

# 积分因子在定性理论中的性质及其应用\*

李 骊

(天津大学, 1980年7月9日收到)

## 摘 要

在微分方程定性理论中, 一次奇点的分类, 高次奇点的分类, 极限环的稳定性等, 都是需要研究的重要问题, 并且是用不同的方法来加以解决的. 而高次奇点中焦点与中心的区分, 至今还是一个未解决的问题. 在本文中, 我们从理论上阐明了, 所有上述问题都可利用积分因子的概念而统一地加以处理. 此外, 我们并给出了判别中心与焦点的方法, 这一方法对于一次奇点与高次奇点都是同样适用的, 从而解决了关于高次奇点的中心与焦点的区分问题.

## 一、积分因子的若干性质

给定方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

它满足解的存在唯一条件. 定义函数  $\mu$ , 使之满足

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

函数  $\mu$ , 即是熟知的关于方程 (1.1) 的积分因子. 方程 (1.2) 也可写为

$$\frac{d\mu}{dt} \Big|_{(1.1)} + \text{div} \mathbf{v} \cdot \mu = 0 \quad (1.3)$$

其中  $\frac{d\mu}{dt} \Big|_{(1.1)} = \frac{\partial\mu}{\partial x} X + \frac{\partial\mu}{\partial y} Y$ , 乃  $\mu$  沿方程 (1.1) 积分轨线的导数,  $\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ ,

乃方程 (1.1) 右端向量的散度.

设方程 (1.1) 的通积分为  $\phi(x, y) = c$ , 那么, 在  $\text{div} \mathbf{v} \neq 0$  的情况下,  $\phi$  与  $\mu$  是不同的. 但是, 如果  $\text{div} \mathbf{v}$  在某一域内有界, 则在该域内, 满足  $\phi(x, y) = 0$  之各点将与满足  $\mu(x, y) = 0$  之各点相互重合. 事实上, 由于  $\phi = 0$  是方程 (1.1) 的一个积分, 故有  $\frac{d\phi}{dt} \Big|_{(1.1), \phi=0} = 0$ , 另

\* 钱伟长推荐.

一方面, 由于  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  有界, 故有  $\operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \phi_{\phi=0} = 0$ . 由此可见,  $\phi=0$  的确也同时满足方程 (1.3). 反之, 设  $\mu=0$  为方程 (1.3) 的解, 把它代入 (1.3) 之后, 我们将得到

$$\left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{(1.1)} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mu \equiv 0 \quad (1.4)$$

由于  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  有界, 故有  $\operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mu_{\mu=0} = 0$ , 从而由上式可知, 此时必有  $\left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{(1.1)_{\mu=0}} = 0$ , 这就表明,  $\mu=0$  的确也同时满足方程 (1.1). 现进而证明,  $\phi=0$  与  $\mu=0$  二者必互相重合. 如其不然, 设  $\mu=0$  与某一  $\phi=c$  相重合 (上已证明,  $\mu=0$  也满足方程 (1.1), 故它必与方程 (1.1) 的某一积分轨线  $\phi=c$  相重合), 由于  $\mu=0$  恒等地满足式 (1.4), 故  $\phi=c$  也必恒等地满足式 (1.4), 亦即有

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{(1.1)_{\phi=c}} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \phi_{\phi=c} \equiv 0$$

但是, 一方面, 由于  $\phi=c$  是方程 (1.1) 的一个积分轨线, 故有  $\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{(1.1)_{\phi=c}} \equiv 0$ ; 另一方面, 由于假定  $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$ , 故有  $\operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \phi_{\phi=c} \neq 0$ , 这就得出了矛盾.

对于  $\phi=\infty$ , 我们可以作变换  $\psi = \frac{1}{\phi}$  或  $\phi = \frac{1}{\psi}$ , 将其代入 (1.1), 则得到  $\psi$  所满足的方

程为  $\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{(1.1)} = 0$  按照上面同样的讨论方法, 可知此时  $\psi=0$  (亦即  $\phi=\infty$ ) 将与  $\mu=0$  相重

合. 同样, 对于  $\mu=\infty$ , 我们可以作变换  $\nu = \frac{1}{\mu}$  或  $\mu = \frac{1}{\nu}$ , 将其代入 (1.3), 则得到关于  $\nu$  所满足的方程为

$$\left. \frac{d\nu}{dt} \right|_{(1.1)} - \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \nu = 0 \quad (1.5)$$

按照上面同样的讨论方法, 可知此时  $\phi=0$  将与  $\nu=0$  (亦即  $\mu=\infty$ ) 相互重合.

