

文章编号: 1000-0887(2005) 02-0130-07

# 考虑耗散效应的金属杆受扰动后的 非线性动力学现象分析\*

赵广慧, 张年梅, 杨桂通

(太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(我刊原编委杨桂通来稿)

摘要: 研究在周期外载荷作用及 Neumann 边界条件下, 考虑 Peierls\_Nabarro 效应的有限长一维金属杆的运动, 以位移表达杆的控制方程, 是受扰动的类 sine\_Gordon 方程. 利用空间四阶精度, 时间二阶精度的有限差分格式模拟系统的动力响应. 对于一定特征尺寸及物理性质的金属杆, 研究了初始呼吸子及周期载荷幅值对杆动力行为的影响, 结果显示了 4 种典型的动力行为: 与空间位置无关的简谐运动、单波的简谐运动、单波的准周期运动和单空间模态的时间混沌运动. 通过 Poincaré 截面和功率谱确定系统的运动特征.

关键词: sine\_Gordon 系统; Neumann 边界条件; 混沌

中图分类号: O347.4 文献标识码: A

## 引 言

对于有阻尼及外力扰动的 sine\_Gordon 型方程, A. R. Bishop<sup>[1-3]</sup> 研究了在周期边界条件下方程的解, 得出随参数的变化而呈现出不同的空间模态及长时间渐近行为结构. 文献[1] 在单峰呼吸子的初始条件下, 得到了以外力扰动幅值  $\varepsilon\Gamma$  为分叉参数, 方程的解随  $\varepsilon\Gamma$  变化的分叉图, 对于一定的  $\varepsilon\Gamma$  值, 方程的解反映出混沌效应. 文献[2] 研究了初始条件对于方程解的演化影响, 对于初始位移和速度均为零、初始位移为完全对称和稍不对称的呼吸子及初始位移为扭结波的几种情况, 给出了方程的解随外力幅值的变化规律. 文献[3] 研究了方程的解随外力幅值及频率变化的分叉图, 表明外力频率也是影响系统由周期向混沌演化的重要因素. J. C. Eitbeck<sup>[4]</sup> 应用线性出流边界条件:  $u_x \pm u_t = 0$ , 研究了在空间非均匀外力作用下, 有阻尼的 SG 方程的混沌演化, 从能量的观点说明, 当外力幅值较大时, 外力所输入的能量比较大, 当输入能量大到能促使呼吸子破裂转化时, 混沌运动就产生了<sup>[5]</sup>.

当金属杆受到载荷作用, 其内部结构发生变化必将克服由于变形的发生而构成势垒的、具有周期特征的 Peierls\_Nabarro 力  $\sigma_p$ <sup>[6]</sup>:

\* 收稿日期: 2003\_05\_13; 修订日期: 2004\_09\_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172063); 山西省青年科学基金资助项目(20011004)

作者简介: 赵广慧(1971—), 女, 河北人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86\_351\_6010560; Fax: + 86\_351\_6041646; E\_mail: wy\_zgh@yahoo.com.cn);

张年梅(1965—) 女, 江西人, 教授, 博士, 从事非线性动力学研究

(E\_mail: nianmeizhang@yahoo.com).

$$q_p = P \sin \alpha u, \quad (1)$$

同时材料在加载时将引起温度升高,这是固体的粘性行为,可近似表示为:

$$\alpha_v = \xi \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2)$$

对于沿杆纵向受到周期外力扰动的一维有限长杆,考虑到以上因素对杆运动的影响,可以得到描述杆中非线性位移波传播的运动方程:

$$u u_t = \frac{E}{\rho} u_{xx} - \frac{P}{\rho} \sin(\alpha u) - \frac{\xi}{\rho} u_t + \frac{F}{\rho} \cos(\omega t), \quad (3)$$

此方程是受扰动的类 SG 方程,其中:  $E$  为弹性模量;  $\rho$  为杆的密度;  $P$ 、 $F$  分别为作用在单位体积上的 Peierls\_Nabarro 力和纵向外力的幅值;  $\omega$  为外力的作用频率;  $\xi$  为粘性系数。

本文研究周期外力作用下,计入 Peierls\_Nabarro 效应的有限长一维金属杆,在 Neumann 边界条件下的运动规律。这个运动可以用类 SG 方程来描述。通过数值计算发现,该方程不仅可以反映扭结波的传播,而且在一定条件下,杆的运动呈现出混沌效应。

