应用数学和力学,第 26 卷 第 2 期(2005 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0127_03

Davey_Stewartson 方程的同宿轨道*

张 隽[1,2], 郭柏灵[2], 沈守枫[3]

(1. 浙江工业大学 理学院 数学系, 杭州 310014;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京市 8009 信箱 28 分箱, 北京 100088;
3. 浙江大学 数学系, 杭州 310027)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究了 Davey_Stewartson 方程的同宿轨道解的问题, 利用 Hirota 方法, 通过给出的相关变换, 构造出 Davey_Stewartson 方程的同宿解, 给出了同宿解的解析表达式, 并讨论了 Davey_Stewartson 的同宿轨道•

关 键 词: Davey_Stewartson 方程; 同宿轨道; Hirota 方法
中图分类号: O175.4 文献标识码: A

在孤立子理论中, 对于完全可积系统的研究是非常重要的• 完全可积系统具有无穷个守恒律, Lax 对等性质• 但是近几年, 在经典的可积系如 NLS 方程, SG 方程中, 发现了混沌现象, 并找到了与混沌现象有关的同宿轨道解[1~6]•

著名的浅水波方程 Davey_Stewartson 方程是一个完全可积系统• 在 Davey_Stewartson 方程 (1) 中, u 表示水波的振幅, 是 $(t; x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$ 的复函数; v 表示水波的传播速度, 是 $(t; x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$ 的实函数•

$$\mathrm{i}u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \lambda |u|^2 u + \mu u v_x, \quad v_{xx} + \nu v_{yy} = (|u|^2)_x \tag{1}$$

对于一般的 Davey_Stewartson 方程(1), 已经进行了很多研究[7~9], 解决了很多问题• 在文献[7]中, 郭和王讨论了当 $\sigma > 0$ 和 $\nu > 0$ 时, 一般 Davey_Stewartson 方程(1)的初边值问题• 在文献[8] 中, 李通过 B¾cklund_Darboux 变换构造了 Davey_Stewartson Ⅱ方程的同宿轨道, 利用 Melinikov 函数讨论了加小扰动项的 Davey_Stewartson Ⅱ方程的同宿轨道的不变性•

在这篇文章中, 我们用双线性方法构造了 Davey_Stewartson 方程的同宿解, 给出了同宿解的解析表达式• 下面就介绍具体的构造过程•

对于一般的 Davey_Stewartson 方程(1), 通过相关变换

$$u = G/F, \quad v = \alpha(\ln F)_x + A,$$

这里 α 是个待定的常数, A 是个常数, F 是实函数, G 是复函数, 方程(1)可化为如下的双线性形式:

* 收稿日期: 2003_09_22; 修订日期: 2004_09_17
基金项目: 天元基金资助项目(A0324633)
作者简介: 张隽(1976—), 女, 浙江浦口人, 博士(联系人. Tel: + 86_571_85551211; E_mail: mathzj@zjut.edu.cn)•

$$(\sigma D_x^2 + \alpha\nu D_y^2 - C)F\cdot F - 2G\cdot G^* = 0, \tag{2a}$$

$$(\mathrm{i}D_t + \sigma D_x^2 + D_y^2 + B)G\cdot F = 0, \tag{2b}$$

$$\left(\sigma D_x^2 + D_y^2 + \frac{\mu\alpha}{2}D_x^2 + B\right)F\cdot F + \lambda G\cdot G^* = 0, \tag{2c}$$

这里 B、C 是积分常数, 双线性算子 $D_x^m D_t^k$ 的定义见文献[10]•

$$D_x^m D_t^k a\cdot b \equiv \left(\partial/\partial x - \partial/\partial x'\right)^m \left(\partial/\partial t - \partial/\partial t'\right)^k a(x,t)b(x',t')\,|_{x'=x,\,t'=t}\text{•}$$

假设双线性方程(2)的同宿解形式为:

$$G = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}[1 + (b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} + b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_3\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}], \tag{3}$$

$$F = 1 + b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}, \tag{4}$$

这里 a、b、p、q、Ω、γ、b_4、b_5 是实数, b_1、b_2、b_3 是复数, 把(3)和(4)代入(2),可以得到关于系数的决定方程组如下:

$$C = -2b^2, \tag{5}$$

$$B = a, \tag{6}$$

$$2B = C\lambda, \tag{7}$$

$$\alpha\gamma\lambda = -2, \tag{8}$$

$$\alpha\lambda = -2\sigma - \mu\alpha, \tag{9}$$

$$(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)b_4 = (\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)b_1, \tag{10}$$

$$(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)b_4 = (\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)b_2, \tag{11}$$

$$-\mathrm{i}b_3\Omega + \mathrm{i}b_5\Omega + 4b_1b_4(\sigma p^2 + q^2) = 0, \tag{12}$$

$$(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)b_1b_5 = (\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)b_3b_4, \tag{13}$$

$$-\sigma p^2b_4 - \alpha\nu q^2b_4 + 2b^2b_4 - b^2b_2^* - b^2b_1 = 0, \tag{14}$$

$$4\sigma p^2b_4^2 + 4\alpha\nu q^2b_4^2 - 2b^2b_4^2 - 2b^2b_5 + b^2b_3^* + b^2b_1b_1^* + b^2b_2b_2^* + b^2b_3 = 0, \tag{15}$$

