应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

非局部微极线性弹性介质理论中的各种互易定理和变分原理

戴天民　（西南交通大学）

（1979年11月26日收到）

摘　要

在本文的第一部份中，我们扩展了经典的卷积和I．Hlaváček给出的“卷积数积”的概念，提出了“卷积向量”和“卷积向量点积”的概念，从而可使我们把具有算子系数的方程的初值问题和初值——边值问题推广到具有算子系数的方程组的相应问题中去。

在本文的第二部份中，以卷积向量和卷积向量点积的概念为基础导出了非均匀的各向异性固体的非局部微极线性弹性动力学的两种基本型式的互易定理。

在本文的第三部份中，利用一和二中卷积向量和卷积向量点积的概念和结论及由钱伟长提出的Lagrange乘子法给出了非局部微极线性弹性动力学的四种主要型式的广义变分原理。它们是与经典弹性理论中的胡海昌-鹫津久一郎型的、Hellinger-Reissner型的和Gurtin型的以及局部微极弹性理论和非局部弹性理论中的Hlaváček型的和Ieşan型的广义变分原理相应的各种变分原理。最后还指出了这里提出的后两种主要型式的广义变分原理是等价的。

一、卷积向量和卷积向量点积的概念及其应用

1971年Hlaváček[1]发展了经典的卷积概念，提出了“卷积数积”的新概念，并以此为基础给出了具有线性算子系数的方程的初值问题的若干变分原理。接着他研究了具有算子系数的线性积微分方程的初值问题解的存在性和唯一性问题[2]，[3]。可见，由于卷积数积概念的引进，就可把用线性微分方程所描述的数学物理问题的研究推广到用线性积微分方程所描述的数学物理问题中去。

本文首先扩展了卷积和卷积数积的概念，提出卷积向量和卷积向量点积的概念，从而可以把用具有算子系数的线性方程所描述的数学物理问题的研究推广到用具有算子系数的线性方程组所描述的数学物理问题中去。引进卷积向量和卷积向量点积概念的目的不仅在于写法简洁，更主要的是在于直接推广已有的结果。

为清晰起见，本文采用与卷积和卷积数积对比的方式给出卷积向量和卷积向量点积的概念和性质，然后即可直接写出与[1]中具有算子系数的方程的初值问题变分原理对应的具有算子系数的方程组的相应初值问题变分原理。

卷积和卷积数积

设给定一有界区间 $I=\langle 0,T\rangle$ 和一具有数积 $(u,\ v)$ 和范数 $|u|=(u,u)^{1/2}$ 的基本实 Hilbert 空间 H。

定义H1※ 令 $L_2(I,H)$ 表示所有 I 到 H 内可测映射 $u(t)$ 的空间，其中

$$|u(t)|_T=\left(\int_0^T|u(t)|^2dt\right)^{1/2}<\infty \qquad \text{(Ha)※}$$

定义H2 令 $L_2(I)$ 表示在 I 上平方可积的实函数空间。

令 $f,g\in L_2(I)$ 或 $g\in L_2(I,H)$，则函数

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad \text{(Hb)}$$

称为函数 f 和函数 g 的卷积。

令 $u,v\in L_2(I,H)$，则函数

$$(u\otimes v)(t)=\int_0^t(u(t-\tau),\ v(\tau))d\tau \qquad \text{(Hc)}$$

称为函数 u 和函数 v 的卷积数积。

卷积向量和卷积向量点积

设给定一有界区间 $I=\langle 0,T\rangle$ 和一具有向量点积 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$ 和范数 $|\boldsymbol{u}|=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{1/2}$ 的实函数向量空间 $\boldsymbol{H}$。

定义 1 令 $\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$ 表示所有 I 到 $\boldsymbol{H}$ 内可测映射向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 的向量空间，其中

$$|\boldsymbol{u}(t)|_T=\left(\int_0^T|\boldsymbol{u}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}<\infty \qquad \text{(a)}$$

定义 2 令 $L_2(I)$ 表示在 I 上平方可积的实函数空间。

令 $f\in L_2(I),\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$，则函数向量

$$(f\times\boldsymbol{g})=\int_0^t f(t-\tau)\boldsymbol{g}(\tau)d\tau \qquad \text{(b)}$$

称为函数 f 和函数向量 $\boldsymbol{g}$ 的卷积向量。

令 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$，则函数

$$(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v})(t)=\int_0^t(\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))d\tau \qquad \text{(c)}$$

称为函数向量 $\boldsymbol{u}$ 和函数向量 $\boldsymbol{v}$ 的卷积向量点积。

※ 本文把[1]中的定义、引理、定理和公式均加字母H，以示区别。

由定义知：

$$(u\otimes(v+w))(t)=(u\otimes v)(t)+(u\otimes w)(t) \qquad \text{(Hd)}$$

引理H1 对每对 $u,v\in L_2(I,H)$ 和 $t\in I$，下式成立：

$$|(u\otimes v)(t)|\leqslant|u|_T\cdot|v|_T \qquad \text{(H1)}$$

$$(u\otimes v)(t)=(v\otimes u)(t) \qquad \text{(H2)}$$

引理H2 令 $f\in L_2(I)$ 和 $u\in L_2(I,H)$，则

$$(f*u)(t)=\int_0^t f(t-\tau)u(\tau)d\tau\in L_2(I,H) \qquad \text{(H3)}$$

如果 $u(t)$ 在 I 上连续，$l(t)=1$，则对所有 $t\in I$，下式成立：

$$\frac{d}{dt}(l*u)=u(t) \qquad \text{(H4)}$$

在 I 上下式成立：

$$(l*(l*u))(t)=(t*u)(t) \qquad \text{(H5)}$$

引理H3 令 $f\in L_2(I)$ 和 $u,v\in L_2(I,H)$，则对每个 $t\in I$，下式成立：

$$((f*u)\otimes v)(t)=(f*(u\otimes v))(t) \qquad \text{(H6)}$$

由定义知：

$$(\boldsymbol{u}\odot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}))(t)=(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{w})(t) \qquad \text{(d)}$$

引理 1 对每对 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$ 和 $t\in I$，下式成立：

$$|(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v})(t)|\leqslant|\boldsymbol{u}|_T\cdot|\boldsymbol{v}|_T \qquad (1.1)$$

$$(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v})(t)=(\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{u})(t) \qquad (1.2)$$