## 1 基本方程

考虑两端限制转动的一维有限长杆,杆长为  $l$ ,杆断面的最大尺寸为  $d$ 。初始条件取为:

$$u(x, 0) = 1.6 \times 10^{-5} \arctan \frac{\sqrt{0.51}}{0.7 \cosh(10x \sqrt{0.51})}, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad (4)$$

边界条件为:

$$u_x \left[ -\frac{l}{2}, t \right] = u_x \left[ \frac{l}{2}, t \right] = 0. \quad (5)$$

下面我们对杆的运动微分方程及其初始和边界条件进行无量纲化。取特征长度:  $L = l/12$ ; 特征时间取为:  $T = L \sqrt{\rho/E}$ 。用“'”表示无量纲量则有:  $x = Lx'$ ;  $t = L \sqrt{\rho/E} t'$ ;  $d = Ld'$ ;  $\omega = \omega'/T = \omega'/L \sqrt{E/\rho}$ ;  $u = d'^2 Lu'$ , 代入(3)、(4)、(5)中,并将无量纲量的撇号去掉,可得:

$$u u_t - u_{xx} + \frac{PL}{d'^2 E} \sin(\alpha d'^2 Lu) = -\frac{\xi L}{\sqrt{E\rho}} u_t + \frac{FL}{d'^2 E} \cos(\omega t), \quad (6)$$

这里的  $u$ 、 $t$ 、 $x$ 、 $d$ 、 $\omega$  均为无量纲量。将初始条件无量纲化得到:

$$u(x, 0) = 4 \arctan \frac{\sqrt{0.51}}{0.7 \cosh(x \sqrt{0.51})}, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad (7)$$

无量纲的边界条件为:

$$u_x(-6, t) = u_x(6, t) = 0. \quad (8)$$

方程(6)在形式上是外力扰动下有阻尼的 SG 型方程。这里我们研究  $l = 1.2 \text{ m}$ ,  $d = 0.632 \text{ mm}$  的杆,其它参数为:  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $P = 8 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $\xi = 1.58 \times 10^7 \text{ kg/(s} \cdot \text{m}^3)$ , 取  $\alpha d^2 L = 1$ 。则方程(6)可具体写为:

$$u u_t - u_{xx} + \sin u = -\varepsilon u_t + f \cos(\omega t), \quad (9)$$

其中无量纲的系数:  $\varepsilon = 0.04$ ,  $f = FL/(d^2 E)$ ,  $\omega \leq 1$ , 取为 0.87。当  $\varepsilon = f = 0$  时,方程(9)就成为标准的 SG 方程。

## 2 有限差分格式

对于受扰的 SG 方程(9),利用有限差分格式进行数值计算,空间采用四阶精度的中心差分,时间为二阶精度的中心差分,以  $(n \Delta t, j \Delta x)$  点为中心进行差分离散:

$$(uu)_j^n - \frac{1}{2}[(u_{xx})_j^{n+1} + (u_{xx})_j^{n-1}] + \frac{1}{2}[\sin u_j^{n+1} + \sin u_j^{n-1}] = -\mathcal{E}(u_t)_j^n + f \cos \omega t, \quad (10)$$

式中上标表示时间层,下标表示空间点,进一步将导数离散可以得到差分方程:

$$u_{j+1}^{n+1} - 16u_{j+1}^n + \left[ \left( 30 + \frac{24\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{\mathcal{E}}{2\Delta t} 24\Delta x^2 \right) u_j^{n+1} + 12\Delta x^2 \sin u_j^{n+1} \right] - 16u_{j-1}^n + u_{j-2}^{n+1} = \frac{24\Delta x^2}{\Delta t^2}(2u_j^n - u_j^{n-1}) + (-u_{j+2}^n + 16u_{j+1}^n - 30u_j^n + 16u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) - 12\Delta x^2 \sin u_j^{n-1} + \frac{\mathcal{E} \cdot 24\Delta x^2}{2\Delta t} u_j^{n-1} + 24\Delta x^2 \cdot f \cos(\omega t). \quad (11)$$

