应用数学和力学，第2卷第2期（1981年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

粘弹性梁的动力响应*

孙家驹　　金开骅

（西安西北建筑工程学院）（铁道部建厂局设计处）

（何福照推荐，1980年7月7日收到）

摘　要

本文利用Voigt力学模型对粘弹性简支梁进行动力分析，得到了梁的自由振动与强迫振动的若干解析解的表达式．并与S．Timoshenko给出的弹性简支梁的相应的结论进行了比较，指出了弹性动力分析的局限性．最后给出了二个数值例子．

一、引　言

由于弹性理论中的应力—应变关系没有考虑时间效应，因此，处于高温、高压条件下工作的结构物的动力分析，生物力学中所研究的某些软组织（如关节腔等），以及高聚物与复合材料的静、动力分析等等领域的问题，就不能袭用经典的弹性体动力分析的理论，而必须考虑时间效应，采用粘弹性或粘塑性理论才能反映真实的情况．国外对这一理论的研究颇为活跃，国内则报导甚少[1]—[10]．

本文旨在：一对粘弹性简支梁的自由振动求解，得到了自振频率的一般表达式，S．Timoshenko关于弹性简支梁的自振频率的公式[11]是本文导出的公式的特例；二给出了强迫振动的挠度表达式，在与文献[11]中有关公式对比后，指出了[11]之公式的局限性．本文最后的二个数值例子所给出的结论是令人满意的．

二、固有振动的解

M．K．Newman [12]采用Voigt力学模型，推导了考虑转动惯量的粘弹性梁的运动方程式，为：

$$r^2a_1^2(1+\epsilon_1 D)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(1-r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D^2w=\frac{1}{\rho A}f(x,t) \tag{2.1}$$

式中，r 横截面的回转半径，ρ 材料的密度，A 梁的横截面的面积，I 惯性矩，$a_1^2=E/\rho$，$\epsilon_1=\eta/E$，η 粘性系数，E 弹性模量，$f(x,t)$ 干扰力，$D=\dfrac{d}{dt}$ 对时间 t 的一阶导数，微分

* 本文在陕西省力学学会1980年年会上宣读

算子.

在方程式（2.1）中，令 $f(x,t)=0$,即得到考虑转动惯量的粘弹性梁的自由振动方程式，为：

$$r^2a_1^2(1+\epsilon_1 D)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(1-r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D^2 w=0 \tag{2.2}$$

用 Fourier 方法解上式，令

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\cdot T_k(t)$$

将上式代入方程式（2.2），分离变量后得：

$$X_k^{\mathrm{IV}}(x)+r^2\lambda_k^2 X_k''(x)-\lambda_k^2 X_k(x)=0 \tag{2.3}$$

和

$$D^2T_k(t)+2\xi_k' DT_k(t)\zeta_k'^2T_k(t)=0 \tag{2.4}$$

式中

$$\zeta_k'^2=\lambda_k^2a_1^2r^2 \qquad 2\xi_k'=\epsilon_1\zeta_k'^2$$

方程式（2.4）的解是

$$T_k(t)=e^{-\xi_k' t}(c_1\cos\omega_k' t+c_2\sin\omega_k' t) \tag{2.5}$$

式中，$\omega_k'^2=\zeta_k'^2-\xi_k'^2=\zeta_k'^2\left(1-\frac{1}{4}\epsilon_1^2\zeta_k'^2\right)$，$c_1$、$c_2$ 由初始条件确定.

方程式（2.3）的解可用求特征根的方法得到，其特征方程为：

$$\alpha^4+\lambda_k^2r^2\alpha^2-\lambda_k^2=0 \tag{2.6}$$

所以，特征根为 $\alpha^2=\frac{1}{2}\left(-\lambda_k^2r^2\pm\sqrt{\lambda_k^4r^2+4\lambda_k^2}\right)$. 引进符号：

$$\alpha_{1,2}=m_k,\quad \alpha_{3,4}=\pm n_k i,\quad i=\sqrt{-1}$$

则我们可以写出：

$$m_k=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{\lambda_k^4r^4+4\lambda_k^2}-\lambda_k^2r^2} \qquad n_k=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{\lambda_k^4r^4+4\lambda_k^2}+\lambda_k^2r^2}$$

所以 $X_k(x)$ 的表达式为：

$$X_k(x)=d_1\mathrm{ch}m_kx+d_2\mathrm{sh}m_kx+d_3\cos n_kx+d_4\sin n_kx \tag{2.7}$$

式中 d_1、d_2、d_3、d_4 由边界条件确定.

