应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

轴对称弹性体的有限元分析

钱 伟 长 （北京清华大学）

（1979年12月收到）

摘　　要

轴对称弹性力学问题的有限元分析长期以来都是采用三角圆环有限元和线性形状函数。由于积分困难，常用近似积分求得刚度矩阵，这种近似积分对于靠近旋转对称轴的元素，误差很大，所以，长期以来，被认为不满意的办法。也有用精确积分计算刚度矩阵的，但本文指出，这种积分只适用于有中孔的轴对称体。对于实心的轴对称体而言，这种刚度矩阵都不收敛，计算是无效的。

本文提出了一种新的形状函数，当径向座标r接近于零时，这种形状函数的径向位移u自然地接近于零。如果用这种新的形状函数，则由此计算求得的刚度矩阵，不论三角圆环有限元的位置是否靠近轴线，都是存在的。这种有限元，就能用于计算实心的轴对称体的问题。

一、线性三角圆环有限元

对于轴对称弹性力学问题而言，不等于零的位移只有轴向位移$w(r,z)$和径向位移$u(r,z)$．这里的r为径向座标，z为轴向座标，应变位移关系为

$$\{e\}=\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}\doteq\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

过去业已有威尔逊（1968）[1]，克劳付及赖希德（1965）[2]，维脱固（1968）[3]，费尔·德（1969）[4]，齐基威茨（1967，1971）[5],[6]，德赛及阿贝尔（1972）[7]，华东水利学院（1974）[8]，复旦大学数学系（1976）[9]，许勃纳（1975）[10]等用近似积分法研究了线性三角圆环有限元的刚度积分问题。

设三角形（图1）三个角点的位移分别为(u_1,w_1)，(u_2,w_2)，(u_3,w_3)，则线性的形状函数可以写成

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

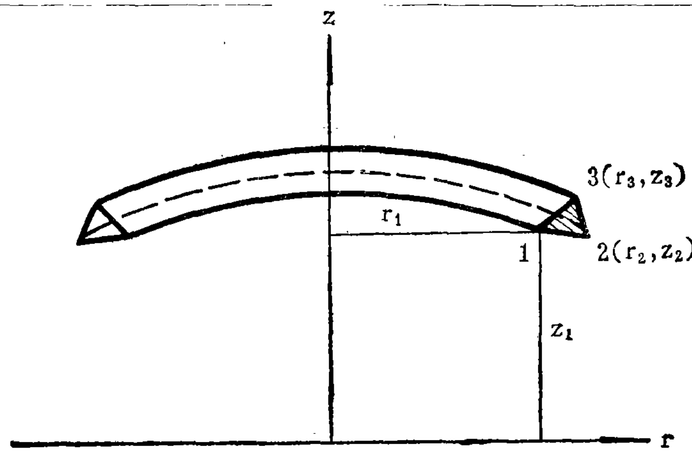

图 1 三角圆环形有限元

其中 L_i 为三角形有限元的自然座标。它可以用 (u_i, w_i) 写成

$$L_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i r + c_i z) \tag{1.3}$$

其中

$$a_i = r_j z_k - r_k z_j \tag{1.4a}$$

$$b_i = z_j - z_k \tag{1.4b}$$

$$c_i = r_k - r_j \tag{1.4c}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.4d}$$

$P(r_i, z_i)$ 为角点 i 的座标，(i, j, k) 为以 1,2,3 为次序的循环标号，于是应变矩阵 $\{e\}$ 和位移矩阵 $\{u\}$ 的关系式为

$$\{e\} = [B]\{u\} \tag{1.5}$$

其中

$$\{e\}^T = \lfloor e_r, e_\theta, e_z, \gamma_{rz} \rfloor \quad \{u\}^T = \lfloor u_1, w_1, u_2, w_2, u_3, w_3 \rfloor \tag{1.6a,b}$$