由于受扰 SG 方程中的扰动项系数  $\mathcal{E}, f$  均为小量,若忽略(9)式中的扰动项,即取  $\mathcal{E} = f = 0$ ,则得到标准的 SG 方程,下面用 SG 方程的两种精确解验证无扰方程的差分格式。

## 2.1 用扭结波解验证

将初始条件和边界条件取为 SG 方程的扭结波解:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[ \exp \left[ \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right], \quad (12)$$

此方程描述了以常速度  $v$  传播的扭结波。数值计算中空间杆长取为 120,  $v = 0.2$ 。则空间最大误差随时间的变化及扭结波随时间传播的波形如图 1 和图 2 所示。

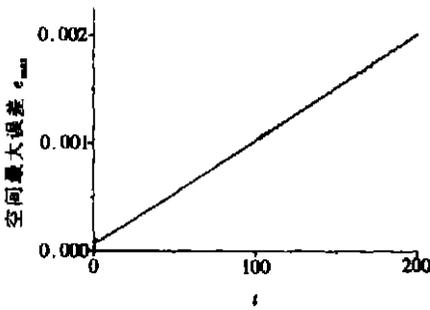


图 1 空间最大误差随时间的变化

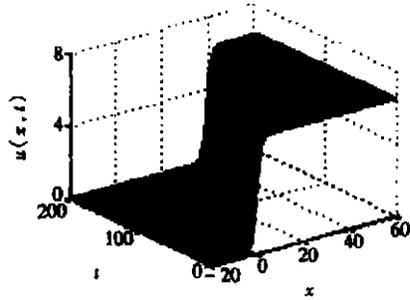


图 2 空间扭结波随时间变化的数值计算图

SG 方程的一个很重要的性质是能量守恒,将 SG 方程的两端同时乘以  $du$ , 并对空间进行积分可得:

$$E = \int_l \left[ \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + F(u) \right] dx = \text{const}, \quad (13)$$

其中:  $F(u)$  为  $\sin u$  的一个原函数,取:  $F(u) = 1 - \cos u$ 。将能量进行离散后可得:

$$E = \frac{\Delta x}{2} \sum_l \left\{ \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2\Delta x^2} [(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})^2 + (u_{j+1}^n - u_j^n)^2] + (2 - \cos u_j^{n+1} - \cos u_j^n) \right\}. \quad (14)$$

数值计算结果表明,  $t = 0 \sim 200$  过程中能量变化在 8.16024~8.16025 之间,很好地反映了 SG 方程能量守恒的物理特性。

## 2.2 用呼吸子解验证

将初始条件和边界条件取为 SG 方程的呼吸子精确解:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{1 - \omega_b^2} \cos(\omega_b t)}{\omega_b \cosh(x \sqrt{1 - \omega_b^2})} \right\}, \tag{15}$$

其中  $\omega_b$  为呼吸频率, 取为  $0.2$ 。则空间最大误差和波形随时间的变化如图 3 和图 4 所示,  $t = 0 \sim 400$  中能量的变化在  $15.6675 \sim 15.6712$  之间。

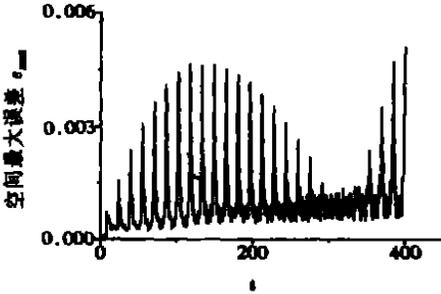


图 3 空间最大误差随时间的变化

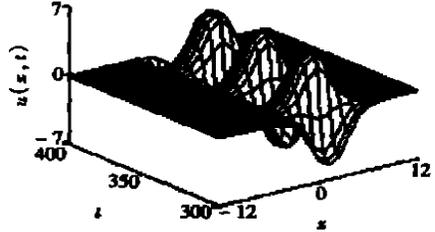


图 4 空间呼吸子随时间变化的数值计算图

由这两个例子可以说明无扰差分格式的有效性。由(6)式可知, 受扰 SG 方程中的阻尼项及外力扰动项与二阶导数项相比均为小量, 所以可近似将无扰的差分格式用于有扰动问题的模拟。