由简支梁的边界条件，即 $x=0$，l 处，$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$，将 $w(x,t)$ 的表达式代入，很容易地得到所需要的频率方程：

$$\sin n_kl=0 \qquad n_k=\frac{k\pi}{l}(k=1,\ 2\cdots) \tag{2.8}$$

由初始条件 $w(x,0)=w_0$，$Dw(x,0)=\dot{w}_0$，可得到：

$$c_1=\frac{\int_0^l w_0\sin(n_k x)dx}{\int_0^l \sin^2(n_k x)dx}\qquad c_2=\frac{\int_0^l(\dot{w}_0+\xi_k' w_0)\sin(n_k x)dx}{\omega_k'\int_0^l \sin^2(n_k x)dx}$$

现在来考察频率 ω_k'. 将ζ_k'，ξ_k'的值代入 ω_k'的表达式，得：

$$\omega_k'=a_1 r\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[1+r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{1}{4}\epsilon_1^2 a_1^2 r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\cdot\left[1+r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]^{-1}\right\}^{-\frac{1}{2}}\tag{2.9}$$

上式是考虑转动惯量的粘弹性梁自由振动频率的一般表达式．式中第一项$a_1 r\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$是不考虑转动惯量的弹性梁的自由振动频率．前二项之积$\omega_e'=a_1 r\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[1+r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$是考虑转动惯量影响的弹性梁横向振动的频率表达式[11]．必须指出，S. Timoshenko[11]给出的频率表达式是近似的，即用级数展开之第一项，为 $a_1 r\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[1-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]$，这个近似表达式当$k>6$时，误差大于5％，当$k=10$时，误差高达20％（见表1）．

考虑转动惯量的粘弹性梁的自振频率 ω_k'与考虑转动惯量的弹性梁的自振频率ω_e'之比值为：

$$\frac{\omega_k'}{\omega_e'}=\left\{1-\frac{1}{4}\epsilon_1^2\frac{E\pi^2}{\rho}\cdot\left(\frac{k}{l}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot\left(\frac{kr}{l}\right)^2\cdot\frac{1}{\left[1+2\cdot\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{kr}{l}\right)^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\tag{2.10}$$

若在式（2.9）中除掉转动惯量的影响，立即可得不考虑转动惯量的粘弹性梁的自由振动频率表达式，令其为$\omega_k=\omega_e\left[1-\frac{1}{4}\epsilon_1^2 a_1^2 r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}$， 此处$\omega_e=a_1 r\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$．比较$\omega_k'$和$\omega_k$，可以得到下述结论：考虑转动惯量后，粘弹性梁的自振频率将随k的增大而愈益降低（见表2）．所以，计算高次振型时，转动惯量不能忽略不计．

三、强迫振动的解

A、正交性

由上节所述，$X_k(x)$满足方程式（2.3）．同样，函数$X_j(x)$亦应满足方程式

$$X_j^{IV}(x)+\lambda_j^2 r^2 X_j''(x)-\lambda_j^2 X_j(x)=0\tag{2.3*}$$

将方程式（2.3）乘以$X_j(x)$，式(2.3)*乘以$X_k(x)$，然后把所得的两个乘式相减，再沿梁全长积分，注意在积分式中代入铰支边界条件，即得所需要的正交性方程式[13]：

$$\int_0^l[X_k(x)X_j(x)+r^2X_k'(x)X_j'(x)]dx=0\tag{3.1}$$

上式的物理意义是明显的，积分号内所增加的一项$r^2X_k'(x)X_j'(x)$是由于考虑转动惯量引

起的.