引理 2 令 $f\in L_2(I)$ 和 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$，则

$$(f\times\boldsymbol{u})(t)=\int_0^t f(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H}) \qquad (1,3)$$

如果 $\boldsymbol{u}(t)$ 在 I 上连续，$l(t)=1$，则对所有 $t\in I$，下式成立：

$$\frac{d}{dt}(l\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}(t) \qquad (1.4)$$

在 I 上下式成立：

$$(l\times(l\times\boldsymbol{u}))(t)=(t\times\boldsymbol{u})(t) \qquad (1.5)$$

引理 3 令 $f\in L_2(I)$ 和 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$，则对每个 $t\in I$，下式成立：

$$((f\times\boldsymbol{u})\odot\boldsymbol{v})(t)=(f*(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}))(t)\text{※} \qquad (1.6)$$

引理 H4　设 $\widetilde{w}\in L_2(I,H)$和一序列$\{v_n\}\subset L_2(I,H)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-\widetilde{w}\|_T=0$．于是，对每个$w\in L_2(I,H)$和 $t\in I$，下式成立：$\lim\limits_{n\to\infty}(w\otimes v_n)(t)=(w\otimes\widetilde{w})(t)$	引理 4　设$\boldsymbol{\widetilde{w}}\in \boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$和一函数向量序列$\{\boldsymbol{v}_n\}\subset \boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\|\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{\widetilde{w}}\|_T=0$．于是，对每个$\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$和$t\in I$　下式成立：$\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{v}_n)(t)=(\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{\widetilde{w}})(t)$
定义 H3　令$u'(t)=du/dt$，ℓ_0是I到H内的连续映射的线性流形，而 ℓ_1是I 到H内的映射 $u(t)$的线性流形，它具有连续导数$u'(t)\in\ell_0$．	定义3 令 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)=d\boldsymbol{u}/dt$，$\ell_0$是 I 到 $\boldsymbol{H}$ 内连续映射的线性向量流形，而ℓ_1是I到 $\boldsymbol{H}$ 内的映射 $\boldsymbol{u}(t)$的线性向量流形，它具有连续导数 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)\in\ell_0$．
引理H5 令$u'\in\ell_0$并令$v\in L_2(I,H)$对一点$t\in I$是连续的．于是，在该点下式成立：$\dfrac{d}{dt}(u\otimes v)(t)=(u'\otimes v)(t)+(u(0),v(t))$	引理5　令 $\dot{\boldsymbol{u}}\in\ell_0$ 并令$\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$对一点$t\in I$是连续的。于是，在该点下式成立：$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v})(t)=(\dot{\boldsymbol{u}}\odot\boldsymbol{v})(t)+(\boldsymbol{u}(0)\cdot\boldsymbol{v}(t))$
引理H6 令$w\in\ell_0$使$(w\otimes v)(T)=0$对每个$v\in\mu$成立，并令μ在 $L_2(I,H)$内是稠密的．于是，对每个$t\in I$，则有$w(t)=0$．	引理6　令$\boldsymbol{w}\in\ell_0$使$(\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{v})(T)=0$对每个$\boldsymbol{v}\in\mu$成立，并令 μ在 $\boldsymbol{L}_2(I,\boldsymbol{H})$ 内是稠密的。于是，对每个$t\in I$，则有 $\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{o}$．

※　注意引理 3 与引理H3形式不同，现证明如下：

$$((f\times\boldsymbol{u})\odot\boldsymbol{v})(t)=\int_0^t\left(\left(\int_0^{t-\tau}(f(t-\tau-s)\boldsymbol{u}(s)ds)\cdot\boldsymbol{v}(\tau)\right)d\tau\right.$$

$$=\int_0^t d\tau\int_\tau^t f(t-y)(\boldsymbol{u}(y-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))dy=\int_0^t dyf(t-y)\int_0^y(\boldsymbol{u}(y-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))d\tau$$

$$=\int_0^t f(t-y)\int_0^y(\boldsymbol{u}(y-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau))d\tau\, dy=(f*(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}))\qquad 其中\qquad s=y-\tau$$

有了这个对比之后，我们就可以把[1]中所给出的具有线性算子的方程的初值问题的变分原理直接改写成具有线性算子的方程组的初值问题的变分原理。例如，现来研究具有算子系数的一阶方程组

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{B}\mathbf{u})+\mathscr{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}\tag{1.7}$$

和初始条件　　$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$　　(1.8)

这里$\mathbf{u}$是由有限个函数组成的向量，$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是$\mathbf{L}_2(I,\mathbf{H})$中的线性算子使

对于 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{D}_{\mathscr{A}}$，　　$(\mathscr{A}\mathbf{u}\odot\mathbf{v})(T)=(\mathbf{u}\odot\mathscr{A}\mathbf{v})(T)$　　(1.9)

对于 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{C}_{\mathscr{B}}$，　　$(\mathscr{B}\mathbf{u}\odot\mathbf{v})(T)=(\mathbf{u}\odot\mathscr{B}\mathbf{v})(T)$　　(1.10)

假定

$$(\mathscr{B}\mathbf{v})(0)=0\Leftrightarrow\mathbf{v}(0)=0\tag{1.11}$$

$$\mathbf{f}\in\mathscr{C}_0,\quad \mathbf{u}_0\in\mathbf{D}_{\mathscr{B}}\cap\mathbf{D}_{\mathscr{A}}和\mathscr{B}\mathbf{u}_0\in\mathscr{C}_1\tag{1.12}$$

令$\mathscr{K}$表示映射$\mathbf{u}\in\mathscr{C}_0$的线性向量流形，其中$\mathbf{u}\in\mathbf{D}_{\mathscr{B}}\cap\mathbf{D}_{\mathscr{A}}$，$\mathscr{B}\mathbf{u}\in\mathscr{C}_1$，$\mathscr{A}\mathbf{u}\in\mathscr{C}_0$，$\mathbf{u}(0)\in\mathbf{D}_{\mathscr{B}}$．在$\mathscr{K}$上定义下列泛函：

$$\mathscr{F}(\mathbf{u})=([\mathscr{B}\mathbf{u}+(l\times\mathscr{A}\mathbf{u})]\odot\mathbf{u})(T)-2([(l\times\mathbf{f})+\mathscr{B}\mathbf{u}_0(0)]\odot\mathbf{u})(T)\tag{1.13}$$

定理 1　令$\mathscr{K}$在 $\mathbf{L}_2(I,\mathbf{H})$是稠密的，并令(1.9)—(1.12)成立。于是在$\mathscr{K}$上