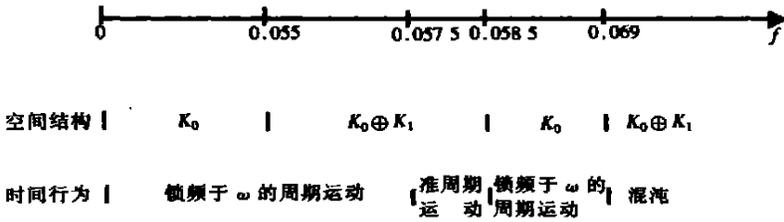


图 5 以外力幅值  $f$  为分叉参数的分叉图

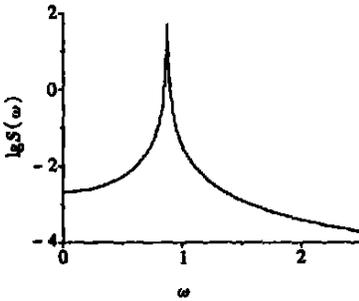


图 6  $f = 0.055$  时杆中点的功率谱图

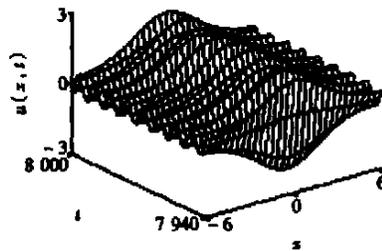


图 7  $f = 0.055$  时杆的空间结构随时间变化图

### 3 杆中的非线性复杂动力行为

通过数值计算, 得到杆的空间模态与长时间渐近行为随外力幅值  $f$  的变化情况如图 5 所示。图中的  $K_0$  表示空间均匀的零波数模态;  $K_1$  表示波数  $K_1 = 2\pi/l$  的沿空间单周期变化的模态;  $K_0 \oplus K_1$  表示这两个模态的非线性叠加。

1) 当  $f < 0.055$  ( $F < 4.4 \times 10^6$  N) 时, 初始单峰的空间结构作为瞬态很快衰减掉, 杆上各

点是完全同步且锁频于外力的周期运动,如同单质点的运动。

2) 外力增大为:  $0.055 \leq f < 0.0575$ , 即  $4.4 \times 10^6 \text{ N} \leq F < 4.6 \times 10^6 \text{ N}$  时, 空间模态为沿杆长单周期的呼吸子迭加在空间均匀的结构之上, 且杆上所有点均为锁频于外力的周期运动。  $f = 0.055$  ( $F = 4.4 \times 10^6 \text{ N}$ ) 的功率谱及空间结构随时间的变化波形如图 6 和图 7 所示。

3) 当  $0.0575 \leq f \leq 0.0585$  ( $4.6 \times 10^6 \text{ N} \leq F < 4.68 \times 10^6 \text{ N}$ ) 时, 空间模态为呼吸子叠加在空间均匀的结构之上, 呼吸峰值在杆两端, 如图 8 所示; 杆上一点的运动随时间变化出现包络线, 如图 9 所示; 杆中点的功率谱图 10 和 Poincaré 截面图 11 显示此时的运动为准周期运动。

