应用数学和力学，第2卷第2期（1981年4月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 四川人民出版社出版

关于胡海昌解的完备性*

王 敏 中

（北京大学力学系，1980年3月1日收到）

摘 要

本文证明了对于 z 向凸的区域及另一条件下，各向同性的胡海昌解是完备的；反之，对 z 向不凸的区域，各向同性的胡海昌解是不完备的．

一、引 言

以位移表示的弹性力学方程为

$$\nabla^2\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{u}=(u,\ v,\ w)$ 为位移向量，ν 为 Poisson 比，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

M．J．Boussinesq 和 Б．Г．Галёкин 指出下述形式的位移是（1.1）的解，

$$\mathbf{u}=-\frac{1}{2(1-\nu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}+\nabla^2\boldsymbol{\varphi} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为双调和向量．

П．Ф．Папкович 和 H．Neuber 指出下述形式的位移也是（1.1）的解，

$$\mathbf{u}=-\frac{1}{4(1-\nu)}\operatorname{grad}(P_0+\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})+\mathbf{P} \tag{1.3}$$

其中 P_0，$\mathbf{P}=(P_1,\ P_2,\ P_3)$ 都是调和的，$\mathbf{r}=(x,\ y,\ z)$．

R．Mindlin[1] 利用向量的 Helmholz 分解，证明了（1.1）的任意解都可表成（1.2）或（1.3）的形式，即解（1.2）和（1.3）是完备的，或者说它们是（1.1）的通解．

对于横观各向同性体的弹性力学空间问题，代替方程组（1.1）的是，

$$\left.\begin{aligned}
&\left(B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+B_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u+B_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+B_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0\\
&B_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+B_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v+B_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=0\\
&B_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+B_{13}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\left(B_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+B_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐

胡海昌[2]得到方程（1.4）的解如下：

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ v&=-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ w&=\alpha\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

其中 F、φ 适合下列两方程式：

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F=0\\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{S_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

这儿

$$\frac{B_{11}}{B_{13}}=\alpha,\quad \frac{B_{33}}{B_{13}}=\beta,\quad \frac{B_{44}}{B_{13}}=\gamma,\quad \frac{B_{66}}{B_{44}}=S_0^2$$

$$\frac{B_{12}}{B_{13}}=\frac{B_{11}-B_{66}}{B_{13}}=\alpha-\gamma S_0^2$$

$$a+c=\frac{B_{44}^2+B_{11}B_{33}-B_{13}^2}{B_{11}B_{44}},\quad d=\frac{B_{33}}{B_{11}}$$

$$S_1=\sqrt{\frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}},\quad S_2=\sqrt{\frac{a+c-\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}}$$

不难算出，对于各向同性的弹性体有

$$B_{11}=B_{33}=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}B_{44},\quad B_{66}=B_{44}$$

$$B_{12}=B_{13}=\frac{1}{1-2\nu}B_{44}$$

$$\alpha=2(1-\nu),\ \beta=2(1-\nu),\ \gamma=1-2\nu,$$
$$S_0=S_1=S_2=1$$

这样解(1.5)、(1.6)成为

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ v&=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ w&=-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}+2(1-\nu)\nabla^2 F\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

其中 $\nabla^4 F=0$，$\nabla^2\varphi=0$．

Muki[3]在解弹性半空间问题时，也曾得到形式（1.7）的解．

本文的目的在于研究解（1.7）的完备性、主要结果如下，

定理 1 假设弹性区域 G 满足下述两个条件，

i) G 是 z 向凸的，即平行于 z 轴的线段，若其两端属于 G，则就全属于 G.

ii) 平面

$$S=\{(x,y,z_0)\,|\,(x,y)\in G_{xy}\}$$

包含在 G 中，这里 $G_{xy}=\{(x,y)\,|\,(x,y,z)\in G\}$.

则 G 上的任何弹性位移均可表成（1.7）的形式.

定理 2 假如区域 G 不是 z 向凸的，则解（1.7）不完备.

二、定 理 1 的 证 明

由于 Папкович—Nenber 解（1.3）的完备性已证明，因此只要证明，存在双调和函数 F 和调和函数 φ 使下式成立.

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(P_0+xP_1+yP_2+zP_3)+P_1\\
&-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(P_0+xP_1+yP_2+zP_3)+P_2\\
&-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}+2(1-\nu)\,\nabla^2F=-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(P_0+xP_1+yP_2+zP_3)+P_3
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里调和函数 $P_i(i=0、1、2、3)$ 认为是已知的.