为了下面说明方便起见, 我们称与  $\phi=0$  或  $\phi=\infty$  相对应的轨线为方程 (1.1) 的零值或极值轨线, 与  $\mu=0$  或  $\mu=\infty$  相对应的曲线称为积分因子  $\mu$  的零值或极值曲线. 如此, 综上所述, 可得

**引理 1** 方程 (1.1) 的零值或极值轨线与其积分因子  $\mu$  的零值或极值曲线相互重合.

如果, 方程 (1.1) 之积分因子  $\mu$  在原点邻域内为定号函数, 则  $\mu$  之零值或极值曲线此时就退化为一个孤立点即原点, 由引理 1, 知方程 (1.1) 的零值或极值轨线就也退化为一个孤立点即原点. 这表明, 此时原点或为中心或为焦点. 如果  $\mu$  在原点邻域内为常号或变号函数, 则  $\mu$  之零值或极值曲线将过原点并具有定切方向, 由引理 1, 知方程 (1.1) 之零值或极值轨线必也如此. 这表明, 此时原点或为结点, 或为鞍点. 由此得

**引理 2** 如方程 (1.1) 之积分因子  $\mu$  在原点邻域内为定号函数, 则原点为中心或焦点. 如  $\mu$  在原点邻域内为常号或变号函数, 则原点为结点或鞍点.

现引入下述积分

$$I = \iint_G \left( \frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} \right) dx dy$$

其中  $G$  为某一包含原点在内的单连通区域. 如该区域的边界为闭曲线  $l$ , 由格林公式得

$$I = \oint_l \mu (X dy - Y dx) = \oint_l \mu v_n ds \quad (1.6)$$

其中  $v_n$  为方程 (1.1) 右端所给向量沿  $l$  外法线方向的投影,  $ds$  为沿  $l$  之弧长.

在极坐标中, 上式的形式为

$$I = \oint_l \mu [(X \sin \theta - Y \cos \theta) dr + r(X \cos \theta + Y \sin \theta) d\theta] \quad (1.7)$$

特别地, 如果  $l$  为一以原点为中心以  $r$  为半径的圆, 则此时有  $r = \text{常数}$  与  $dr = 0$ , 因而上式化为

$$I = r \int_0^{2\pi} \mu (X \cos \theta + Y \sin \theta) d\theta \quad (1.8)$$

为说明方便起见, 我们称  $I$  为方程 (1.1) 穿过  $l$  的轨线流量值.

**引理 3** 如果, 在  $l_1$  与  $l_2$  二闭曲线所包围的域内方程 (1.1) 无奇点, 则方程 (1.1) 穿过  $l_1$  与  $l_2$  的轨线流量值相等.

证: 将域  $G$  假想用一  $s$  线断开(为了看起来方便, 图中将  $s$  画成双线), 如图 1 所示. 据此, 我们有

$$I = \oint_l = \oint_{\widehat{AB}} + \oint_{\widehat{BC}} + \oint_{\widehat{CD}} + \oint_{\widehat{DA}}$$

其积分方向如图中虚线所示. 由于在域  $G$  内方程 (1.1) 无奇点, 故应有  $I = 0$ . 另一方面, 在上式右端中,  $\oint_{\widehat{BC}}$  与  $\oint_{\widehat{DA}}$  二者相互消去, 又  $\oint_{\widehat{AB}} = \oint_{l_1} = I_1$ ,  $\oint_{\widehat{CD}} = -\oint_{l_2} = -I_2$ , 故得

$$0 = I_1 - I_2$$

亦即  $I_1 = I_2$ , 如是, 引理即被证明. 以上是假定  $l_1$  与  $l_2$  不相交, 如二者相交, 其证明与上述相同.

**引理 4** 如果, 对某一区域  $G$ , 当  $t$  增加 (或减少) 时方程 (1.1) 的一族轨线自  $G$  外经其边界  $l$  的某一部分进入  $G$  内, 又复经  $l$  的另一部分穿出  $G$  外, 则在  $l$  上对应于这族轨线的进入与穿出部分, 其轨线流量值之和为零.