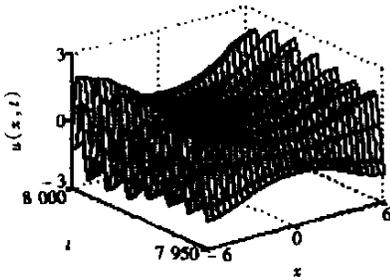


图 8  $f = 0.058$  时的空间结构随时间变化图

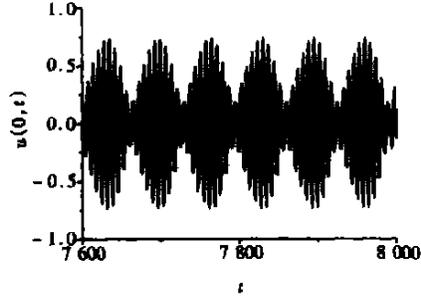


图 9  $f = 0.058$  时, 杆中点的位移随时间变化图

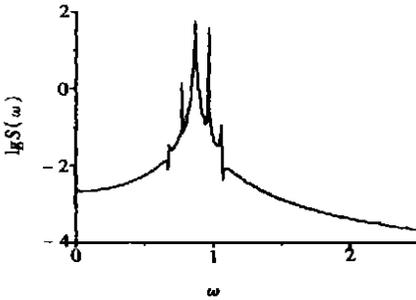


图 10  $f = 0.058$  时的功率谱图

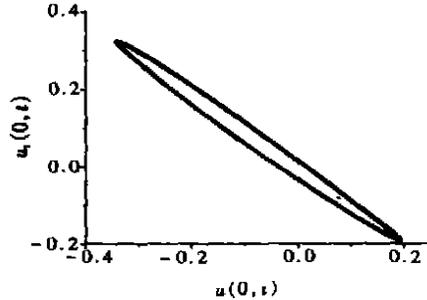


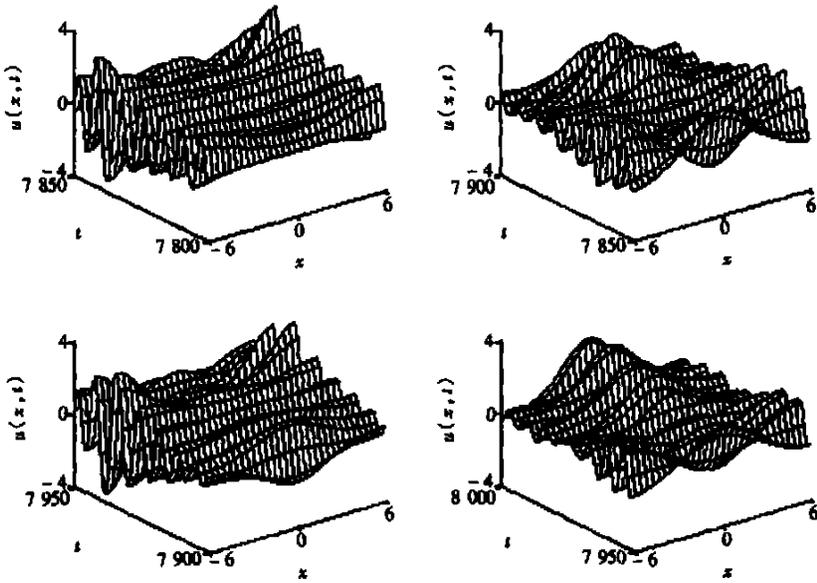
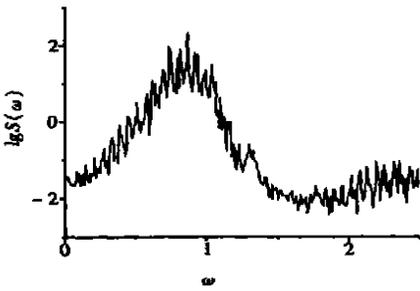
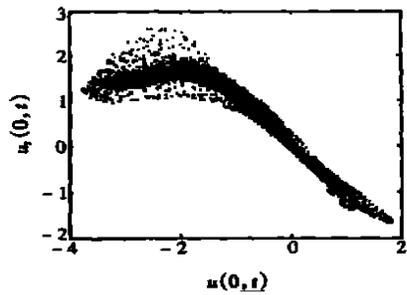
图 11  $f = 0.058$  时的 Poincaré 图

4) 当  $0.0585 < f < 0.069$ , 即  $4.68 \times 10^6 \text{ N} < F < 5.52 \times 10^6 \text{ N}$  时, 空间为均匀结构, 所有质点为同步且锁频于外力的周期运动。

5) 当  $f \geq 0.069$ , 即  $F \geq 5.52 \times 10^6 \text{ N}$  时, 可以看到两个不稳定空间模态  $K_0$  和  $K_1$  之间的间歇跳跃。呼吸峰值在杆中央或两端, 并以空间均匀的零波数状态为过渡状态, 时间上为混沌运动。  $f = 0.105$  ( $F = 8.4 \times 10^6 \text{ N}$ ) 时的计算结果如图 12 ~ 图 15 所示。图 12 描述了杆空间结构随时间的变化, 时间取在所有瞬态过后:  $t = 7800 \sim 8000$ 。由杆中点的功率谱图 13、Poincaré 截面图 14 及时程曲线图 15 可以看出, 杆此时为混沌运动。