而且

$$[B] = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial r} & 0 \\ \frac{L_1}{r} & 0 & \frac{L_2}{r} & 0 & \frac{L_3}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial z} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} & \frac{\partial L_1}{\partial r} & \frac{\partial L_2}{\partial z} & \frac{\partial L_2}{\partial r} & \frac{\partial L_3}{\partial z} & \frac{\partial L_3}{\partial r} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ \frac{2L_1\Delta}{r} & 0 & \frac{2L_2\Delta}{r} & 0 & \frac{2L_3\Delta}{r} & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \tag{1.6c}$$

称弹性常数矩阵为 $[E]$

$$[E]=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}=E_0\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

其中

$$E_0=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.8}$$

则刚度矩阵为

$$[K]=\iint\limits_{\Delta}[B]^T[E][B]2\pi rdzdr \tag{1.9}$$

如果我们称 $[B]$ 的子矩阵为 $[B]_{(i)}$

$$[B]_{(i)}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i & 0\\ \frac{2L_i\Delta}{r} & 0\\ 0 & c_i\\ c_i & b_i\end{bmatrix} \tag{1.10}$$

则根据郭仲衡[11],[12]，$[K]$ 明显地可以分为九个子矩阵

$$[K]=\begin{bmatrix}[K]_{(11)} & [K]_{(12)} & [K]_{(13)}\\ [K]_{(21)} & [K]_{(22)} & [K]_{(23)}\\ [K]_{(31)} & [K]_{(32)} & [K]_{(33)}\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

其中

$$[K]_{(ij)}=\iint\limits_{\Delta}[B]^T_{(i)}[E][B]_{(j)}2\pi rdrdz$$

$$=\frac{E_0\pi}{2\Delta^2}\iint\limits_{\Delta}\begin{bmatrix}b_i & \frac{2L_i\Delta}{r} & 0 & c_i\\ 0 & 0 & c_i & b_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_j & 0\\ \frac{2L_j\Delta}{r} & 0\\ 0 & c_j\\ c_j & b_j\end{bmatrix}rdrdz$$

$$=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}_{(ij)} \tag{1.12}$$

其中各元素为

$$\left.\begin{aligned}
H_{11}(i,j)&=\frac{E_0\pi}{2\Delta}\Big\{(a_ib_j+a_jb_i)+\Big[2b_ib_j+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_ic_j\Big]\bar{r}+(b_ic_j+b_jc_i)\bar{z}\\
&\qquad+2(1-\nu)[a_ia_jI_1+(a_ic_j+c_jc_i)I_2+c_ic_jI_3]\Big\}\\
H_{12}(i,j)&=\frac{E_0\pi}{2\Delta}\Big\{\nu a_ic_j+\Big[2\nu b_ic_j+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_ib_j\Big]\bar{r}+\nu c_ic_j\bar{z}\Big\}\\
H_{21}(i,j)&=\frac{E_0\pi}{2\Delta}\Big\{\nu a_jc_i+\Big[2\nu c_ib_j+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_jb_i\Big]\bar{r}+\nu c_ic_j\bar{z}\Big\}\\
H_{22}(i,j)&=\frac{E_0\pi}{2\Delta}\Big\{\frac{1}{2}(1-2\nu)b_ib_j+(1-\nu)c_ic_j\Big\}\bar{r}
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

I_1, I_2, I_3 为下列积分

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta I_1 &= \iint_{\Delta} \frac{1}{r}\, dr dz \\ 2\Delta I_2 &= \iint_{\Delta} \frac{z}{r}\, dr dz \\ 2\Delta I_3 &= \iint_{\Delta} \frac{z^2}{r}\, dr dz \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

$\bar{r}, \bar{z}$ 为三角形重心的座标

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{\Delta} \iint_{\Delta} r dr dz = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) \\ \bar{z} &= \frac{1}{\Delta} \iint_{\Delta} z dr dz = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

在大多数作者中，由于(1.14)式中的积分比较复杂，从而采取较简单的近似办法，用三角形重心 $\bar{r}, \bar{z}$ 代替(1.14)式积分中被积函数中的 r, z。于是近似地得

$$I_1 \cong \frac{1}{2\bar{r}}, \quad I_2 \cong \frac{1}{2}\frac{\bar{z}}{\bar{r}}, \quad I_3 \cong \frac{1}{2}\frac{\bar{z}^2}{\bar{r}} \tag{1.16}$$