B、挠度表达式

用Fourier方法解方程式（2.1）．令$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\cdot T_k(t)$代入式(2.1)并留意到应用正交性方程式（3.1），我们得到下列二式：

$$D^2T_k(t)+2\xi_k'DT_k(t)+\zeta_k'^2T_k(t)=\frac{1}{\rho A}\frac{\int_0^l f(x,t)X_k(x)dx}{\int_0^l\{[X_k(x)]^2+r^2[X_k'(x)]^2\}dx} \tag{3.2}$$

和
$$X_k''''(x)+\lambda_k^2r^2X_k''(x)-\lambda_k^2X_k(x)=0 \tag{2.3}$$

对于简支梁，有$X_k(x)=\sin(n_kx)$，于是下式可以积分得到，即：

$$\int_0^l\{[X_k(x)]^2+r^2[X_k'(x)]^2\}dx=(1+r^2n_k^2)\frac{l}{2}+(r^2n_k^2-1)\frac{\sin(2n_kl)}{4n_k} \tag{3.3}$$

为了讨论方程式（3.2），我们令$f(x,t)=f_1(x)\cdot f_2(t)$，这是允许的，将该式代入方程式（3.2），得：

$$\left.\begin{aligned}&D^2T_k(t)+2\xi_k'DT_k(t)+\zeta_k'^2T_k(t)=\mathscr{H}_kf_2(t)\\&\mathscr{H}_k=\frac{1}{\rho A}\frac{\int_0^l f_1(x)\sin(n_kx)dx}{\int_0^l\{[X_k(x)]^2+r^2[X_k'(x)]^2\}dx}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

方程式（3.4）的解是可以直接写出的，为：

$$T_k(t)=\frac{\mathscr{H}_k}{\omega_k'}\int_0^t f_2\ (t-\tau)e^{-\xi_k'\tau}\sin(\omega_k'\tau)d\tau \tag{3.5}$$

对于强迫振动，感兴趣的问题是计算挠度值．下面的分析是基于假定$|f_2(t)|\leqslant1$的情况进行的．为观看方便起见，暂时省略各符号中的脚码k与“$'$”，待演算至最后再补上各种原有的记号．

因为积分的模不超过被积函数的模的积分，故可以写出下式：

$$|T(t)|=\frac{\mathscr{H}}{\omega}\left|\int_0^t f_2(t-\tau)e^{-\xi\tau}\sin(\omega\tau)d\tau\right|\leqslant\frac{\mathscr{H}}{\omega}\int_0^t e^{-\xi\tau}\ |f_2(t-\tau)\sin(\omega\tau)|d\tau$$

又因为在任意瞬时t，有$|f_2(t)|\leqslant1$，故上式变成为：

$$|T(t)|\leqslant\frac{\mathscr{H}}{\omega}\int_0^t e^{-\xi\tau}\ |\sin\omega\tau|d\tau \tag{3.6}$$

上式是可以积分得到的，引进记号 $t=\frac{k\pi}{\omega}+t'$，$\frac{\pi}{\omega}>t'>0$ 及$\beta=e^{-\frac{\xi\pi}{\omega}}$，得：

$$|T(t)|\leqslant\frac{\mathscr{H}}{\omega^2+\xi^2}\left[\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{2\beta^{m+1}}{1-\beta}\right]-\frac{e^{-\xi t'}}{\omega^2+\xi^2}[\xi\sin(\omega t')+\omega\cos(\omega t')]\beta^m \tag{3.7}$$

在定常状态时，$t\to\infty$，$m\to\infty$；所以式（3.7）成为（加上各注脚）：

$$|T_k(t)| = \frac{\mathscr{H}_k}{\omega_k'^2 + \xi_k'^2} \operatorname{cth} \frac{\xi_k' \pi}{\omega_k'} \tag{3.8}$$

对于小阻尼的情况，有$\beta = e^{-\frac{\xi_k'\pi}{\omega_k'}} \approx 1 - \frac{\xi_k'\pi}{\omega_k'} = 1 - \pi\nu_k \left(\nu_k = \frac{\xi_k'}{\omega_k'}\right)$. 所以，当 $\pi\nu_k \ll 1$ 时，我们可以写出下式：

$$|T_k(t)| \leqslant \frac{\mathscr{H}_k}{\omega_k'^2 + \xi_k'^2}\left[\frac{1+\beta}{1-\beta}\right] \approx 0.64 \frac{\mathscr{H}_k}{\nu_k \zeta_k'^2} \tag{3.9}$$