证: 如图 2 所示, 设方程 (1.1) 有一族轨线自  $l$  的  $\widehat{AB}$  部分进入, 又经  $\widehat{CD}$  部分穿出. 沿区域  $ABCD A$  的边界计算轨线流量值, 则得

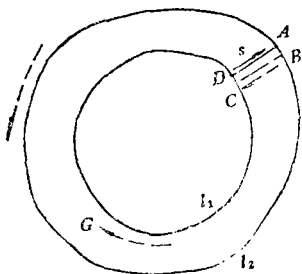


图 1

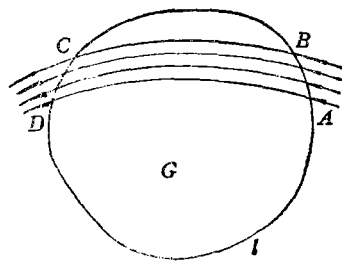


图 2

$$I = \oint_{ABCD} = \oint_{\widehat{AB}} + \oint_{\widehat{BC}} + \oint_{\widehat{CD}} + \oint_{\widehat{DA}}$$

由于在  $ABCD$  内方程 (1.1) 无奇点, 故应有  $I=0$ . 另一方面, 在上式右端, 由于  $\widehat{BC}$  与  $\widehat{DA}$  均为方程 (1.1) 之轨线, 故有  $\oint_{\widehat{BC}} = \oint_{\widehat{DA}} = 0$ , 于是得

$$0 = \oint_{\widehat{AB}} + \oint_{\widehat{CD}}$$

据此, 引理即被证明.

**引理 5** 如果, 在区域  $G$  的边界  $l$  上  $\mu$  为定号, 并且有  $I \neq 0$ , 则当  $t$  增加或减少时, 方程 (1.1) 必有一族轨线最终自  $G$  内穿出  $G$  外, 或由  $G$  外进入  $G$  内.

如果, 在轨线通过  $l$  的相应部分上, 有  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu > 0$ , 则当  $t$  增加时, 轨线系由  $G$  内穿出  $G$  外, 反之, 则由  $G$  外进入  $G$  内.

证: 对于整个边界  $l$ , 按照方程 (1.1) 的轨线进出情况可以区分为三个部分: 第一部分, 轨线最终自  $G$  内穿出  $G$  外, 设这部分对应  $l$  上弧长的总和为  $l_1$ , 轨线流量值为  $I_1 = \oint_{l_1}$ ; 第二部分, 轨线最终自  $G$  外进入  $G$  内, 设这部分对应  $l$  上弧长的总和为  $l_2$ , 轨线流量值为  $I_2 = \oint_{l_2}$ ; 第三部分, 轨线自  $G$  外进入  $G$  内又由  $G$  内穿出  $G$  外, 设这部分对应  $l$  上弧长的总和为  $l_3$ , 轨线流量值为  $I_3 = \oint_{l_3}$ , 并且由引理 4, 知  $I_3 = 0$ .

于是得

$$I = \oint_l = \oint_{l_1} + \oint_{l_2} + \oint_{l_3}$$

根据引理条件,  $I \neq 0$ , 故  $l_3$  决不可能等于整个  $l$ , 否则, 将有  $I = \oint_l = \oint_{l_3} = I_3 = 0$ , 这与  $I \neq 0$  相矛盾. 由此可知,  $l_1$  与  $l_2$  中至少有一个不等于零, 或二者均不等于零. 如  $l_1 \neq 0$ , 这表明方程 (1.1) 的轨线中当  $t$  增加时有一族最终由  $G$  内穿出  $G$  外. 如  $l_2 \neq 0$ , 这表明当  $t$  增加时方程 (1.1) 之轨线中有一族最终由  $G$  外进入  $G$  内. 如  $l_1$  与  $l_2$  均  $\neq 0$ , 这表明当  $t$  增加时方程 (1.1) 之轨线中既有一族自  $G$  内穿出  $G$  外, 又有一族自  $G$  外进入  $G$  内. 不论属于何种情况, 都说明在  $I \neq 0$  情况下, 当  $t$  增加或减少时, 方程 (1.1) 之轨线中必有一族最终由  $G$  内穿出  $G$  外, 或由  $G$  外进入  $G$  内.