这样做当然绕过了与准确积分有关的全部困难。但是由于邻近 z 轴的单元中，r 的相对变化很大，特别是当这些单元较多时，精确度损失很大。

齐基威茨在早期的著作(1967)[5]中，曾对(1.14)式进行了精确积分，但在(1971)年的著作[6]中又删去了。而且认为“看来很奇怪，实际上简单近似有时优于正确积分”。他认为正确公式中包含的对数项是引起较大误差的根源。

其实这三个积分都可以在三角形有限元内先对 z 积分，然后对 r 积分求得，最一般的三角形位置是：(1) 三角形的三个角点都不在 z 轴上。(2) 任何边都不和 z 轴平行，即如图2的位置，这三条边和 z 轴的交点 $z=A_{12}, A_{23}, A_{31}$ 它们为

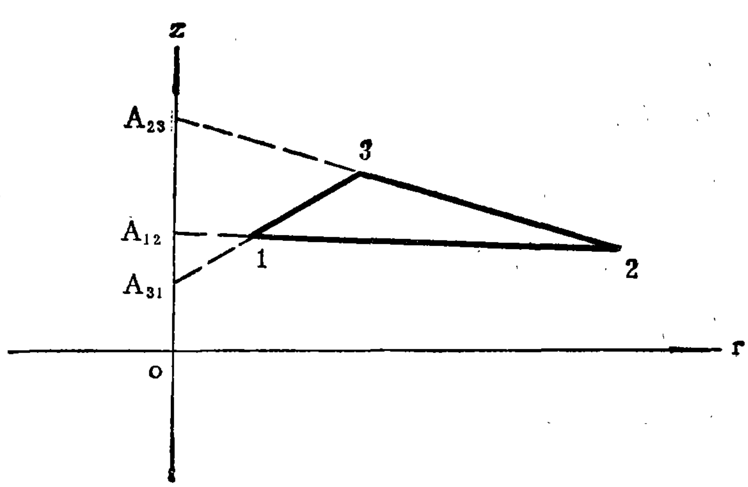

图2　(r, z)三角形的一般位置

$$\left.\begin{aligned}A_{31}&=\frac{z_1r_3-z_3r_1}{r_3-r_1}=-\frac{a_2}{c_2}\\A_{12}&=\frac{z_2r_1-z_1r_2}{r_1-r_2}=-\frac{a_3}{c_3}\\A_{23}&=\frac{z_3r_2-z_2r_3}{r_2-r_3}=-\frac{a_1}{c_1}\end{aligned}\right\}\tag{1.17}$$

如果称这三条边的斜度为

$$\left.\begin{aligned}m_{31}&=\frac{z_3-z_1}{r_3-r_1}=-\frac{b_2}{c_2}\\m_{12}&=\frac{z_1-z_2}{r_1-r_2}=-\frac{b_3}{c_3}\\m_{23}&=\frac{z_2-z_3}{r_2-r_3}=-\frac{b_1}{c_1}\end{aligned}\right\}\tag{1.18}$$

则这三条边的方程可以写成

$$\left.\begin{aligned}&(1-2\text{ 边的方程式})\quad z=A_{12}+m_{12}r\\&(2-3\text{ 边的方程式})\quad z=A_{23}+m_{23}r\\&(3-1\text{ 边的方程式})\quad z=A_{31}+m_{31}r\end{aligned}\right\}\tag{1.19}$$

于是 I_1, I_2, I_3 就能积分。例如

$$2\Delta I_1=\iint_{\Delta}\frac{1}{r}\,dz\,dr=\int_{r_1}^{r_3}(A_{31}+m_{31}r-A_{12}-m_{12}r)\frac{1}{r}\,dr$$

$$+\int_{r_3}^{r_2}(A_{23}+m_{23}r-A_{12}-m_{12}r)\frac{1}{r}\,dr=A_{31}\ln\frac{r_3}{r_1}+A_{12}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$+A_{23}\ln\frac{r_2}{r_3}+m_{31}(r_3-r_1)+m_{12}(r_1-r_2)+m_{23}(r_2-r_1)\tag{1.20}$$