于是，挠度表达式为：

$$|w(x,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 0.64 \frac{\mathscr{H}_k}{\nu_k \zeta_k'^2} \sin(n_k x) \leqslant 0.64 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathscr{H}_k}{\nu_k \zeta_k'^2}$$

分别代入 $\zeta_k'^2$ 和$\nu_k = \xi_k'/\omega_k'$的值，上式成为：

$$|w(x,t)| \leqslant \frac{1.28}{\epsilon_1 a_1^3 r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_k \left[1 + r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \left\{1 - \frac{1}{4}\epsilon_1^2 a_1^2 r^2 \cdot \frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4}{\left[1 + r^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^{-\frac{1}{6}} \tag{3.10}$$

C、二个特殊情况

若干扰力为沿梁长均匀分布的简谐干扰力，则方程式(3.2)中的$f(x,t) = h\sin(pt+\alpha)$，$p$是干扰力的频率，$\alpha$是相位差. 将谐干扰力代入方程式（3.2）注意到简支梁有$X_k(x) = \sin(n_k x)$，即得$T_k(t)$的定常解为：

$$T_k(t) = \frac{\mathscr{H}_k}{\zeta_k'^2} U_k \sin(pt + \alpha - \varepsilon_0) \tag{3.11}$$

式中 $U_k = \left\{\left[1 - \left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\xi_k'}{\zeta_k'}\right)^2\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$， $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{2\xi_k' p}{\zeta_k'^2 - p^2}$

所以挠度 $w(x,t)$ 可表达为：

$$w(x,t) = \frac{h}{\rho A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos n_k l]\sin(n_k x)}{n_k \zeta_k'^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\xi_k'}{\zeta_k'}\right)^2\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2}} \cdot \frac{\sin(pt + \alpha - \varepsilon_0)}{\left[r^2 n_k^2 + 1\right]\frac{l}{2} + \left[r^2 n_k^2 - 1\right]\frac{\sin(2n_k l)}{4n_k}} \tag{3.12}$$

若在梁上 $x=a$ 处作用有一集中的谐干扰力，$f(x,t) = h_1 \sin(pt+\alpha)$，则该力可表达为如下的形式：

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{在 } 0 \leqslant x < a \text{ 和 } a+\Delta < x \leqslant l \text{ 处} \\ h_1 \sin(pt+\alpha) & \text{在 } a \leqslant x \leqslant a+\Delta \text{ 处（}\Delta\text{ 为无穷小量）} \end{cases}$$

对于这样的载荷，挠度表达式为：

$$w(x,t)=\frac{h_1}{\rho A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[1-\cos(n_k a)]\sin(n_k x)}{n_k\zeta_k'^2\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{\xi_k'}{\zeta_k'}\right)^2\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{\sin(pt+\alpha-\varepsilon_0)}{\left[r^2n_k^2+1\right]\frac{l}{2}+\left[r^2n_k^2-1\right]\frac{\sin(2n_kl)}{4n_k}} \tag{3.13}$$

若集中谐干扰力作用在梁的跨中，则跨中挠度由下式给出，为：

$$w\left(\frac{l}{2},t\right)=\frac{h_1}{\rho A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\sin\left(\frac{n_kl}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(n_kl)\right]}{n_k\zeta_k'^2\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{\xi_k'}{\zeta_k'}\right)^2\left(\frac{p}{\zeta_k'}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{\sin(pt+\alpha-\varepsilon_0)}{\left[r^2n_k^2+1\right]\frac{l}{2}+\left[r^2n_k^2-1\right]\frac{\sin(2n_kl)}{4n_k}} \tag{3.14}$$

四、结论与数值分析

第一个数值例子是说明材料的粘弹性性质以及转动惯量对简支梁的自振频率降低的影响的．表 2 的最后一行给出了考虑转动惯量的粘弹性简支梁的自振频率与 S. Timoshenko [11] 给出的弹性简支梁的自振频率的比值．当 $k=10$ 时，粘弹性梁的自振频率降低 29.6%．由此可见，弹性体的振动分析不适用于粘弹性体．在进行动力分析时（包括高温、高压条件下工作的结构物的静力分析），必须考虑时间效应，否则，产生的误差是很大的，远远超出了工程的允许误差．