$$\sigma p^2b_4b_5 + \alpha\nu q^2b_4b_5 - 2b^2b_4b_5 + b^2b_3^*b_1 + b^2b_3b_1^* = 0, \tag{16}$$

$$-2b^2|b_3|^2 = Cb_5^2\text{•} \tag{17}$$

求解上述方程组,得到了系数所满足的关系为:

$$B = -b^2\lambda,\ C = -2b^2,\ \alpha = 2\sigma/(-\lambda-\mu),\ \nu = (\lambda+\mu)/(\sigma\lambda), \tag{18}$$

$$b_1 = b_2 = [(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)/(\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)]b_4, \tag{19}$$

$$b_3 = [(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)/(\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)]^2b_5, \tag{20}$$

$$b_5 = [\Omega^2 + (\sigma p^2 + q^2)^2]^2\Omega^{-2}b_4^2, \tag{21}$$

$$(\sigma p^2 + \alpha\nu q^2)[\Omega^2 + (\sigma p^2 + q^2)^2] = 4b^2(\sigma p^2 + q^2)^2, \tag{22}$$

这样我们就得到了方程(1)的同宿解:

$$u = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b^2t}\frac{1 + (b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} + b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_3\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}{1 + b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}}, \tag{23}$$

$$v = A - \frac{2\mathrm{i}\sigma b_4p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma}}{(\lambda+\mu)[1 + b_4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy})\mathrm{e}^{\Omega t+\gamma} + b_5\mathrm{e}^{2\Omega t+2\gamma}]}, \tag{24}$$

这里 b、b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、p、q、Ω、ν、λ、μ、σ 满足条件(18) ~ (22),下面讨论 Davey_Stewartson 方程的同宿轨道:

1. 如果 $\Omega > 0$, 由(23)和(24)给出的同宿解构成的同宿轨道为: 当 $t\to+\infty$ 时, $u\to[(\mathrm{i}\Omega + \sigma p^2 + q^2)/(\mathrm{i}\Omega - \sigma p^2 - q^2)]^2b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b^2t}$, $v\to A$; 当 $t\to-\infty$ 时, $u\to b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b^2t}$, $v\to A$•

2. 如果 $\Omega < 0$, 由(23)和(24)给出的同宿解构成的同宿轨道为: 当 $t\to-\infty$ 时, $u\to[(\mathrm{i}\Omega$

$+\sigma p^2+q^2)/(\mathrm{i}\Omega-\sigma p^2-q^2)]^2 b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b^2 t}$, $v\to A$; 当 $t\to+\infty$ 时, $u\to b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b^2 t}$, $v\to A$•

在这篇文章里, Davey_Stewartson 方程的同宿轨道的解析表达式用双线性方法构造出来了, 后面要做的工作是利用这个表达式来讨论 Davey_Stewartson 方程加小扰动项变成近可积系统后, 近可积系统的同宿轨道是否存在, 如果存在, 与原来的可积系统比较是否具有不变性, 这对于研究近可积系统的性质是很有意义的•

[参 考 文 献]

[1] Ablowitz M J, Herbst B M, Constance Schober. On the numerical solution of the sine_Gordon equation—Ⅰ: Integrable discretizations and homoclinic manifolds[J]. Journal of Computational Physics, 1996, **126**(2): 299—314.

[2] Ablowitz M J, Clarkson P A. Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[3] Ablowitz M J, Herbst B M. On homoclinic structure and numerically induced chaos for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990, **50**(2): 339—351.

[4] Herbst B M, Ablowitz M J. Numerically induced chaos in the nonlinear Schrödinger equation[J]. Physical Review Letters, 1989, **62**(18): 2065—2068.

[5] LI Yan_guang. Bäcklund transformations and homoclinic structures for the integrable discretization of the NLS equation[J]. Physics Letters A, 1992, **163**(3): 181—187.

[6] HU Xing_biao, GUO Bo_ling, TAM Hon_wah. Homoclinic orbits for the coupled Schrödinger_Boussinesq equation and coupled Higgs equation[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2003, **72**(1): 189—190.

[7] GUO Bo_ling, WANG Bao_xiang. The Cauchy problem for Davey_Stewartson systems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1999, **52**(12): 1477—1490.

[8] Li Y. Bäcklund_Darboux transformations and Melnikov analysis for Davey_Stewartson Ⅱ equations[J]. Journal of Nonlinear Science, 2000, **10**(1): 103—131.

[9] Cipolatti R. On the instablity of ground states for a Davey_Stewartson systems[J]. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1993, **58**(1): 85—104.

[10] Hirota R. Direct methods in soliton theory[A]. In: Bullough R K, Caudrey P J Eds. Solitons[C]. Berlin: Springer, 1980, 157—176.

Homoclinic Orbits of the Davey_Stewartson Equations

ZHANG Jun[1,2], GUO Bo_ling[2], SHEN Shou_feng[3]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, P.R.China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P.R.China;

3. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P.R.China)

Abstract: The homoclinic solutions problem of the Davey_Stewartson(DS) Equations were studied. By using the Hirota's bilinear method, the homoclinic orbits of the Davey_Stewartson Equations were obtained through the dependent variable transformation. The homoclinic orbits of the Davey_Stewartson Equations were discussed.

Key words: Davey_Stewartson equation; homoclinic orbit; Hirota method