Appl. Math. Sci.* 8, 356—358.
5. Diliberto, S. P., On Systems of Ordniary Differential Equations, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations I*, (1950). 1—48.

The Floquet Theory for Quasi-Periodic Linear System

Lin Zhen-sheng

(Department of Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we establish the Floquet theory for the quasi-periodic linear system

$$\frac{dx}{dt}=A(\omega_1 t,\ \omega_2 t,\ \cdots,\ \omega_m t)x \tag{0.1}$$

where $A(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$ is an $n\times n$ matrix which is the periodic function of $u_1,\ u_2,\ \cdots,u_m$ with period 2π, and $A(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\ \in C^r$, $r=(N+1)r_0$, $r_0=2(m+1)$, $N=\frac{1}{2}n(n+1)$. At the same time we define the characteristic exponential roots $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$ of (0.1), and assume that

A. $\left|\sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j\right|\geqslant K(\omega)\left(\sum_{j=1}^{m}|k_j|\right)^{-(1+m)}$

B. $\left|\ i\sum_{j=1}^{m} k_j\omega_j+\sum_{\mu=1}^{n} j_\mu\beta_\mu\ \right|\geqslant K(\omega,\beta)\left(\sum_{j=1}^{m}|k_j|\right)^{-(1+m)}$

where $K(\omega)$, $K(\omega,\ \beta)>0$, j_μ and k_j are integers, and the integers $k_1,\ k_2\ \cdots,\ k_m$ are not all zero, i is the imaginary number, $\left|\sum_{\mu=1}^{n} j_\mu\right|\leqslant 1$, $\sum_{\mu=1}^{n}|j_\mu|\leqslant 2$, then there is a quasi-periodic linear transformation to transform (0.1) into a constant linear system.