## 4 结 论

本文给出了考虑 Peierls-Nabarro 效应的一维有限长金属杆, 在空间均匀分布、时间简谐变化的外载荷作用下的类 SG 方程。利用空间四阶精度、时间二阶精度的有限差分格式数值模拟系统的动力响应。在 Neumann 边界条件及呼吸子初始条件下, 对于确定尺寸及物理性质的

图 12  $f = 0.105$  时,空间结构随时间的变化图图 13  $f = 0.105$  时的功率谱图图 14  $f = 0.105$  时的 Poincaré 截面图

金属杆,研究了系统在不同载荷作用下的动力行为:

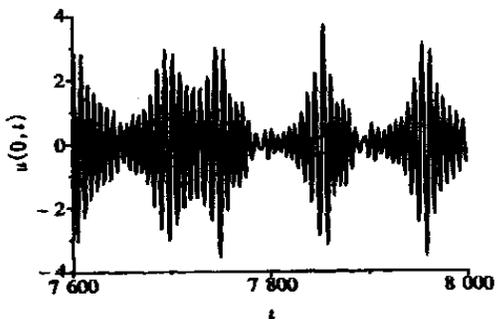
1) 当  $f < 0.055$  时,所有空间点为完全同步且锁频于外力的简谐运动。

2) 当  $0.055 \leq f < 0.0575$  时,各空间点仍为锁频于外力的简谐运动,但位移沿空间不再均匀分布,而是呼吸子与空间均匀结构的非线性叠加。

3) 当  $0.0575 \leq f \leq 0.0585$  时,空间模式仍为呼吸子与空间均匀结构的叠加,但杆中各点均作准周期运动。

4) 当  $0.0585 < f < 0.069$  时,运动又与外力很小的情况 1) 类同,空间各点为完全同步且锁频于外力的简谐运动。

5) 当  $f$  进一步增大时,出现了空间均匀结构与呼吸子结构之间的间歇跳跃,运动在时间上呈现出混沌特征。

图 15  $f = 0.105$  时杆中点的位移随时间的变化图

## [参 考 文 献]

- [1] Bishop A R, Flesch R, Forest M G, et al. Correlations between chaos in a perturbed sine\_Gordon equation and a truncated model system[J]. SIAM J Mathematical Analysis, 1990, 21(6): 1511—1536.
- [2] Bishop A R, Fesser K, Lomdahl P S. Influence of solitons in the initial state on chaos in the driven damped sine\_Gordon system[J]. Physica D, 1983, 7(2): 259—279.
- [3] Bishop A R, Forest M G, Mdaughlin D W, et al. A quasi\_periodic route to chaos in a near\_integrable PDE[J]. Physica D, 1986, 23(2): 293—328.
- [4] Ellbeck J C, Lomdahl P S, Newell A C. Chaos in the inhomogeneously driven sine\_Gordon equation [J]. Physics Letters A, 1981, 87(1): 1—4.
- [5] 张年梅, 杨桂通. 非线性弹性梁中的混沌带现象[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(5): 450—454.
- [6] Shu X F, Yang G T. The influence of material properties on dynamic behavior of structures[A]. In: Senoo M Ed. Proceedings of IMMM' 97[C]. Kamihama: Mie University Press, 1997, 279—284.

## Nonlinear Complex Dynamic Phenomena of the Perturbed Metallic Bar Considering Dissipating Effect

ZHAO Guang\_hui, ZHANG Nian\_mei, YANG Gui\_tong

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,  
Taiyuan 030024, P. R. China)

**Abstract:** Considering Peierls\_Nabarro effect, one\_dimensional finite metallic bar subjected with periodic field was researched under Neumann boundary condition. Dynamics of this system was described with displacement by perturbed sine\_Gordon type equation. Finite difference scheme with fourth\_order central differences in space and second\_order central differences in time was used to simulate dynamic responses of this system. For the metallic bar with specified sizes and physical features, effect of amplitude of external driving on dynamic behavior of the bar was investigated under initial “breather” condition. Four kinds of typical dynamic behaviors are shown: x\_independent simple harmonic motion; harmonic motion with single wave; quasi\_periodic motion with single wave; temporal chaotic motion with single spatial mode. Poincaré map and power spectrum are used to determine dynamic features.

**Key words:** sine\_Gordon system; Neumann boundary condition; chaotic