此外, 由于  $I = \oint_l \mu v_n ds$ , 所以, 如  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu > 0$ , 则必有  $v_n > 0$ , 故知轨线系由  $G$  内经  $l$  而穿出  $G$  外, 反之, 则系由  $G$  外进入  $G$  内.

## 二、中心、焦点与极限环的判定

现研究如何利用积分因子来判定中心、焦点与极限环, 它表述为以下诸定理.

**定理 1** 如果对方程 (1.1) 存在这样的积分因子  $\mu$ , 它在原点邻域内定号, 且对包围原点之任意闭曲线  $l$ , 轨线流量值  $I \neq 0$ , 则原点为焦点. 并且, 如果  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu < 0$ , 则原点为稳定焦点, 反之, 为不稳定焦点.

证: 因  $\mu$  在原点邻域内定号, 由引理 2, 知原点或为中心或为焦点, 但由于  $I \neq 0$ , 由引理 5, 知方程 (1.1) 的轨线中必有一族当  $t$  增加或减少时最终自  $G$  外进入  $G$  内或由  $G$  内穿出  $G$  外. 这表明, 原点不可能为中心, 因而必为焦点. 如果,  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu > 0$ , 由引理 5, 知当  $t$  增加时轨线系由  $G$  内穿出  $G$  外, 故此焦点为不稳定; 反之, 则为稳定.

**定理 2** 如果对方程 (1.1) 存在这样的积分因子  $\mu$ , 它在原点邻域内定号, 且对包围原点之任意闭曲线  $l$ , 轨线流量值  $I = 0$ , 则原点为中心.

证: 因  $\mu$  在原点邻域内定号, 由引理 2, 知原点或为中心或为焦点. 设其为焦点, 则将  $I \neq 0$ , 这与  $I = 0$  相矛盾, 故知原点必为中心.

**定理 3** 如果方程 (1.1) 存在这样的积分因子  $\mu$ , 它的零值或极值曲线中有不自相交闭曲线, 且对位于此闭曲线每一侧充分小邻域内的其他闭曲线  $l$ , 轨线流量值  $I \neq 0$ , 则上述闭曲线就是方程 (1.1) 的极限环. 如果, 在此极限环内侧, 有  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu > 0$ , 在其外侧有  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu < 0$ , 则此极限环为稳定, 反之, 为不稳定. 如果, 在此极限环内外两侧,  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu$  均  $> 0$  或  $< 0$ , 则此极限环为半稳定.

证: 如果  $\mu$  的零值或极值曲线中有不自相交的闭曲线, 由引理 1, 知此闭曲线必重合于方程 (1.1) 的某一零值或极值轨线  $S$ , 从而  $S$  是方程 (1.1) 的一个周期解. 其次, 由于对位于  $S$  某一侧充分小邻域内之任一闭曲线  $l$ , 有  $I \neq 0$ , 在此情况下, 在该邻域内方程 (1.1) 必不会再有其他周期解. 如其不然, 设有另一周期解  $S'$  存在, 则沿此周期解, 将有

$$I' = \oint_{S'} = 0, \text{ 由引理 3 知, 对位于同一邻域内的任一闭曲线 } l, \text{ 也必有 } I = \oint_l = \oint_{S'} = I' = 0,$$

这与条件  $I \neq 0$  相矛盾, 因而在  $S$  邻域内不会有其他周期解. 这表明,  $S$  是其邻域内的唯一周期解, 故它必为极值环. 如果, 在  $S$  的内侧, 有  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu > 0$ , 在  $S$  外侧, 有  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu < 0$ , 由引理 5, 知在  $S$  内侧方程 (1.1) 的所有轨线最终将穿出  $l$  而趋于  $S$ , 在  $S$  外侧则最终进入  $l$  而趋于  $S$ , 故  $S$  为稳定极限环. 同理可证明其他两种情况.

如果方程 (1.1) 的奇点具有下述性质: 1. 所有趋向奇点的轨线均无确定切线方向; 2. 在奇点的任一充分小邻域内, 均有可数无穷多极限环, 则称此奇点为中心型焦点.