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u})=0 \tag{1.14}$$

当且仅当$\mathbf{u}\in\mathscr{K}$在I上满足方程组(1.7)和初始条件(1.8)。

定理 2　令(1.9)，(1.11)，(1.12)和下式成立：

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{B}\mathbf{u}\odot\mathbf{v})\Big|_{t=T}=\frac{d}{dt}(\mathscr{B}\mathbf{v}\odot\mathbf{u})\Big|_{t=T} \tag{1.15}$$

假定集合$\mathscr{K}_0=\{\mathbf{v}\in\mathscr{K},\ \mathbf{v}(T)=0\}$在$\mathbf{L}_2(I,\mathbf{H})$中是稠密的并令$\mathbf{v}(T)$的集合在$\mathbf{H}$中是稠密的，如果$\mathbf{v}\in\mathscr{K}$。

定义下列泛函：

$$\dot{\mathscr{F}}(\mathbf{u})=([(\mathscr{B}\mathbf{u})^{\cdot}+\mathscr{A}\mathbf{u}]\odot\mathbf{u})(T)-2(\mathbf{f}\odot\mathbf{u})(T)+([\mathscr{B}\mathbf{u})(0)-2(\mathscr{B}\mathbf{u}_0)(0)]\cdot\mathbf{u})(T) \tag{1.16}$$

于是在$\mathscr{K}$上

$$\delta\dot{\mathscr{F}}(\mathbf{u})=0 \tag{1.17}$$

当且仅当$\mathbf{u}\in\mathscr{K}$在I上满足方程组(1.7)和初始条件(1.8)。

还可写出其它相应的定理，从略。

由于本文的主题是要处理具有算子系数的方程组的初值一边值问题，所以在下面还需要对于卷积向量和卷积向量点积再加以定义。

1977 年 D. Ieșan[4]把 Hlaváček 提出的卷积数积概念推广研究了非局部弹性动力学的互易定理和变分原理问题。这里仍采用对比方式明确卷积向量和卷积向量点积的概念。

令g是由下式定义在$[0,\infty)$上的函数：

$$g(t)=t,\qquad t\in[0,\infty) \tag{1.18}$$

令V是边界为Σ的弹性固体所占据的空间的正则区域。

卷积和卷积数积

设f是定义在$[0,\infty)$上的函数，u和v是定义在$\bar{V}\times[0,\infty)$上的函数。

定义 I※　函数

$$(f*u)(x,t)=\int_0^t f(t-\tau)u(x,\tau)d\tau$$

称为函数f与函数u的卷积。

函数

$$(u*v)(x,t)=\int_0^t u(x,t-\tau)v(x,\tau)d\tau$$

称为函数u和函数v的卷积。

在研究非局部弹性动力学有关问题时，定义下列函数为函数u和函数v的卷积数积：

$$(u*v)=\int_V(u*v)dx$$

卷积向量和卷积向量点积

设f是定义在$[0,\infty)$上的函数，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是定义在$\bar{V}\times[0,\infty)$上的函数向量。

定义 4　函数向量

$$[f\times\boldsymbol{u}](x,t)=\int_0^t f(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{1.19}$$

称为函数f和函数向量$\boldsymbol{u}$的卷积向量。

函数

$$\{\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}\}(x,t)=\int_0^t(\boldsymbol{u}(x,t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(x,\tau))d\tau \tag{1.20}$$

称为函数向量$\boldsymbol{u}$和函数向量$\boldsymbol{v}$的卷积向量点积。

在研究非局部微极弹性动力学有关问题时，定义下列函数为函数向量$\boldsymbol{u}$和函数向量$\boldsymbol{v}$的卷积向量点积：

$$[\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}]=\int_V\{\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}\}dx \tag{1.21}$$

※　本文把[4]中的定义加以字母 I，以示区别。

显然，根据卷积向量和卷积向量点积的定义，可列出以后要用到的下列性质：

$$[\mathbf{u}\odot\mathbf{v}]=[\mathbf{v}\odot\mathbf{u}] \tag{1.22}$$

$$[\mathbf{u}\odot(\mathbf{v}+\mathbf{w})]=[\mathbf{u}\odot\mathbf{v}]+\mathbf{u}\odot\mathbf{w}] \tag{1.23}$$

$$(f*\{\mathbf{u}\odot\mathbf{v}\})=\{(f\times\mathbf{u})\odot\mathbf{v}\} \tag{1.24}$$

$$[\mathbf{u}\odot\mathbf{v}]_{,i}=[\mathbf{u}_{,i}\odot\mathbf{v}]+[\mathbf{u}\odot\mathbf{v}_{,i}] \tag{1.25}$$

二、互　易　定　理

众所周知，互易定理是弹性理论中的一个基本定理。有关经典弹性理论中的互易定理问题，M. E. Gurtin[5]和A. C. Eringen和E. S. Şuhubi[6]曾给出系统的总结和阐述。

1965年N. Sandru[7]应用Laplace变换导出了各向同性微极弹性固体的互易定理。1967年，M. F. Beatty[8]证明了非均匀各向异性弹性物质的线性力偶应力理论的互易定理。1969年，Ieşan[9]利用卷积理论给出了均匀的各向异性微极弹性固体的互易定理。1977年他把Hlaváček的卷积数积概念用来给出非局部线性弹性动力学的互易定理。

在非局部极性场论方面，特别是，Eringen, D. G. B Edelen[10]等学者做了许多的研究工作并已取得不少的成果，这可以看做是良好的开端。

本文的这一部份证明了有关非局部微极线性弹性动力学的两种基本型式的互易定理。这些互易定理是以“一”中的卷积向量和卷积向量点积概念为基础对上述已知的各种互易定理的推广并把它们都做为特殊情形包括在内。

为简明起见，在对V和Σ的积分号内略去卷积和卷积向量点积的细圆括弧和细花括弧是不会引起误会的。由于非局部剩余对于整个物体体积的积分为零，故按此法时可不把它们写出。

1．基本关系式及初始条件和边界条件

下面列出非局部微极线性弹性固体的基本关系式及初始条件和边界条件。这里引用下列符号：u_i和φ_i分别为位移向量和微转动向量的分量；e_{ij}和μ_{ij}分别为应变和微应变张量的分量；t_{ij}和m_{ij}分别为应力张量和力偶应力张量的分量；F_i和M_i分别为物体力和物体力偶分量；ρ为质量密度；a_{ijkl}, b_{ijkl}, c_{ijkl}, p_{ijkl}, q_{ijkl}, r_{ijkl}和I_{ij}为物质特征常数；$\bar{a}_{ijkl}$, $\bar{b}_{ijkl}$, $\bar{c}_{ijkl}$, $\bar{p}_{ijkl}$, $\bar{q}_{ijkl}$, $\bar{r}_{ijkl}$为物质的非局部特征常数；ϵ_{ijk}为交替张量。