在 $r_1\neq r_2\neq r_3$ 的条件下，很易证明

$$m_{31}(r_3-r_1)+m_{12}(r_1-r_2)+m_{23}(r_2-r_3)=0\tag{1.21}$$

于是，齐基威茨[6]就根据（1.21）式，把（1.20）式简化为

$$2\Delta I_1=A_{31}\ln\frac{r_3}{r_1}+A_{12}\ln\frac{r_1}{r_2}+A_{23}\ln\frac{r_2}{r_3}\tag{1.22}$$

郭仲衡（1978）[11]指出，它们虽然恒等于零，但是保留它(像（1.20）式)并不影响计算结果，反而在三角形有一边平行于 z 轴时，可以大大简化程序。

用相同的方法，我们可以计算 I_2, I_3。其结果为

$$2\Delta I_1=A_{31}\ln\frac{r_3}{r_1}+A_{12}\ln\frac{r_1}{r_2}+A_{23}\ln\frac{r_2}{r_3}+m_{31}(r_3-r_1)+m_{12}(r_1-r_2)+m_{23}(r_2-r_3)\tag{1.23a}$$

$$2\Delta I_2=\frac{1}{2}\left[A_{31}^2\ln\frac{r_3}{r_1}+A_{12}^2\ln\frac{r_1}{r_2}+A_{23}^2\ln\frac{r_2}{r_3}\right]$$

$$+A_{31}(z_3-z_1)+A_{23}(z_2-z_3)+A_{12}(z_1-z_2)$$

$$+\frac{1}{4}[m_{31}^2(r_3^2-r_1^2)+m_{12}^2(r_1^2-r_2^2)+m_{23}^2(r_2^2-r_3^2)] \tag{1.23b}$$

$$2\Delta I_3=\frac{1}{3}\left[A_{31}^3\ln\frac{r_3}{r_1}+A_{12}^3\ln\frac{r_1}{r_3}+A_{23}^3\ln\frac{r_2}{r_3}\right]$$

$$+[A_{31}^2(z_3-z_1)+A_{12}^2(z_1-z_2)+A_{23}^2(z_2-z_3)]$$

$$+\frac{1}{2}[A_{31}m_{31}^2(r_3^2-r_1^2)+A_{12}m_{12}^2(r_1^2-r_2^2)+A_{23}m_{23}^2(r_2^2-r_3^2)]$$

$$+\frac{1}{9}[m_{31}^3(r_3^3-r_1^3)+m_{12}^3(r_1^3-r_2^3)+m_{23}^2(r_2^3-r_3^3)] \tag{1.23c}$$

如果有一边平行于 z 轴，设它为1—3边，则

$$r_3=r_1 \tag{1.24}$$

通过（图 3 ）积分，我们有

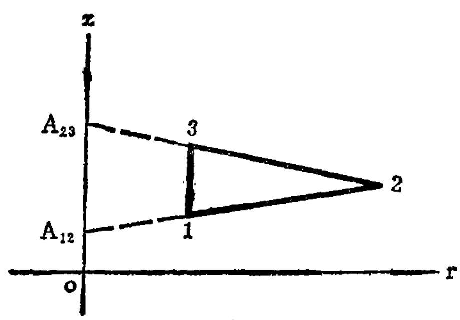

图 3　1—3 边平行于z轴的 (r, z) 三角形元素

$$\left.\begin{aligned}
2\Delta I_1&=\int_{r_3}^{r_2}\frac{1}{r}[A_{23}+m_{23}r-A_{12}-m_{12}r]dr\\
2\Delta I_2&=\int_{r_3}^{r_2}\frac{1}{2r}[(A_{23}+m_{23}r)^2-(A_{12}+m_{12}r)^2]dr\\
2\Delta I_3&=\int_{r_3}^{r_2}\frac{1}{3r}[(A_{23}+m_{23}r)^3-(A_{12}+m_{12}r)^3]dr
\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