**定理 4** 如方程 (1.1) 存在这样的积分因子  $\mu$ , 它的零值或极值曲线为原点以及包围原点的一系列不自相交又互不相交的闭曲线, 且此闭曲线的数目在原点充分小的邻域内为可数无穷多, 此外, 对位于相邻两闭曲线之间的任一闭曲线  $l$ , 有  $I \neq 0$ , 则原点为中心型焦点.

证: 如  $\mu$  之零值或极值曲线为原点以及一系列绕原点不自相交又互不相交的闭曲线, 且此闭曲线的数目在原点充分小的邻域内为可数无穷多, 那么, 由引理 1, 方程 (1.1) 的零值或极值轨线必也如此. 这首先表明在原点处无这样的零值或极值轨线, 它以定切方向趋向原点, 因而可以断定, 原点只可能是中心或焦点. 其次, 由于对位于相邻两零值或极值闭曲线之间的任一闭曲线  $l$  有  $I \neq 0$ , 故可用上面相同的方法, 证明上述零值或极值闭曲线都是方程 (1.1) 的极限环. 由于这些极限环在原点充分小的邻域内为可数无穷多, 故原点不可能是中心, 而只能是中心型焦点.

现转入研究  $\text{div} v \equiv 0$  的情况, 此时由式 (1.3) 可以看出, 方程 (1.1) 有一明显的积分因子  $\mu = \text{常数}$ , 不失一般性, 可认为  $\mu = 1$ . 在此情况下, 不可能有一族轨线趋向原点. 如其不然, 设有一族轨线趋向原点, 如图 3 所示, 则对图示之区域  $G$  求  $I$  之值, 并注意在  $G$  内方程 (1.1) 无奇点, 因而得

$$0 = \iint_G = \oint_{\widehat{AB}} + \oint_{\widehat{BC}} + \oint_{\widehat{CD}} + \oint_{\widehat{DA}}$$

由于  $\widehat{BC}$  与  $\widehat{DA}$  为方程 (1.1) 之轨线, 故  $\oint_{\widehat{BC}} = \oint_{\widehat{DA}} = 0$ , 于是得 (注意此时  $\mu=1$ )

$$0 = \oint_{\widehat{AB}} v_n ds + \oint_{\widehat{CD}} v_n ds$$

上式等号右端第一项为有限值, 至于第二项, 当轨线趋向原点时将  $v_n \rightarrow 0$  (因为  $v \rightarrow 0$ ) 与  $\widehat{CD} \rightarrow 0$ , 从而有  $\oint_{\widehat{CD}} v_n ds \rightarrow 0$ , 这表明, 上式右端两项之和  $\neq 0$ , 于是得出矛盾. 这一矛盾说明, 在  $\operatorname{div} v \equiv 0$  情况下, 不可能有一族轨线趋向原点, 故原点不会是焦点或结点. 据此, 就得出

**定理5** 对方程 (1.1), 如有  $\operatorname{div} v \equiv 0$ , 则原点只可能是中心或鞍点.

下面举几个例子说明上述诸定理的应用.

例1 秦元勋教授在 [1] 中曾给出如下四个例子

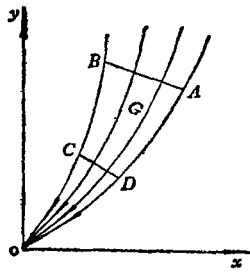


图 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y^3 \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y[(2x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2] \\ \frac{dy}{dt} &= x[(2x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)^2] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^2(x^3 - y^3) \\ \frac{dy}{dt} &= x^2(x^3 + y^3) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D})$$

对于(A), 有通积分  $x^4 + y^4 = c$ , 故原点是中心. 对于(B), 有通积分  $(2x^2 + y^2)e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = c$ ,

故原点也是中心, 但通积分却非全纯函数. 对于(C), 有通积分  $(x^6 + y^6)e^{\arctan \frac{y^3}{x^3}} = c$ ,

故原点是焦点. 对于(D), 有一系列可数无穷多周期解  $x^2 + y^2 = \frac{1}{k\pi}$  ( $k=1, 2, \dots$ ),

且在相邻两周期解之间其轨线为螺线, 按照前述定义, 原点为中心型焦点. 但是, 按照一般高次奇点处理法, 这四组方程都是属于所谓定号情况, 只能判定其积分轨线或为闭曲线, 或为无限次绕原点之螺线, 至于原点究竟是什么类型奇点, 就无法进一步加以区分. 但是, 利