运动学关系

$$\begin{Bmatrix} e_{ij} \\ \mu_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}_{,i} - \epsilon_{ijk} \begin{Bmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

或简写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d} \tag{2.1$'$}$$

其中

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

运动方程组

$$\begin{Bmatrix} t_{ji} \\ m_{ji} \end{Bmatrix}_{,j} + \epsilon_{ijk} \begin{Bmatrix} 0 \\ t_{jk} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & I_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{\varphi}_j \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

或简写为

$$\boldsymbol{\sigma}_{,j}+\epsilon_{ijk}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}=\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} \tag{2.2'}$$

本构关系

$$\begin{Bmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} a_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{a}_{ijkl}(\;)dy & b_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{b}_{ijkl}(\;)dy \\ \hline b_{klij}(\;)+\int_V \bar{b}_{klij}(\;)dy & c_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{c}_{ijkl}(\;)dy \end{array}\right]\begin{Bmatrix} e_{kl} \\ \mu_{kl} \end{Bmatrix}$$

$$=\left(\left[\begin{array}{c|c} a_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{a}_{ijkl}(\;)dy & 0 \\ \hline 0 & c_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{c}_{ijkl}(\;)dy \end{array}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\begin{array}{c|c} 0 & b_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{b}_{ijkl}(\;)dy \\ \hline b_{klij}(\;)+\int_V \bar{b}_{klij}(\;)dy & 0 \end{array}\right]\right)\begin{Bmatrix} e_{kl} \\ \mu_{kl} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

或简写为

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathscr{E}\;\boldsymbol{\varepsilon}=(\mathscr{A}+\mathscr{B})\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3'}$$

或

$$\begin{Bmatrix} e_{ij} \\ \mu_{ij} \end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} p_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{p}_{ijkl}(\;)dy & q_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{q}_{ijkl}(\;)dy \\ \hline q_{klij}(\;)+\int_V \bar{q}_{klij}(\;)dy & r_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{r}_{ijkl}(\;)dy \end{array}\right]\begin{Bmatrix} t_{kl} \\ m_{kl} \end{Bmatrix}$$

$$=\left(\left[\begin{array}{c|c} p_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{p}_{ijkl}(\;)dy & 0 \\ \hline 0 & r_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{r}_{ijkl}(\;)dy \end{array}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\begin{array}{c|c} 0 & q_{ijkl}(\;)+\int_V \bar{q}_{ijkl}(\;)dy \\ \hline q_{klij}(\;)+\int_V \bar{q}_{klij}(\;)dy & 0 \end{array}\right]\right)\begin{Bmatrix} t_{kl} \\ m_{kl} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

或简写成

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathscr{F}\boldsymbol{\sigma}=(\mathscr{P}+\mathscr{Q})\boldsymbol{\sigma} \tag{2.4'}$$

在刚度算子矩阵$\mathscr{E}$和柔度算子矩阵$\mathscr{F}$的元素的表示中具有下列对称关系:

$$\begin{aligned} a_{ijkl}&=a_{jikl}=a_{klij}, \quad \bar{a}_{ijkl}=\bar{a}_{jikl}=\bar{a}_{klij} \\ c_{ijkl}&=c_{jikl}=c_{klij}, \quad \bar{c}_{ijkl}=\bar{c}_{jikl}=\bar{c}_{klij} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} p_{ijkl}&=p_{jikl}=p_{klij}, \quad \bar{p}_{ijkl}=\bar{p}_{jikl}=\bar{p}_{klij} \\ r_{ijkl}&=r_{jikl}=r_{klij}, \quad \bar{r}_{ijkl}=\bar{r}_{jikl}=\bar{r}_{klij} \end{aligned} \tag{2.6}$$

初始条件

$$\begin{Bmatrix} u_i(x,0) \\ \varphi_i(x,0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a_i \\ c_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_i(x,0) \\ \dot{\varphi}_i(x,0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_i \\ d_i \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

或简写为

$$\mathbf{d}(0)=\mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{d}}(0)=\dot{\mathbf{d}}_0 \tag{2.7'}$$

边界条件

在$\Sigma_1\times[0,\infty)$上，$u_i=\bar{u}_i$

在$\Sigma_3\times[0,\infty)$上，$\varphi_i=\overline{\varphi_i}$

在$\Sigma_2\times[0,\infty)$上，$t_i=t_{ji}n_j=\overline{t_i}$ (2,8)

在$\Sigma_4\times[0,\infty)$上，$m_i=m_{ji}n_j=\bar{m}_i$

或简写为

$$\overline{\mathbf{d}_1}=\left\{\begin{matrix}\bar{u}_i\\0\end{matrix}\right\},\ \overline{\mathbf{d}_3}=\left\{\begin{matrix}0\\\overline{\varphi_i}\end{matrix}\right\},\ \overline{\mathbf{t}_2}=\left\{\begin{matrix}\overline{t_i}\\0\end{matrix}\right\},\ \overline{\mathbf{t}_4}=\left\{\begin{matrix}0\\\bar{m}_i\end{matrix}\right\} \tag{2.8'}$$

这里，$\Sigma_1+\Sigma_2=\Sigma_3+\Sigma_4=\Sigma$，$\Sigma_1\cap\Sigma_2=\Sigma_3\cap\Sigma_4=\phi$.