积分后，得

$$\lim_{r_1\to r_3} 2\Delta I_1=(A_{23}-A_{12})\ln\frac{r_2}{r_3}+m_{23}(r_2-r_3)+m_{12}(r_3-r_2) \tag{1.26a}$$

$$\lim_{r_1\to r_3} 2\Delta I_2=\frac{1}{2}(A_{23}^2-A_{12}^2)\ln\frac{r_2}{r_3}+(A_{23}m_{23}-A_{12}m_{12})(r_2-r_3)$$

$$+\frac{1}{4}(m_{23}^2-m_{12}^2)(r_2^2-r_3^2) \tag{1.26b}$$

$$\lim_{r_1\to r_3} 2\Delta I_3=\frac{1}{3}(A_{23}^3-A_{12}^3)\ln\frac{r_2}{r_3}+(A_{23}^2m_{23}-A_{12}^2m_{12})(r_2-r_3)$$

$$+\frac{1}{2}(A_{23}m_{23}^2-A_{12}m_{12}^2)(r_2^2-r_3^2)+\frac{1}{9}(m_{23}^3-m_{12}^3)(r_2^3-r_3^3)$$

(1.26c)

从(1.25)式中可以看到，式中没有 A_{31}和m_{31}，所以(1.26)中都不出现 A_{31} 和 m_{31}。这就是说，如果在一般表达式中(即(1.23)式)，把 A_{31}，m_{31} 置于零，即

$$A_{31}=0,\quad m_{31}=0 \tag{1.27}$$

然后把 r_1 写成 r_3，即可得(1.26a,b,c)式，在计算机上直接工作时，(1.27)式的程序是易于执行的。同时，还应指出，(1.26a)式中的最后两项 $m_{23}(r_2-r_3)+m_{12}(r_3-r_2)$ 或 $(m_{23}-m_{12})(r_2-r_3)$，也可以从(1.23a)中的后三项中把 $m_{31}=0$ 代入直接求。齐基威茨在一般表达式中，消去了(1.23a)中的后三项，这在三角形的边都不和 z 轴平行时，是完全正确的。但当三角形有一边（如1—3边）平行于 z 轴时，取 $r_1\to r_3$ 极限，如果在一般表达式中没有后三项，就不可能得到(1.26a)式。这就是齐基威茨得不到正确结论的一个原因。

当然，我们必须指出，当用(1.2)式作为轴对称体三角圆环有限元的形状函数时，只有空心的轴对称体才是可行的。如果是实心的轴对称体，则在划分有限元时，不可避免地一定会有一些有限元的某一边（如1—3边）完全处于 z 轴上（如图4），于是积分 I_1,I_2,I_3 一定都是发散的。例如

$$2\Delta I_1=\int_0^{r_2}\frac{1}{r}[A_{23}+m_{23}r-A_{12}-m_{12}r]dr\to\infty \tag{1.28}$$

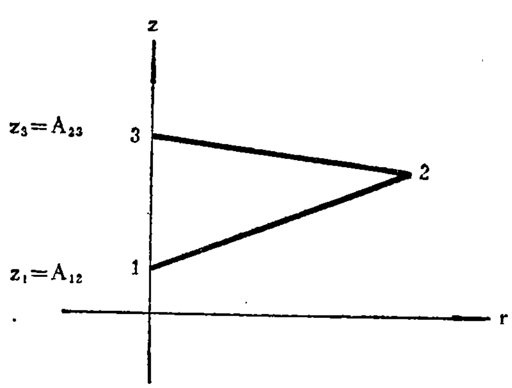

图4 3—1边在 z 轴上的 (r,z) 三角形元素

所以，在实心的轴对称弹性体内，就无法使用(1.2)式这样的形状函数。其实这一点可以从 e_θ 的表达式来理解

$$e_\theta=\frac{u}{r}=\frac{L_1u_1+L_2u_2+L_3u_3}{r} \tag{1.29}$$

当1和3点在 z 轴上时，u_1，u_3 必须恒等于零。不然 e_θ 在1，3点就会是无穷大，所以，对于实心轴对称体有限元而言，取(1.2)式这样的形状函数是从头起不合理的，这是齐基威茨得不到正确结论的主要原因。