用积分因子的有关性质, 这几种情况却是可以区分的. 对于 (A), 有  $\operatorname{div} v \equiv 0$ , 由定理 5, 知原点或为中心或为鞍点. 此外, 由于它又是属于所谓定号情况, 故可判定原点必非鞍点而是中心. 对于 (B), 有积分因子  $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)^2(2x^2+y^2)}$ , 它定正, 且对以原点为中心之任一圆周, 根据式 (1.8) 可算出

$$\begin{aligned} I &= r \int_0^{2\pi} \mu (X \cos \theta + Y \sin \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} d\theta = \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

因而, 由定理 2, 知原点为中心 (不过, 关于其通积分为非全钝函数这一点, 尚不能进一步加以判定). 对于 (C), 有积分因子  $\mu = \frac{1}{x^6+y^6}$ , 它定正, 又对以原点为心之任一圆周, 利用式 (1.8) 经过简单运算可得

$$I = \log \frac{1}{\sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^6 \theta + \cos^6 \theta} d\theta$$

上式右端第一项之值为零, 至于第二项, 由于被积函数在积分区间内为常正函数, 故此积分值必大于零, 于是, 由定理 1, 知原点为焦点. 并且, 由于此时有  $\operatorname{sign} I \cdot \operatorname{sign} \mu > 0$ , 故还可进一步判定原点为不稳定焦点. 对于 (D), 有积分因子  $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}}$ , 它的极值

曲线为原点以及由  $x^2+y^2 = \frac{1}{k\pi}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 所组成的以原点为心的可数无穷多圆周,

并且, 沿相邻两圆周之间的任一其他圆周  $l$ , 亦即沿  $r^2 = \text{常数} \approx \frac{1}{k\pi}$  之任一圆周  $l$ , 利用式

(1.8) 可求得  $I = 2\pi r^2 \approx 0$ , 故由定理 4, 知原点为中心型焦点.

例 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - x(x^2 + y^2 - 1)^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y(x^2 + y^2 - 1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{F})$$

对于 (E), 有积分因子  $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}$ , 它的极值曲线除原点外, 还有  $x^2+y^2=1$

这一闭曲线, 此外, 对  $x^2+y^2 < 1$  与  $x^2+y^2 > 1$  之圆周, 可求得  $I$  之值均等于  $2\pi$ , 故由定理 3, 知  $x^2+y^2=1$  为 (E) 之极限环. 又在  $x^2+y^2 < 1$  与  $x^2+y^2 > 1$  之邻域内, 分别有  $\operatorname{sign} I \cdot \operatorname{sign} \mu < 0$  与  $\operatorname{sign} I \cdot \operatorname{sign} \mu > 0$ , 故进而可知此极限环为不稳定. 对于 (F), 有积

分因子  $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)^2}$ , 它的极值曲线除原点外也有  $x^2+y^2=1$  这一闭曲线. 此

外, 对  $x^2+y^2 < 1$  与  $x^2+y^2 > 1$  之任一圆周, 可求得  $I$  之值均等于  $-2\pi$ , 故由定理 3, 知  $x^2+y^2=1$  为(F)之极限环. 又: 在  $x^2+y^2 < 1$  与  $x^2+y^2 > 1$  之邻域内,  $\text{sign} I \cdot \text{sign} \mu$  均  $< 0$ , 因而这一极限环是半稳定极限环.

### 三、齐次方程

给定如下  $m$  次齐次方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_m(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Y_m(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

如  $xY_m - yX_m \equiv 0$ , 则有  $\frac{Y_m}{X_m} = \frac{y}{x}$  (这表明  $X_m, Y_m$  为可约), 此时方程 (3.1) 可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

故知原点为退化结点.