令f_i和g_i是由下式定义在$\bar{V}\times[0,\infty)$上的函数

$$\left\{\begin{matrix}f_i\\g_i\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}g*F_i\\g*M_i\end{matrix}\right\}+\begin{bmatrix}\rho & 0\\0 & I_{ij}\end{bmatrix}\left(\left\{\begin{matrix}a_i\\c_i\end{matrix}\right\}+t\left\{\begin{matrix}b\\d_i\end{matrix}\right\}\right) \tag{2.9}$$

或简写为

$$\mathbf{b}=[g\times\mathbf{f}]+\mathbf{M}(\mathbf{d}_0+t\,\dot{\mathbf{d}}_0) \tag{2.9'}$$

2. 辅助定理

定理3 令$\mathbf{d}\in C^{0,2}$，$\boldsymbol{\sigma}\in C^{2,0}$※，则$\mathbf{d}$和$\boldsymbol{\sigma}$满足运动方程组(2.2′)和初始条件(2.7′)，当且仅当在$V\times[0,\infty)$上下式成立：

$$[g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+\mathbf{b}=\mathbf{M}\mathbf{d} \tag{2.10}$$

证明：进行$[g\times(2.2')]$的运算，即

$$[g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+[g\times\mathbf{f}]=[g\times\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}] \tag{2.11}$$

然而

$$\begin{aligned}[g\times\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}]&=\int_0^t(t-\tau)\,\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(\tau)d\tau\\&=\mathbf{M}\mathbf{d}-\mathbf{M}(\mathbf{d}_0+t\,\dot{\mathbf{d}}_0)\\&=\mathbf{M}\mathbf{d}+[g\times\mathbf{f}]-\mathbf{b}\end{aligned} \tag{2.12}$$

由(2.11)和(2.12)即得(2.10). 证毕

系1 令$\mathbf{S}=\{\mathbf{d},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}\}$是一容许状态。$\mathbf{S}$是混合问题的一个解，当且仅当它满足关系式(2.1′)，(2.3′)，(2.10)和边界条件(2.8′)。

定义5 所谓与混合问题对应的应力向量场意指应力向量$\boldsymbol{\sigma}$具有性质：存在位移和应变向量$\mathbf{d}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$，使$\{\mathbf{d},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}\}$是混合问题的一个解。

定理4 令$\boldsymbol{\sigma}\in C^{2,0}$，则$\boldsymbol{\sigma}$是与混合问题对应的应力向量场，当且仅当

在$V\times[0,\infty)$上

$$\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,k}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+\mathbf{b})_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,r}]+\epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+\mathbf{b})=\mathscr{F}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.13}$$

其中

※ 符号意义同[11].

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\rho^{-1} & 0\\ 0 & J_{jk}\end{bmatrix},\quad I_{ij}=J_{jk}=\delta_{ik}$$

在$\Sigma_1\times[0,\infty)$和$\Sigma_3\times[0,\infty)$上

$$\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}]+\epsilon_{krs}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+\mathbf{b})=\overline{\mathbf{d}}_1+\overline{\mathbf{d}}_3 \tag{2.14}$$

和在$\Sigma_2\times[0,\infty)$和$\Sigma_4\times[0,\infty)$上

$$\mathbf{t}=\overline{\mathbf{t}}_2+\overline{\mathbf{t}}_4 \tag{2.15}$$

证明：假定$\boldsymbol{\sigma}$满足(2.13)，(2.14)和(2.15)。由(2.10)定义$\mathbf{d}$，用(2.4′)定义$\boldsymbol{\varepsilon}$，则(2.13)，(2.14)和(2.15)显然包含着运动学关系(2.1′)和边界条件(2.8′)。反之，(2.1′)，(2.4′)，(2.8′)和(2.10)包含着(2.13)，(2.14)和(2.15)。 证毕

3. 位移型互易定理

我们把以位移向量表示的互易定理称为位移型互易定理。

设所研究的非局部微极线性弹性固体承受两种不同的荷载系统

$$\mathbf{L}^{(\alpha)}=\{\mathbf{f}^{(\alpha)},\ \overline{\mathbf{d}}^{(\alpha)},\ \overline{\mathbf{t}}^{(\alpha)},\mathbf{d}_0,\ \dot{\mathbf{d}}_0\} \tag{2.16}$$

和两种相应的状态

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}=\{\mathbf{d}^{(\alpha)},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)},\ \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}\},\quad \alpha=1,2 \tag{2.17}$$

引用符号

$$\mathbf{b}^{(\alpha)}=[g\times\mathbf{f}^{(\alpha)}]+\mathbf{M}(\mathbf{d}_0+t\dot{\mathbf{d}}_0) \tag{2.18}$$

$$\mathbf{t}^{(\alpha)}=\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}n_j \tag{2.19}$$

位移型互易定理Ⅰ 如果一个非局部微极线性弹性固体承受两种不同的荷载系统$\mathbf{L}^{(\alpha)}$，则在相应的状态之间存在下列互易关系：

$$\begin{aligned}&\int_V \mathbf{b}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_{\Sigma_1} g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\overline{\mathbf{d}}_1^{(2)}dx+\int_{\Sigma_3} g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\overline{\mathbf{d}}_3^{(2)}dx\\&+\int_{\Sigma_2} g*\overline{\mathbf{t}}_2^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_{\Sigma_4} g*\overline{\mathbf{t}}_4^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx=\int_V \mathbf{b}^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx+\int_{\Sigma_1} g*\mathbf{t}^{(2)}\odot\overline{\mathbf{d}}^{(1)}dx\\&+\int_{\Sigma_3} g*\mathbf{t}^{(2)}\odot\overline{\mathbf{d}}^{(1)}dx+\int_{\Sigma_2} g*\overline{\mathbf{t}}_2^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx+\int_{\Sigma_4} g*\overline{\mathbf{t}}_4^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx\end{aligned} \tag{2.20}$$

证明：由(1.22)，(2,3′)和(2.5)可知

$$\{\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\}=\{\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\} \tag{2.21}$$

直接检验可知

$$\{\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\}=\{\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\} \tag{2.22}$$

把(2.21)和(2.22)相加，考虑到(1.23)和(2.3′)，则得

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\}=\{\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\} \tag{2.23}$$

引用符号

$$G_{\alpha\beta}=\int_V g*\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)}dx \tag{2.24}$$

则由(2.23)知

$$G_{12}=G_{21} \tag{2.25}$$

于是

$$G_{12}\overset{(2.1')}{=}\int_V g*\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\odot(\mathbf{d}_{,j}^{(2)}-\epsilon_{jik}\mathbf{R}\mathbf{d}^{(2)})dx$$

$$=\int_\Sigma g*\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\odot n_j\mathbf{d}^{(2)}\ dx-\int_V g*\boldsymbol{\sigma}_{,j}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx-\epsilon_{jik}\int_V g*\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\odot\mathbf{R}\mathbf{d}^{(2)}dx$$

$$\overset{(2.19)}{=}\int_\Sigma g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx-\int_V([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}^{(1)}]+\epsilon_{jik}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}^{(1)}])\odot\mathbf{d}^{(2)}dx$$

$$\overset{(2.10)}{=}\int_\Sigma g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_V\mathbf{b}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx-\int_V\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx\qquad(2.26)$$

