讨 论 栏

关于“轴对称圆环壳的一般解”一文的讨论(注)

黄 黔(清华大学)：

关于1980年第3期《轴对称圆环壳的一般解》一文中齐次解的衰减指数 λ，想指出一点：λ 有无穷多个根，其一般形式是

$$\lambda=\pm[(\beta+i\gamma)+mi],\quad m=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$$

在文中(2.3)式里 C_n 有非零解的充分必要条件是其无穷阶的系数行列式 $\Delta(\lambda)=0$. 由这个无穷阶行列式，很容易看出并证明 $\Delta(\lambda)$ 以 i 为周期. 回到齐次解 $V=e^{\lambda\varphi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{in\varphi}$，当指数用另一个根 $\lambda^*=\lambda+mi$，则 $V=e^{(\lambda+mi)\varphi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{in\varphi}=e^{\lambda\varphi}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}C_ke^{ik\varphi}$，其中 $k=m+n$. 可见 λ 的无穷多个根对应的齐次解完全相同. 只须求出其中一个根. 文中所求的 λ 值正是最小根. 上述结论与细环壳是一致的（参看清华大学学报1979年第1期《轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解》）. 在细环壳中

$$\lambda=\pm(\beta+mi),\quad m=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$$

考虑到上述观点后，计算指数 λ 并不困难.

陈山林(清华大学)：

1. 文[1]轴对称圆环壳方程的齐次解为

$$V=e^{\lambda\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\varphi}\tag{1}$$

假设特征指数 λ 已经确定，则 C_n 可按文[1]的(2.3a)(2.3b)式计算. 不失一般性，我们仅考查 $n>0$ 的情形，并取 $C_0=-1$. 取系数 C_n 的前 N 项，则(2.3a)式可改写做

$$\begin{bmatrix} b_1 & d_1 & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & d_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & d_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a_{N-1} & b_{N-1} & d_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_{N-1} \\ C_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -d_NC_{N+1} \end{bmatrix}\tag{2}$$

注）本文见本刊第一卷第三期，287—300页（1980）

式中，

$$\left.\begin{aligned}&a_n=\mu-\frac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]\\&b_n=(\lambda+in)^2\\&d_n=-\mu+\frac{\alpha i}{2}[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]\\&\qquad\qquad\qquad\qquad(n=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

实际计算中，对于足够大的 N，可取 (2) 式中，$C_{N+1}=0$ 我们将讨论忽略 $-d_NC_{N+1}$ 项对 C_n 计算带来的误差.

2　采用众所周知的追赶法计算 C_n 略去 C_{N+1} 项. 按追赶法程序[2]，如记

$$\beta_1=b_1,\ \beta_{n+1}=b_{n+1}-\frac{a_{n+1}d_n}{\beta_n}\quad(n=1,2,\cdots,N-1)\tag{4}$$

则有

$$z_1=a_1/\beta_1,\ z_n=-a_n/\beta_n\quad(n=2,3,\cdots,N)\tag{5}$$

及

$$C_N=z_N,\ C_n=z_n-\frac{d_nC_{n+1}}{\beta_n}\quad(n=N-1,\cdots2,1)\tag{6}$$

如果保留舍去项，且记 z'_n、C'_n 为对应的准确值，则可得

$$\begin{aligned}&z'_n=z_n\qquad(n=1,2,\cdots,N-1)\\&z'_N=-\frac{d_NC'_{N+1}+a_N}{\beta_N}=z_N\left(1+\frac{d_N}{a_N}C'_{N+1}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

及

$$\begin{aligned}&C'_N=z'_N\\&C'_n=z'_n-\frac{d_nC'_{n+1}}{\beta_n}=z_n-\frac{d_nC'_{n+1}}{\beta_n}\quad(n=N-1,\cdots,2,1)\end{aligned}\tag{8}$$

3　设 C'_n 与 C_n 的相对误差为 δ_n，即

$$\delta_n=\left|\frac{C'_n-C_n}{C_n}\right|\quad(n=1,2,\cdots,N)\tag{9}$$

由 (5)—(8) 式. 可以算得

$$\delta_N=\left|\frac{C'_N-C_N}{C_N}\right|=\left|\frac{d_N}{a_N}\cdot C'_{N+1}\right|\tag{10}$$

当 N 足够大时，可取 $\left|\frac{d_N}{a_N}\right|\approx1$，同时，由于级数 (1) 的一致收敛性[1]，可以认为 $|C'_{N+1}|\lesssim|C_N|$，于是 (10) 式为

$$\delta_N\approx|C_N|\tag{11}$$

一般情况，可算得

$$\delta_n=\left|\frac{d_n}{\beta_n}\ \frac{C'_{n+1}-C_{n+1}}{C_n}\right|=\left|\frac{d_n}{\beta_n}\cdot\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\delta_{n+1}$$

$$=\left|\frac{d_n}{\beta_n}\cdot\frac{C_{n+1}}{z_n-\frac{d_n C_{n+1}}{\beta_n}}\right|\delta_{n+1}$$

$$=\left|\frac{1}{\frac{\beta_n z_n}{d_n C_{n+1}}-1}\right|\delta_{n+1}$$

$$=\left|\frac{1}{1+\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{1}{C_{n+1}}}\right|\delta_{n+1}\tag{12}$$

我们可以适当选择 λ，使得 $|C_n|\leqslant|C_0|=1$. 于是，当 n 较大时，可以认为 $|C_{n+1}|\ll 1$，$\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\approx 1$，因此 (12) 式为

$$\delta_n\approx|C_{n+1}|\delta_{n+1}\tag{13}$$

上式对于较大的 n 是较准确的，当 n 较小时，也可沿用作为近似估计式，于是 (13) 式中 $n=1,2\cdots N-1$. 最后，有

$$\begin{aligned}&\delta_N\approx|C_N|\\&\delta_n\approx|C_{n+1}|\delta_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots N-1)\end{aligned}\tag{14}$$

当 $n<0$ 时，可类似得到

$$\begin{aligned}&\delta_{-N}\approx|C_{-N}|\\&\delta_n\approx|C_{n-1}|\delta_{n-1}\quad(n=-1,-2,\cdots,-N+1)\end{aligned}\tag{15}$$

注意到 $|C_n|\leqslant 1$，显然有 $\delta_n\leqslant\delta_{n+1}$ $(n>0)$ 及 $\delta_n\leqslant\delta_{n-1}$ $(n<0)$. 这对于保证 C_n 的计算精度无疑是有利的，因为当 $\delta_{\pm N}$ 随着 N 的增加而减小时，δ_n 的减小对所有的 n 都是一致的.

参 考 文 献

1. 钱伟长，郑思樑，轴对称圆环壳的一般解，应用数学和力学，第 1 卷，第 3 期 (1980).
2. 中国科学院沈阳计算所等，电子计算机常用算法，科学出版社，北京(1976)，141—143页.

钱伟长(清华大学)：

黄黔同志所述各点和作者在细环壳理论中所述基本相同，但在计算 λ 的虚数部分时，必须予以十分注意，这一点是重要的.

陈山林同志所述的收敛证明和误差估计在计算各级系数时是有用的.