我们建议应该重新考虑下列新的有限元，来处理实心轴对称体的弹性力学问题。

二、实心轴对称体的三角环有限元

我们建议取下列新的三角环有限元的形状函数

$$\left.\begin{aligned}u&=rL_1e_1+rL_2e_2+rL_3e_3\\ w&=L_1w_1+L_2w_2+L_3w_3\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其其e_1，e_2，e_3为角点1，2，3上的e_θ值，这种有限元的特点是，当$r=0$时，亦即当在z轴

上时，u一定等于零。这和实际情况是一致的。

(2.1)式也可以写成矩阵形式。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} rL_1 & 0 & rL_2 & 0 & rL_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_1 \\ w_1 \\ e_2 \\ w_2 \\ e_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

于是，我们有

$$\{e\}=[B^*]\{u^*\} \tag{2.3}$$

其中

$$\{e\}^T=\lfloor e_r,\ e_\theta,\ e_z,\ \gamma_{rz}\rfloor \tag{2.4a}$$

$$\{u^*\}^T=\lfloor e_1,\ w_1,\ e_2,\ w_2,\ e_3,\ w_3\rfloor \tag{2.4b}$$

$$[B^*]=\begin{bmatrix} L_1+r\dfrac{\partial L_1}{\partial r} & 0 & L_2+r\dfrac{\partial L_2}{\partial r} & 0 & L_3+r\dfrac{\partial L_3}{\partial r} & 0 \\ L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial L_1}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial L_2}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial L_3}{\partial z} \\ r\dfrac{\partial L_1}{\partial z} & \dfrac{\partial L_1}{\partial r} & r\dfrac{\partial L_2}{\partial z} & \dfrac{\partial L_2}{\partial r} & r\dfrac{\partial L_3}{\partial z} & \dfrac{\partial L_3}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} 2L_1\Delta+rb_1 & 0 & 2L_2\Delta+rb_2 & 0 & 2L_3\Delta+rb_3 & 0 \\ 2L_1\Delta & 0 & 2L_2\Delta & 0 & 2L_3\Delta & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ rc_1 & b_1 & rc_2 & b_2 & rc_3 & b_3 \end{bmatrix} \tag{2.4c}$$

于是刚度矩阵为

$$[K^*]=\iint_\Delta [B^*]^T[E][B^*]\,2\pi r\,drdz \tag{2.5}$$

如果，我们称$[B^*]$的子矩阵为$[B^*]_{(i)}$

$$[B^*]_{(i)}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} 2L_i\Delta+rb_i & 0 \\ 2L_i\Delta & 0 \\ 0 & c_i \\ rc_i & b_i \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

则$[K^*]$明显地可以分为九个子矩阵

$$[K^*]_{(ij)}=\iint_\Delta [B^*]^T_{(i)}\,[E][B^*]_{(j)}2\pi r drdz \tag{2.7}$$

而刚度矩阵可以写成

$$[K^*]=\begin{bmatrix} [K^*]_{(11)} & [K^*]_{(12)} & [K^*]_{(13)} \\ [K^*]_{(21)} & [K^*]_{(22)} & [K^*]_{(23)} \\ [K^*]_{(31)} & [K^*]_{(32)} & [K^*]_{(33)} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$[K^*]_{(ij)}$也可以写成

$$[K^*]_{(ij)}=\begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{bmatrix}_{(ij)}$$

$$=\frac{E_0\pi}{2\Delta^2}\iint_{\Delta}\begin{bmatrix} 2\Delta L_i+rb_i & 2\Delta L_i & 0 & rc_i \\ 0 & 0 & c_i & b_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\Delta L_j+rb_j & 0 \\ 2\Delta L_j & 0 \\ 0 & c_j \\ rc_j & b_j \end{bmatrix} rdrdz \tag{2.9}$$