由(2.25)和(2.26)，则得(2.20).　证毕

这个位移型互易定理便是对Ieşan[9]中的定理4.1和[4]中的定理3.2的推广。

还可以证明下述力学意义更为明确的互易定理。

位移型互易定理Ⅱ　如果一个非局部微极线性弹性固体承受两种不同的荷载系统$\mathbf{B}^{(\alpha)}=\{\mathbf{f}^{(\alpha)},\overline{\mathbf{d}}^{(\alpha)},\ \overline{\mathbf{t}}^{(\alpha)},\ \ddot{\mathbf{d}}\}$，则在相应的状态之间存在下列互易关系：

$$\int_V g*\mathbf{f}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx-\int_V g*\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_{\Sigma_1}g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\overline{\mathbf{d}}_1^{(2)}dx+\int_{\Sigma_3}g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\overline{\mathbf{d}}_3^{(2)}dx$$

$$+\int_{\Sigma_2}g*\overline{\mathbf{t}}_2^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_{\Sigma_4}g*\overline{\mathbf{t}}_4^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx=\int_V g*\mathbf{f}^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx-\int_V g*\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx$$

$$+\int_{\Sigma_1}g*\mathbf{t}^{(2)}\odot\mathbf{d}_1^{(1)}dx+\int_{\Sigma_3}g*\mathbf{t}^{(2)}\odot\mathbf{d}_3^{(1)}dx+\int_{\Sigma_2}g*\mathbf{t}_2^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx+\int_{\Sigma_4}g*\mathbf{t}_4^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}dx\ (2.27)$$

证明：把

$$\mathbf{b}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}\overset{(2.12)}{=}[g\times\mathbf{f}]-[g\times\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}]$$

代入(2.26)，则由(2.25)即得(2.27).　证毕

若令微转动φ与宏观运动的转动一致，则微极理论即变为力偶应力理论[12]。与此对应的(2.27)即变为非局部力偶应力理论的互易定理，它把[8]的结果做为特殊情形包括在内。

4.　应力型互易定理

我们把以应力表示的互易定理称为应力型互易定理。

应力型互易定理Ⅰ　如果一个非局部微极线性弹性固体承受两种不同的荷载系统，则下列互易关系成立：

$$\int_V(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,j}^{(1)}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(1)})\odot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}dx+\int_\Sigma\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}^{(1)}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}^{(1)}])\odot\mathbf{t}^{(2)}dx$$

$$=\int_V(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,j}^{(2)}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(2)})\odot\boldsymbol{\sigma}^{(1)}dx+\int_\Sigma\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}^{(2)}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}^{(2)}])\odot\mathbf{t}^{(1)}dx$$

$$(2.28)$$

证明：与(2.27)的证明类似，从略。

在边界条件(2.14)和(2.15)下，则由(2.28)可写出下列互易关系：

$$\int_V (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,j}{}^{(1)} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(1)})\odot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}dx + \int_{\Sigma_{1,3}} (\overline{\mathbf{d}}_1{}^{(1)} + \overline{\mathbf{d}}_3{}^{(1)} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(1)})\odot\mathbf{t}^{(2)}\,dx$$

$$+\int_{\Sigma_{2,4}} \mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}{}^{(1)}] + \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}^{(1)}])\odot(\overline{\mathbf{t}}_2{}^{(2)} + \overline{\mathbf{t}}_4{}^{(2)})dx = \int_V (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,j}^{(2)}$$

$$-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(2)})\odot\boldsymbol{\sigma}^{(1)}dx + \int_{\Sigma_{1,3}} (\overline{\mathbf{d}}_1{}^{(2)} + \overline{\mathbf{d}}_3{}^{(2)} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(2)})\odot\mathbf{t}^{(1)}\,dx$$

$$+\int_{\Sigma_{2,4}} \mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}{}^{(2)}] + \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}^{(2)}])\odot(\overline{\mathbf{t}}_2{}^{(1)} + \overline{\mathbf{t}}_4{}^{(1)})dx \tag{2.29}$$

这里给出的应力型互易定理把[4]中的定理3.6做为特殊情形包括在内。

三、变 分 原 理

力学中变分原理的研究已有很久的历史，而且在近些年来它在连续介质力学中取得很大的进展。最近，钱伟长对经典弹性理论中的变分原理做了系统的全面的阐述和研究[13]。1964年M. E. Gurtin[11]提出的经典弹性动力学的变分原理是以卷积形式给出的，这是一个重要的发展。我们把这种变分原理称为Gurtin型的。

关于非经典弹性介质理论的变分原理的研究是从1969年开始的。例如I. & M. Hlaváček [14]给出了力偶应力理论中的胡海昌—鹫津久一郎型和Hellinger—Reissner型的变分原理；Ieşan在[9]和[4]中分别给出了微极弹性理论和非局部弹性动力学的变分原理。在上述Ieşan的研究中，他利用卷积和Hlaváček提出的卷积数积概念把Gurtin型变分原理推广到非经典弹性理论中来，但是他并没有给全与Gurtin变分原理对应的全部形式。实际上，Gurtin给出了四种主要型式的变分原理，为简明起见，我们分别称为位移型的、应力型的、位能型的和余能型的变分原理。

本文的这一部份，我们利用在“一”和“二”中给出的卷积向量和卷积向量点积的概念与结果和钱伟长在1964年提出的Lagrange乘子法对非局部微极弹性介质给出了与Gurtin四种主要型式的变分原理全部对应的变分原理。我们给出的这四种型式的变分原理把迄今线性弹性介质理论中的所有相应的变分原理都做为特殊情形包括在内。最后证明完全的位能型和余能型广义变分原理的等价性，这是钱伟长在1964年提出等价性原理的直接推广。

1. 位移型变分原理

把用位移向量表示的变分原理称为位移型变分原理。

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &\overset{(2.10)}{=} \mathbf{M}\mathbf{d} - [\mathbf{g}\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}] - \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}] \\ &\overset{(2.1')}{=} \mathbf{M}\mathbf{d} - [g\times(\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d}))_{,j}] \\ &\quad - \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i} - \epsilon_{irs}\mathbf{R}\mathbf{d})]\end{aligned} \tag{3.1}$$