我们先假定（2.1）成立 以 dx、dy、dz 分别乘（2.1）的三个式子，相加得：

$$dA=\left(P_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx+\left(P_2-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy+(P_3-2(1-\nu)\nabla^2F)dz\tag{2.2}$$

其中

$$A=\frac{1}{4(1-\nu)}(P_0+xP_1+yP_2+zP_3)-\frac{\partial F}{\partial z}\tag{2.3}$$

由（2.2）得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x}=P_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\
&\frac{\partial A}{\partial y}=P_2-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\
&\frac{\partial A}{\partial z}=P_3-2(1-\nu)\nabla^2F
\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

对（2.3）取∇^2，利用（2.4）式得，

$$\begin{aligned}
\nabla^2A&=\frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2F\\
&=\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla^2A
\end{aligned}$$

但 $\nu=\frac{1}{2}$，由上式得，

$$\nabla^2 A=0 \tag{2.5}$$

由（2.5）和（2.4）得，

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)=-\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right) \tag{2.6}$$

今定义[4]

$$\frac{\partial A}{\partial z}=-\int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}P_1(x, y, \xi)+\frac{\partial}{\partial y}P_2(x, y, \zeta)\right]d\zeta+A_0(x, y) \tag{2.7}$$

其中

$$A_0(x, y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_{xy}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \xi}+\frac{\partial P_2}{\partial \eta}\right)\right]_{z=z_0}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi d\eta$$

按对数位势有，

$$\nabla_1^2 A_0=\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\right]\Big|_{z=z_0} \tag{2.8}$$

不难看出（2.7）式的右端仍为调和函数，同理积分（2.7）式，可使 A 为调和函数．有了 A，利用（2.3）式定义 F，

$$F(x, y, z)=\int_{z_0}^{z}\left[\frac{1}{4(1-\nu)}(P_0+xP_1+yP_2+\zeta P_3)-A\right]d\zeta+F_0(x, y) \tag{2.9}$$

其中

$$\nabla^2 F_0(x, y)=-\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4(1-\nu)}(P_0+xP_1+yP_2+zP_3)-\left(1-\frac{1}{2(1-\nu)}\right)A\right]\right\}_{z=z_0}$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}P_3\Big|_{z=z_0}$$

不难看出

$$\nabla^2 F=\frac{1}{2(1-\nu)}\left(P_3-\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

由此

$$\nabla^4 F=0 \tag{2.10}$$

今定义，

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\left(-\frac{\partial A}{\partial y}+P_2\right)dx+\left(-P_1+\frac{\partial A}{\partial x}\right)dy+g(x,y,z)dz \tag{2.11}$$

其中

$$g(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial A_0}{\partial y}+\frac{\partial P_2}{\partial z}\Big|_{z=z_0}\right)dx+\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=z_0}\right)dy$$

$$+\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)dz \tag{2.12}$$

(2.12) 式中的第一个积分是在 G_{xy} 中的线积分，由于 (2.8) 式，它与路径无关 另外，从(2.7)、(2.12) 式不难验证，(2.11) 式中的线积分与路径无关，且所定义的函数是调和的.

这样，容易验证 (2.9) 所定义的双调和函数 F 和 (2.11) 式所定义的调和函数 φ，它们满足 (2.1) 式. 定理证毕.

三、定 理 2 的 证 明

引理 1 设 T_1 和 T_2 是有公共部分的区域，如果 $U_i(x, y)$ 是 $T_i(i=1,2)$ 上的两个调和函数，且在公共部分相等，则

$$U(x, y)=\begin{cases}U_1(x, y), & 当\ (x, y)\in T_1,\\ U_2(x, y), & 当\ (x, y)\in T_2,\end{cases}$$

是 $T=T_1\cup T_2$ 上的调和函数.

证明见[5].

引理 2 设 $F(x, y, z)$ 在连通区域 G 上调和，且

$$\frac{\partial F}{\partial z}=0, \tag{3.1}$$

则

$$F(x, y, z)=f(x, y), \quad (x, y)\in G_{xy} \tag{3.2}$$

其中

$$G_{xy}=\{(x, y)\mid (x, y, z)\in G\}.$$

证明 记 $Z(z)=\{z\mid (x, y, z)\in G\}$

$$T(z)=\{(x, y)\mid (x, y, z)\in G\}$$

由 (3.1) 式有，

$$\nabla_1^2F=\nabla^2F=0$$

其中 $\nabla_1^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，故 $F(x, y, z)$ 是 $T(z)$ 上的调和函数. 这时仅 z 仅看作一个参数.

为了证明 (3.2) 式，只需证明，对任意的 z'、$z''\in Z(z)$，有

$$F(x, y, z')=F(x, y, z''), \quad (x, y)\in T(z')\cup T(z''), \tag{3.3}$$

为此，设点 $D'(x', y', z')$, $D''(x'', y'', z'')\in G$，由 G 的连通性，故存在 G 中的闭曲线 L，连接点 D' 和 D''. 过 L 上每点作一小球 (全在 G 中)，按 Heine—Borel 定理，可选出有限个球覆盖闭曲线 L，设这些球的球心为

$$D'=D_1、D_2、\cdots, D_n=D'',$$

其中 $D_i=(x_i, y_i, z_i)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$,

过球心在 D_1 和 D_2 的两个球的交线，作母线平行于 z 轴的圆柱，截平面 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 得圆 O_1、O_2,