第二个数值例子给出了复合材料聚丙烯的梁在强迫振动时振幅衰减的具体数值．

例 1． 所选用的粘弹性材料是文献[14]提供的．表 2 中的 ω_k, ω_e, ω_k' 和 ω_e' 分别是粘弹性梁、弹性梁、考虑转动惯量的粘弹性梁和考虑转动惯量的弹性梁的自振频率．

表 2 明确指出，材料的粘弹性性质以及转动惯量对简支梁的自振频率的影响，高频时尤为显著．当 $k=10$，材料的粘弹性性质与转动惯量将分别使自振频率降低 6.56% 和 23.54%．

例 2． 用方程式（3.14）计算考虑转动惯量影响的粘弹性简支梁的强迫振动的振幅值．粘弹性材料选用 22℃ 时的聚丙烯，各有关参数如下：

弹性模量 $E=7.448\times10^8\ \mathrm{N/m^2}$	梁长 $l=0.1^{\mathrm{m}}$
粘性系数 $\eta=7.0756\times10^7\ \mathrm{N.S/m^2}$	横截面 $b\times h=0.01\times0.01\ ^{\mathrm{m\times m}}$
材料密度 $\rho=9\times10^2\ \mathrm{kg/m^3}$	干扰力的频率 $p=2\pi\times10^4\ \mathrm{R/S}$

干扰力 $f(x,t)=\sin(pt)$（即令 $h_1=1$, $\alpha=0$）

表 3 中的 w_{max} 是考虑转动惯量的粘弹性简支梁的跨中振幅值，W^*_{max} 是不考虑转动惯量的弹性梁的跨中振幅值[11]．由表 3 可见，对于粘弹性梁，不论谐干扰力是低频的还是高频的，级数的收敛性都很好，取级数展开式的第一项（$k=1$）即得到满意的近似值．弹性梁的情况则不然，S. Timoshenko [11] 给出的简支梁强迫振动的挠度表达式，仅适用于低频谐干扰力，不适用于高频谐干扰力．在高频时，则至少需取级数的前 7 项之和（$k=7$），才能获

得满意的结果.

当取级数前 9 项和时，w_{max}/w^*_{max} 之比值在低频与高频时分别为 0.52% 与 0.02%．这说明粘弹性性质对振幅值有明显的衰减作用，高频时此影响尤为明显．在本算例中，干扰力频率升高三个数量级，振幅衰减作用大一个数量级．

例 1 与例 2 的计算机程序分别为 VDB-1 与 VDB-2，在 DJS—21 型电子计算机上进行计算，结果详见表 2 与表 3．

本文承西安公路学院何福照教授的具体指导，西安交通大学蒋詠秋教授亲自向陕西省力学学会 1980 年年会推荐宣读，谨此致谢．

表 1

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_e[1-\frac{1}{2}(\frac{\gamma K\pi}{l})^2]$	107.24338	423.65939	933.30574	1609.6084	2415.3792	3302.7807	4213.3613	5078.0377	5817.0985	6340.1985
$\omega_e'=\omega_e(1+\frac{\gamma^2K^2\pi^2}{l^2})^{-\frac{1}{2}}$	107.24608	423.82955	935.18174	1619.7001	2451.8589	3405.2213	4454.7771	5578.3904	6757.4335	7976.8287
$(l)/(l')$	0.9999748	0.9995985	0.9979939	0.9937693	0.9851216	0.9699166	0.9458074	0.9103051	0.8608443	0.7948269