把上式写成具有算子系数的方程组的矩阵形式，即

$$\mathscr{H}\mathbf{d} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

于是问题归结为

$$\begin{aligned}&\text{在}V\times[0,\infty)\text{内} && \mathscr{H}\mathbf{d} = \mathbf{b} \\ &\text{在}\Sigma_{1,3}\times[0,\infty)\text{上} && \mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}_1 + \bar{\mathbf{d}}_3\end{aligned} \tag{3.3}$$

在$\Sigma_{2,4}\times[0,\infty)$上 $\quad \mathbf{t}=\bar{\mathbf{t}}_2+\bar{\mathbf{t}}_4$ (3.4)

由位移型互易定理Ⅰ知

$$\int_V(\mathscr{H}\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}-\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathscr{H}^{(2)})dx=\int_\Sigma g*(\mathbf{t}^{(2)}\odot\mathbf{d}^{(1)}-\mathbf{t}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)})dx \tag{3.5}$$

由(2.10)和散度定理可得

$$[\mathscr{H}\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}]=\int_V\mathbf{M}\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx+\int_V g*\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\odot\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}dx$$
$$-\int_\Sigma g*\mathbf{t}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}dx \tag{3.6}$$

在齐次边界条件下，由(3,6)可得

$$[\mathscr{H}\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathbf{d}^{(2)}]=[\mathbf{d}^{(1)}\odot\mathscr{H}\mathbf{d}^{(2)}] \tag{3.7}$$

于是根据定理1，可写出下列

位移型变分原理Ⅰ 定义泛函

$$\Pi_{\mathrm{I}}(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}\,dx-\int_V\mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.8}$$

或

$$\Pi_{\mathrm{I}}(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V[g*\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{irs}\mathbf{R}\mathbf{d})]\odot\mathbf{d}_{,j}\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_V g*\mathbf{R}^T\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{irs}\mathbf{R}\mathbf{d})\odot\mathbf{d}\,dx-\int_V\mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.9}$$

令$\mathbf{k}_d\subset\mathbf{D}_d$是满足齐次边界条件的所有位移向量场的集合，则在$\mathbf{K}_d$上

$$\delta\Pi_{\mathrm{I}}(\mathbf{d})=0 \tag{3.10}$$

当且仅当$\mathbf{d}\in\mathbf{K}_d$满足平衡方程组和初始条件。

下面给出非齐次边界条件的

位移型变分原理Ⅱ 定义泛函

$$\Pi_{\mathrm{II}}(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V[g*\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{irs}\mathbf{R}\mathbf{d})]\odot\mathbf{d}_{,j}\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_V g*\mathbf{R}^T\mathscr{E}(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{irs}\mathbf{R}\mathbf{d})\odot\mathbf{d}\,dx-\int_V\mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx$$
$$-\int_{\Sigma_2}g*\bar{\mathbf{t}}_2\odot\mathbf{d}\,dx-\int_{\Sigma_4}g*\bar{\mathbf{t}}_4\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.11}$$

于是令$\mathbf{N}_d\subset\mathbf{D}_d$是满足位移边界条件的所有位移向量场的集合，则在$\mathbf{N}_d$上

$$\delta\Pi_{\mathrm{II}}(\mathbf{d})=0 \tag{3.12}$$

当且仅当$\mathbf{d}\in\mathbf{N}_d$是混合问题的一个解。

这便是与Gurtin[11]定理5.1对应的位移型变分原理。

下面由位移型变分原理Ⅱ出发，给出相应的广义变分原理。

设$\boldsymbol{\mu}$为待定的Lagrange乘子向量，于是根据(3.11)导出广义位移型变分原理的泛函为

$$\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\int_{V}\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_{V}g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}\,dx$$

$$-\int_{V}\mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx-\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\mathbf{d}\,dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot\boldsymbol{\mu}\,dx \quad (3.13)$$

把$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\mathbf{d}$和$\boldsymbol{\mu}$都当做独立变量进行变分，当$\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})$达到驻值时．有$\delta\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=0$，即

$$\delta\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=\int_{V}(\mathbf{M}\mathbf{d}-\mathbf{b})\odot\delta\mathbf{d}\,dx+\int_{V}g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dx$$

$$-\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\delta\mathbf{d}\,dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot\delta\boldsymbol{\mu}\,dx$$

$$+\int_{\Sigma_{1,3}}g*\boldsymbol{\mu}\odot\delta\mathbf{d}\,dx=0 \quad (3.14)$$

把

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\delta\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\delta\mathbf{d} \quad (3.15)$$

代入（3.14）并利用散度定理，则

$$\delta\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=\int_{V}(\mathbf{M}\mathbf{d}-[g\times\boldsymbol{\sigma}_{,i}]-\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^{T}\boldsymbol{\sigma}]-\mathbf{b})\odot\delta\mathbf{d}dx+\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\delta\mathbf{d}\,dx+$$

$$\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot\delta\boldsymbol{\mu}dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*\boldsymbol{\mu}\odot\delta\mathbf{d}dx+\int_{\Sigma}g*\mathbf{t}\odot\delta\mathbf{d}\,dx=0 \quad (3.16)$$

于是

在$V\times[0,\infty)$内 $\mathbf{M}\mathbf{d}-\mathbf{b}-[g\times\boldsymbol{\sigma}_{,i}]-\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^{T}\boldsymbol{\sigma}]=0$ (2.10)

在$\Sigma_{1,3}\times[0,\infty)$上 $\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}}=0$，$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{t}$ (3.17)

在$\Sigma_{2,4}\times[0,\infty)$上 $\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}}=0$ (3.18)

由（3.17）得知$\boldsymbol{\mu}$所代表的物理量。因此可得下列

广义位移型变分原理 **定义泛函**

$$\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=\frac{1}{2}\int_{V}\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_{V}g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}\,dx-\int_{V}\mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot\mathbf{t}dx$$

$$-\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\mathbf{d}\,dx \quad (3.19)$$

于是有

$$\delta\Pi_{\mathrm{II}}^{*}(\mathbf{d})=0 \quad (3.20)$$

2. **应力型变分原理**

把用应力向量表示的变分原理称为应力型变分原理。

引用符号并注意(2.13)：

$$L_{\alpha\beta}=\int_{V}\mathscr{F}\boldsymbol{\sigma}\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx \quad (3.21)$$

$$\mathbf{k}=\int_{V}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\,dx \quad (3.22)$$