记

$$T'(z_i)=\{(x,\ y)\mid(x,\ y,\ z_i)\in O_i\}$$
$$(i=1,\ 2)$$

显然

$$T'(z_1)=T'(z_2)\subset T(z_1)\cap T(z_2)$$

当 $(x,\ y)\in T'(z_1)=T'(z_2)$ 时，由 (3.1) 式有

$$F(x,\ y,\ z_2)=F(x,\ y,\ z_1)+\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial F(x,\ y,\ \zeta)}{\partial\zeta}d\zeta=F(x,\ y,\ z_1),$$

按引理 1，可以认为

$$F(x,\ y,\ z_1)=F(x,\ y,\ z_2),\quad(x,\ y)\in T(z_1)\cup T(z_2),$$

如此下去，经有限步有

$$F(x,\ y,\ z_1)=F(x,\ y,\ z_n)\quad(x,\ y)\in\bigcup_{i=1}^{n}T(z_i).$$

当然 (3.3) 式亦成立．引理得证．

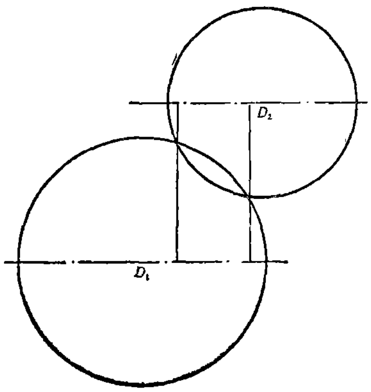

图 1

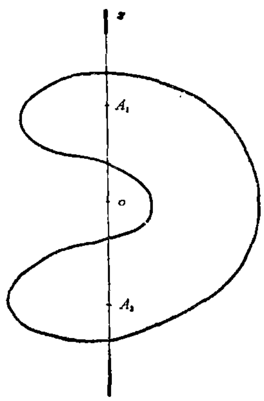

图 2

定理 2 的证明　今设区域 G 不是 z 向凸的，即存在一个线段 A_1A_2，端点 A_1 和 A_2 属于 G，但其间有某点 O 不属于 G．不妨取 O 为原点，OA_1 向为 z 轴的正向，那么点 $A_2\in G$ 就在负 z 轴上．

用反证法，如果任意弹性位移表成了 (1.7) 的形式，那么 (2.1) 式成立．重复二、的推导可知，对于 G 中的任意调和函数 P_1 和 P_2，在 G 中都存在按 (2.3) 式定义的调和函数 A，使 (2.6) 式成立．

按照 Tolotti 的方法[6]，特别取

$$P_1=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad P_2=0,$$

因为原点 $O(r=0)$ 不属于 G，故 P_1 和 P_2 在 G 内调和，于是存在调和函数 A，满足

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)=-\frac{x}{r^3},\quad(x,\ y,\ z)\in G,\tag{3.4}$$

今记 R 为全空间，$Z^-=\{(0,\ 0,\ z)|z\leqslant 0\}$，$R'=R-Z^-$，$G'=G-Z^-$，令

$$f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\ln(z+r)=-\frac{x}{(z+r)r},\quad (x,y,z)\in R' \tag{3.5}$$

显然有

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x}{r^3},\quad (x,y,z)\in R' \tag{3.6}$$

将 (3.6) 和 (3.4) 两式相减，得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial z}-f\right)=0,\quad (x,y,z)\in G' \tag{3.7}$$

由于$\frac{\partial A}{\partial z}-f$ 是调和函数，按引理 2 从 (3.7) 得，

$$\frac{\partial A}{\partial z}-f=f_0(x,y),\quad (x,y,z)\in G' \tag{3.8}$$

其中 $f_0(x,y)$ 是与 z 无关的调和函数，改写 (3.8)，

$$f=\frac{\partial A}{\partial z}-f_0(x,y) \tag{3.9}$$

由于 A 是 G 内的调和函数，而 f_0 与 z 无关，从 (3.9) 得 f 是 G 内的调和函数，但 f 在负 z 轴上无定义，故矛盾 定理得证.

作者得到了钱伟长教授、胡海昌先生的热情鼓励和帮助，谨表深切的谢意.

参 考 文 献

1. Mindin, R., Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42 (1936), 373—376.
2. 胡海昌，横观各向同性体的弹性力学的空间问题，物理学报，9 卷 3 期 (1953)，130—147.
3. Muki, Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semiinfinite solid and a thick plane, *Progress in Solid Mechanics*, I (ed. by Sneeddon and Hill) (1960).
4. Eubanks, R. A., and Sternberg, E., On the completeness of the Papkovitch stress function. *J. Rational Mech. Anal.*, 5 (1956), 735—746.
5. Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, Berling, Springer, (1929), 260.
6. Слободянский М.Г., Об общих и поиных Фориах Решений Уравнения Упругости ПММ, T. XXIII, Вып 3 (1959), 468—482.

On the Completeness of Hu Hai-chang's Solution

Wang Min-zhong

(Beijing University, Beijing)

Abstract

In this papar, the completeness of Hu Hai-chang's solution for isotropic is proved in the case of convex regions in z-direction under a supplementary condition. On the other hand, for those non-convex regions in z-directions, Hu Hai-Chang's solution for the isotropic is proved to be incomplete.