如  $xY_m - yX_m \neq 0$ , 则 (3.1) 有积分因子  $\mu = \frac{1}{xY_m - yX_m}$ . 此时, 由引理 2 知, 如  $xY_m - yX_m$  为常号或变号函数, 则原点为鞍点或结点, 如  $xY_m - yX_m$  为定号函数, 则原点为中心或焦点. 对于后一种情况, 我们可以根据  $I$  是否等于零而进一步加以区分. 又:  $xY_m - yX_m$  仍为齐次函数, 故满足  $xY_m - yX_m = 0$  之曲线不可能为闭曲线, 亦即  $\mu$  不会有闭的极值曲线, 因而由引理 1 可知,  $m$  次齐次方程不可能产生极限环.

又: 对以原点为心、半径为  $r$  之圆周  $l$ , 由式 (1.8) 可得

$$\begin{aligned} I &= r \int_0^{2\pi} \mu(X_m \cos\theta + Y_m \sin\theta) d\theta \\ &= r \int_0^{2\pi} \frac{X_m(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_m(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta}{Y_m(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta - X_m(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

注意到  $X_m, Y_m$  均为  $m$  次齐次函数, 消去  $r^{m+1}$ , 并令

$$H(\theta) = Y_m(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta + X_m(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta$$

$$G(\theta) = Y_m(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - X_m(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

则上式可化为

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta \quad (3.2)$$

据此, 并综上所述, 可得

**定理6** 对于  $m$  次齐次微分方程组 (3.1), 如  $xY_m - yX_m \equiv 0$ , 则原点为退化结点. 如  $xY_m - yX_m$  为常号或变号函数, 则原点为鞍点或结点. 如  $xY_m - yX_m$  为定号函数, 此时如由 (3.2) 所算得之  $I = 0$ , 则原点为中心; 如  $I \neq 0$ , 则原点为焦点. 又:  $m$  次齐次微分方程组不可能产生极限环.

这些结论, 与利用一般高次奇点处理法所得到的完全一致.



#### 四、在一般情况下中心与焦点的判定

如所周知, 在一般情况下, 积分因子是很难求得的, 甚至它根本就不存在封闭解. 在此情况下, 我们可以利用 (1.3) 求下述级数形式解

$$\mu = \mu_m + \mu_{m+1} + \dots \quad (4.1)$$

其中  $\mu_m$  为关于  $x, y$  的  $m$  次齐次多项式. 如果这样的解存在, 这表明原点是  $\mu$  的零点. 而我们从前述讨论中可知,  $\mu$  的几何意义系表示积分轨线的度. 据此不难断定, 此时原点必为中心. 下面, 我们着重研究原点是  $\mu$  的极点的情况. 此时, 我们可以利用 (1.3) 式求下述级数形式解

$$\mu = \frac{1}{\mu_m + \mu_{m+1} + \dots} \quad (4.3)$$

或者, 更方便地, 是利用 (1.5) 求下述级数形式解

$$\nu = \frac{1}{\mu} = \mu_m + \mu_{m+1} + \dots \quad (4.3)$$

我们首先证明, 上述级数在原点充分小的邻域内必然是收敛的. 事实上, 在原点为  $\mu$  的极点的情况下, 它必然是  $\nu$  的零点. 此外, 由定理 1 知, 此时  $\mu$  从而  $\nu$  必为定号函数, 因而  $\nu = c$  当  $c$  充分小时必为闭曲线. 这表明当  $c$  充分小时  $x, y$  也必充分小, 反之, 当  $x, y$  充分小时  $c$  之值也必充分小. 前已述及, 此时原点为  $\nu$  的零点, 故在原点的任意小邻域内, 必然不存在  $\nu$  的极点. 这就表明, 在原点充分小的邻域内,  $\nu$  必可展为形如 (4.3) 的幂级数, 且此级数一定是收敛的.

为了应用方便, 我们可以将 (4.3) 写为极坐标的形式

$$\nu = \frac{1}{\mu} = r^m \phi_m(\theta) + r^{m+1} \phi_{m+1}(\theta) + \dots \quad (4.4)$$

并且有下面的定理:

**定理 7** 如对 (1.3), 可以求得下述形式的解

$$\mu = \frac{1}{r^m \phi_m(\theta) + r^{m+1} \phi_{m+1}(\theta) + \dots}$$

而且根据 (1.8) 所求得之积分

$$I_m = r \int_0^{2\pi} \frac{(X \cos \theta + Y \sin \theta)}{r^m \phi_m(\theta)} d\theta \neq 0$$

则原点必为焦点. 如  $\text{sign} I_m \cdot \text{sign} \mu < 0$ , 则为稳定焦点, 反之, 为不稳定焦点.