$H_{11(ij)}^*$，$H_{12(ij)}^*$，$H_{21(ij)}^*$，$H_{22(ij)}^*$分别为

$$H_{11(ij)}^*=\{2a_ia_j\bar{r}+3(a_ib_j+a_jb_i)I_4+2(a_ic_j+a_jc_i)I_5+[(5-\nu)b_ib_j+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_ic_j]I_6+3(b_ic_j+b_jc_i)I_7+2c_ic_jI_8\}\frac{E_0\pi}{2\Delta} \tag{2.10a}$$

$$H_{12(ij)}^*=\left\{2\nu a_ic_j\bar{r}+[3rb_ic_j+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_ib_j]I_4+2\nu c_ic_jI_5\right\}\frac{E_0\pi}{2\Delta} \tag{2.10b}$$

$$H_{21(ij)}^*=\left\{2\nu a_jc_i\bar{r}+\left[3rb_jc_i+\frac{1}{2}(1-2\nu)c_jb_i\right]I_4+2\nu c_ic_jI_5\right\}\frac{E_0\pi}{2\Delta} \tag{2.10c}$$

$$H_{22(ij)}^*=\left\{(1-\nu)c_ic_j\bar{r}+\frac{1}{2}(1-2\nu)b_ib_j\bar{r}\right\}\frac{E_0\pi}{2\Delta} \tag{2.10d}$$

其中I_4、I_5、I_6、I_7、I_8分别为

$$I_4\Delta=\iint_{\Delta}r^2drdz \qquad I_5\Delta=\iint_{\Delta}zrdrdz \tag{2.11a,b}$$

$$I_6\Delta=\iint_{\Delta}r^3drdz, \qquad I_7\Delta=\iint_{\Delta}r^2zdrdz, \qquad I_8\Delta=\iint_{\Delta}rz^2drdz \tag{2.11c,d,e}$$

积分后得

$$I_4\Delta=\frac{1}{3}\{A_{31}(r_3^3-r_1^8)+A_{12}(r_1^3-r_2^3)+A_{23}(r_2^3-r_3^3)\}$$

$$+\frac{1}{4}\{m_{31}(r_3^4-r_1^4)+m_{12}(r_1^4-r_2^4)+m_{23}(r_2^4-r_3^4)\} \tag{2.12a}$$

$$I_5\Delta=\frac{1}{4}\{A_{31}^2(r_3^2-r_1^2)+A_{12}^2(r_1^2-r_2^2)+A_{23}^2(r_2^2-r_3^2)\}$$

$$+\frac{1}{3}\{m_{31}A_{31}(r_3^3-r_1^3)+m_{12}A_{12}(r_1^3-r_2^3)+m_{23}A_{23}(r_2^3-r_3^3)\}$$

$$+\frac{1}{8}\{m_{31}^2(r_3^4-r_1^4)+m_{12}^2(r_1^4-r_2^4)+m_{23}^2(r_2^4-r_3^4)\} \tag{2.12b}$$

$$I_6\Delta=\frac{1}{4}\{A_{31}(r_3^4-r_1^4)+A_{12}(r_1^4-r_2^4)+A_{23}(r_2^4-r_3^4)\}$$

$$+\frac{1}{5}\{m_{31}(r_3^5-r_1^5)+m_{12}(r_1^5-r_2^5)+m_{23}(r_2^5-r_3^5)\} \tag{2.12c}$$

$$I_7\Delta=\frac{1}{6}\{A_{31}^2(r_3^3-r_1^3)+A_{12}^2(r_1^3-r_2^3)+A_{23}^2(r_2^3-r_3^3)\}$$

$$+\frac{1}{4}\{A_{31}m_{31}(r_3^4-r_1^4)+m_{12}A_{12}(r_1^4-r_2^4)+m_{23}A_{23}(r_2^4-r_3^4)\}$$

$$+\frac{1}{10}\{m_{31}^2(r_3^5-r_1^5)+m_{12}^2(r_1^5-r_2^5)+m_{23}^2(r_2^5-r_3^5)\} \tag{2.12d}$$

$$I_8\Delta=\frac{1}{6}\{A_{31}^3(r_3^2-r_1^2)+A_{12}^3(r_1^2-r_2^2)+A_{23}^3(r_2^2-r_3^2)\}$$