表 1 中 (l) 为 S.Timoshenko [11] 给出的近似表达式。
(l') 为精确的表达式。

表 2　　各种频率值及其比值

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_K	107.68553	430.70113	968.67779	1720.1790	2681.4602	3844.6996	5195.6338	6710.4513	8351.6555	10062.333
ω_e	107.68622	430.74486	969.17592	1722.9795	2692.1554	3876.7037	5276.6245	6891.9177	8722.5833	10768.622
ω_K'	107.24540	423.78790	954.73422	1617.3740	2443.7824	3383.5522	4406.1504	5482.6067	6586.4736	7694.1619
ω_e'	107.24608	423.82955	935.18174	1619.7001	2451.8589	3405.2213	4454.7771	5578.3904	6757.4335	7976.8287
ω_K/ω_e	0.999994	0.999899	0.999486	0.998375	0.996027	0.991745	0.984651	0.973670	0.957475	0.934413
ω_K'/ω_K	0.995913	0.983949	0.964959	0.940236	0.911363	0.880056	0.848049	0.817025	0.788643	0.764650
ω_K'/ω_e'	0.999994	0.999902	0.999522	0.998564	0.996706	0.993637	0.989084	0.982830	0.974701	0.964564
ω_K'/ω_e	0.995907	0.983849	0.964463	0.958708	0.907742	0.872791	0.835032	0.795513	0.755106	0.714498

表 3　　跨中 $(x=l/2)$ 最大振幅值（绝对值）　　单位：米

K		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P=2\pi\times10$	W_{max}	1.739863×10^{-7}	1.739863×10^{-7}	1.732703×10^{-7}	1.732703×10^{-7}	1.733260×10^{-7}	1.733260×10^{-7}	1.733157×10^{-7}	1.733157×10^{-7}	1.733186×10^{-7}
	W^*_{max}	3.309994×10^{-5}	3.309994×10^{-5}	3.350835×10^{-5}	3.350835×10^{-5}	3.356128×10^{-5}	3.356128×10^{-5}	3.357505×10^{-5}	3.357505×10^{-5}	3.358010×10^{-5}
$P=2\pi\times10^4$	W_{max}	1.755483×10^{-10}	1.755483×10^{-10}	1.748224×10^{-10}	1.748224×10^{-10}	1.748788×10^{-10}	1.748788×10^{-10}	1.748683×10^{-10}	1.748683×10^{-10}	1.748715×10^{-10}
	W^*_{max}	5.638551×10^{-8}	5.638551×10^{-8}	1.216737×10^{-7}	1.216737×10^{-7}	7.648276×10^{-7}	7.648276×10^{-7}	7.830707×10^{-7}	7.830707×10^{-7}	7.886687×10^{-7}

参考文献

1. Сорокин, Е. С., Кгеории внутреннечо трения при колебаниях упругих систем (1960).
2. Пановко, Я. Г., Внутреннее трение при колебаниях упругих систем(1960).
3. 朱伯芳，力学学报，第2期(1964).
4. Ferry, John D., Viscoelastic Properties of Polymers, (1961).
5. Lee, E. H., Viscoelasticity, in *Handbook of Engineering Mechanics* (Flügg, W., ed.)(1962).
6. Lou, Y. K. and Klosner, J. M., *J. Appl. Mech.* June (1971).
7. Yang, T. Y. and Lianis G., *J. Appl. Mech.* Sept. (1974).
8. Duffey, T. A., *J. Appl. Mech.* March (1976).
9. Bland, D. R., Linear Viscoelastic Theory(1960).
10. Flügg, W., Viscoelasticity(1975).
11. Timoshenko, S., Young, D. H. and Weaver, Jr., W.,《工程中的振动问题》(中译本)(1974).
12. Newman, M. K., *J. Appl. Mech.* Sept. (1959).
13. Meirovitch Leonard, *Elements of Vibration Analysis*, (1975).
14. Huang, C. C., *J. Appl. Mech.*, March, (1977).

Dynamic Response of Viscoelastic Beam

Sun Jia-ju

(Northwestern Institute of Architecture and Construction, Xian)

Jing Ke-hwa

(Design Department, Construction Bureau, Ministry of Railway)

Abstract

The dynamic analysis of viscoelastic simple supported beam has been made in accordance with the relationship between stress and strain expressed by the Voigt mechanical model as well as several analysis expressions have been obtained.

It is shown that the reduction of the ratio of natural frequencies progresses with the increase of exciting frequency for high models [Tab. 1]. In the final part of this paper, the forced vibration of supported beam is subjected to a random and harmonic excitation which has also been dealt with and the representations of the beam deflection have been derived.