证: 首先, 前已证明,  $r^m \phi_m(\theta) + r^{m+1} \phi_{m+1}(\theta) + \dots$  是收敛的, 因此, 如  $I_m \neq 0$ , 则当  $r$  充分小时, 积分 (1.8)

$$\begin{aligned} I &= r \int_0^{2\pi} \mu (X \cos \theta + Y \sin \theta) d\theta \\ &= r \int_0^{2\pi} \frac{(X \cos \theta + Y \sin \theta)}{r^m \phi_m(\theta) + r^{m+1} \phi_{m+1}(\theta) + \dots} d\theta \end{aligned}$$

亦必  $\neq 0$  且与  $I_m$  具有同一符号. 其证明方法, 与证明定号函数加上高次项后其符号保持不

变所用的方法完全相同, 故从略. 然后, 再利用定理 1, 即可得到本定理的结论.

下面举例以说明上述定理的应用. 显然, 上述定理所述的判别方法对一次奇点与高次奇点是同样适用的. 不过, 为了便于比较, 我们这里采用了[1]中 p.87 所给出的例子, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - \frac{\beta}{2}x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \frac{2\alpha x^2y - \beta y^3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (G)$$

首先, 很容易算出

$$r(X\cos\theta + Y\sin\theta) = r^4 \left( \frac{\alpha - 3\beta}{8} - \frac{\alpha + \beta}{8} \cos 4\theta \right)$$

下面, 分为两种情况.

1.  $\alpha \neq 3\beta$  此时可求得

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{r^4 + r^6 \phi_6(\theta) + \dots} \\ I_4 &= \int_0^{2\pi} \frac{r(X\cos\theta + Y\sin\theta)}{r^4} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\alpha - 3\beta}{8} - \frac{\alpha + \beta}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} (\alpha - 3\beta) \neq 0 \end{aligned}$$

注意到此时  $\mu$  为定正, 故由定理 7 知, 当  $\alpha - 3\beta < 0$  时为稳定焦点, 当  $\alpha - 3\beta > 0$  时为不稳定焦点.

2.  $\alpha = 3\beta$  此时可求得

$$\mu = \frac{1}{r^2 + r^4 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right) + r^6 \phi_6(\theta) + \dots}$$

又在  $\alpha = 3\beta$  情况下

$$r(X\cos\theta + Y\sin\theta) = -r^4 \frac{\beta}{2} \cos 4\theta$$

因而

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^4 \frac{\beta}{2} \cos 4\theta}{r^2 + r^4 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \frac{\beta}{2} \cos 4\theta}{1 + r^2 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right)} d\theta \end{aligned}$$

注意到当  $r$  充分小时, 有

$$\frac{1}{1+r^2 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right)}$$

$$= 1 - r^2 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right) + r^4 \frac{\beta^2}{4} \phi_4(\theta)$$

— ...

从而 
$$I_4 = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - r^2 \frac{\beta}{2} \left( \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{7}{8} \right) + r^4 \frac{\beta^2}{4} \phi_4(\theta) \right. \\ \left. - \dots \right] \left( -r^2 \frac{\beta}{2} \cos 4\theta \right) d\theta$$

$$= r^4 \frac{\beta^2}{4} \pi + O(r^6)$$

可见, 当  $r$  充分小时, 必有  $I_4 > 0$ , 又此时  $\mu$  为定正, 从而由定理 7 知, 此时原点为不稳定焦点.

所有上述结论, 与 [1] 中的结论是完全相同的.

顺便指出, 对于一、二两节中所述的问题, 显然也都可以用本节的方法作类似的处理.

#### 参 考 文 献

秦元勋, 《微分方程所定义的积分曲线》(上册), 科学出版社, (1959).

# The Properties and Applications of the Integrating Factor in the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations

Li Li

*(Tianjin University, Tianjin)*

## Abstract

In this article we indicated that all the problems, such as the classification of the singular point and the determination of the stability of limit cycle, can be solved by the application of the integral factor. Especially we gave a criterion for deciding the center and the focus, which is appropriate for the singular point of the first order as well as that of the higher order.