$$+\frac{1}{3}\{A_{31}^2m_{31}(r_3^3-r_1^3)+A_{12}^2m_{12}(r_1^3-r_2^3)+A_{23}^2m_{23}(r_2^3-r_3^3)\}$$

$$+\frac{1}{4}\{A_{31}m_{31}^2(r_3^4-r_1^4)+A_{12}m_{12}^2(r_1^4-r_2^4)+A_{23}m_{23}^2(r_2^4-r_3^4)\}$$

$$+\frac{1}{15}\{m_{31}^3(r_3^5-r_1^5)+m_{12}^3(r_1^5-r_2^5)+m_{23}^3(r_2^5-r_3^5)\} \tag{2.12e}$$

如果三角形有一边平行于z轴，则应该把(1.27)式代入(2.12a、b、c、d、e)式计算ΔI_i，（而且$r_1=r_3$）；如果三角形有一边处于z轴上，则除了把(1.27)式代入(2.12a、b、c、d、e)式外，还应该把$r_1=r_3=0$代入，即得所需ΔI_i.

这样的形状函数(2.1)式，不论三角环有限元在什么位置，(2.7)式的刚度矩阵元素都能计算。这就克服了齐基威茨等人用(1.2)式作为形状函数所引起的一切困难。

参考文献

1. Wilson, E. L., Structural Analysis of Axisymmetric Solids, *AIAA Journal*, **4**, (1965), 2269.
2. Clough, R. and Rashid, Y., Finite Element Analysis of Axisymmetric Solids, Proc. *ASCE*, *J. Eng. Mech*., **91**, №EMI, (1965), 71—85.
3. Vitku, S., Explicit Expressions for Triangular Torus Element Stiffness Matrix, *AIAA Journal*, **6**, 8 (1968), 1174—75.
4. Fjeld, S. A., Three-Dimensional Theory of Elasticity, Finite Element Method in Stress Analysis, Edited by I. Holand and K. Bell, TAPIR, (1969), 333—368.
5. Zienjiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1967), 67—70.
   齐基威茨, O. C. 和张佑启著:《结构和连续统力学的有限元法（1967年原版）》国防工业出版社（1974）.
6. Zienjiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Sciences*, McGraw-Hill, London (1971).
7. Desai, C. S. and Abel, J. F., *Introduction to hte Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Co., New York (1972).
   德赛, C. S., 阿贝尔, J. F. 著:《有限元素法引论》, 江伯南, 尹泽勇译, 徐芝纶校, 科学出

版社（1978）.

8. 华东水利学院《弹性力学有限元法》，水利电力出版社（1974）.
9. 复旦大学数学系，《有限元法选讲》，科学出版社（1976）.
10. Huebner, K. H., *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley and Sons, (1975).
11. 郭仲衡，关于有限元法轴对称问题的一点记注，1978年教育部高等学校计算结构力学学术交流会论文集，大连(1978).
12. 郭仲衡：《内燃机活塞热应力计算（轴对称有限元法）》北京大学数力系应用数学73届讲义(1975).

Finite Element Analysis of Axisymmetric Elastic Body Problems

Chien Wei-zang

(Tsing Hua University, Peking)

Abstract

Linear form functions are commonly used in a long time for a toroidal volume element swept by a triangle revolved about the symmetrical axis for general axisymmetrical stress problems. It is difficult to obtain the rigidity matrix by exact integration, and as approximations close to the symmetrical axis, the accuracy of this approximation deteriorates very rapidly. The exact integrations have been suggested by some authors for the calculation of rigidity matrix. However, it is shown in this paper that these exact integrations can only be used for those axisymmetric elastic bodies with central hole. For solid axisymmetric body, it can be proved that the calculation fails due to the divergent property of rigidity matrix integration. In this paper, a new form function is suggested. In this new form function, the radial displacement u vanishes as radial coordinates r approach to zero. The calculated rigidity matrix is convergent everywhere, including these triangular toroidal element closed to the symmetrical axis. This kind of elenent is useful for the calculation of axisymmetric elastic body problem.