和

$$\mathscr{L}\sigma=\mathscr{T}\sigma-\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_k]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma]),_i+\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_r]+\epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\sigma]) \tag{3.23}$$

于是动力边值问题归结为求解

$$\mathscr{L}\sigma=\mathbf{k} \tag{3.24}$$

和边界条件

$$\sigma n_j=\overline{\mathbf{t}} \tag{3.25}$$

于是由应力型互易定理(2.28)有

$$\int_V(\mathscr{L}\sigma^{(1)}\odot\sigma^{(2)}-\sigma^{(1)}\odot\mathscr{L}\sigma^{(2)})\,dx=\int_{\Sigma_{2,4}}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_j^{(2)}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma^{(2)}])\odot\overline{\mathbf{t}}^{(1)}dx$$

$$-\int_{\Sigma_{2,4}}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_j^{(1)}]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma^{(1)}])\odot\overline{\mathbf{t}}^{(2)}dx \tag{3.26}$$

在齐次边界条件时

$$[\mathscr{L}\sigma^{(1)}\odot\sigma^{(2)}]=[\sigma^{(1)}\odot\mathscr{L}\sigma^{(2)}] \tag{3.27}$$

由(3.23)并利用散度定理可得

$$\int_V\mathscr{L}\sigma\odot\sigma\,dx=\int_V\mathscr{T}\sigma\odot\sigma\,dx+\int_V\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_k]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma,_i\,dx$$

$$+\epsilon_{ijk}\int_V\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_r]+\epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma\,dx$$

$$-\int_\Sigma\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_k]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\mathbf{t}\,dx \tag{3.28}$$

由定理 1 可写出下列

应力型变分原理 I　定义泛函

$$\Pi_{\mathrm{I}}(\sigma)=\frac{1}{2}\int_V\mathscr{T}\sigma\odot\sigma\,dx+\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_k]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma,_i\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_V\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_r]+\epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma\,dx$$

$$-\int_V(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b},_i-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\odot\sigma\,dx \tag{3.29}$$

令$\mathbf{K}_\sigma\subset\mathbf{D}_\sigma$是所有应力场的集合，则在$\mathbf{K}_\sigma$上

$$\delta\Pi_{\mathrm{I}}(\sigma)=0 \tag{3.30}$$

当且仅当$\sigma\in\mathbf{K}_\sigma$满足平衡方程组和外力边界条件。

在非齐次边界条件下，可写出下列

应力型变分原理 II　定义泛函

$$\Pi_{\mathrm{II}}(\sigma)=\frac{1}{2}\int_V\mathscr{T}\sigma\odot\sigma\,dx+\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_k]+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma,_i\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_V\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\sigma,_r]+\epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\sigma])\odot\sigma\,dx-\int_V(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b},_i$$

$$-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\odot\sigma\,dx-\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\overline{\mathbf{d}}-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\odot\mathbf{t}\,dx \tag{3.31}$$

于是$\mathbf{N}_\sigma \subset \mathbf{D}_\sigma$是满足应力边界条件的所有应力向量场的集合，则在$\mathbf{N}_\sigma$上

$$\delta \Pi_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{3.32}$$

当且仅当$\sigma \in \mathbf{N}_\sigma$是混合问题的一个解。

利用Lagrange乘子法，进行与推导广义位移型变分原理类似的运算即得下列

广义应力型变分原理　定义下列泛函

$$\begin{aligned}\Pi^*_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma}) = & \frac{1}{2}\int_V \mathscr{F}\boldsymbol{\sigma}\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,k}] + \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}])\odot\boldsymbol{\sigma}_{,i}\,dx \\ & + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int_V \mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,r}] + \epsilon_{lrs}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}])\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx \\ & - \int_V (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_{,i} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\Sigma_{1,3}} g*(\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})\odot\mathbf{t}\,dx \\ & + \int_{\Sigma_{2,4}} \mathbf{M}^{-1}([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,j}] + \epsilon_{irs}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}])\odot(\mathbf{t} - \mathbf{t})\,dx\end{aligned} \tag{3.33}$$

于是有

$$\delta \Pi^*_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{3.34}$$

此即与Gurtin[11]定理6.1对应的广义应力型变分原理，它把Ie,an[9]定理 5.2 做为特殊情形包括在内。

3．位能型变分原理

把与最小位能原理有关的变分原理简称为位能型变分原理。

为节省篇幅，下面直接推导完全的广义位能型变分原理。

设$\boldsymbol{\lambda}$和$\boldsymbol{\mu}$为待定的 Lagrange 乘子向量，于是导出完全的位能型变分原理的泛函为

$$\begin{aligned}\Pi^*(e) = & \frac{1}{2}\int_V \mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx + \frac{1}{2}\int_V g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}\,dx - \int_V \mathbf{b}\odot\mathbf{d}\,dx \\ & - \int_{\Sigma_{2,4}} g*\mathbf{t}\odot\mathbf{d}\,dx + \int_V g*[\boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{d}_{,i} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d})]\odot\boldsymbol{\lambda}\,dx \\ & + \int_{\Sigma_{1,3}} g*(\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})\odot\boldsymbol{\mu}\,dx\end{aligned} \tag{3.35}$$

把$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\mathbf{d}$、$\boldsymbol{\lambda}$和$\boldsymbol{\mu}$都当做独立变量向量进行变分，当$\Pi^*(e)$达到驻值时，有$\delta\Pi^*(e) = 0$，即

$$\begin{aligned}\delta\Pi^*(e) = & \int_V g*(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\lambda})\odot\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dx + \int_V g*[\boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{d}_{,i} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d})]\odot\delta\boldsymbol{\lambda}\,dx \\ & + \int_V (\mathbf{M}\mathbf{d} - \mathbf{b} + [g\times\boldsymbol{\lambda}_{,i}] + \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\lambda}])\odot\delta\mathbf{d}\,dx - \int_\Sigma g*\boldsymbol{\lambda}n_i\odot\delta\mathbf{d}\,dx \\ & - \int_{\Sigma_{1,3}} g*(\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})\odot\delta\boldsymbol{\mu}\,dx + \int_{\Sigma_{1,3}} g*\boldsymbol{\mu}\odot\delta\mathbf{d}\,dx - \int_{\Sigma_{2,4}} g*\bar{\mathbf{t}}\odot\delta\mathbf{d}\,dx = 0\end{aligned} \tag{3.36}$$

于是

在$V\times[0,\infty)$内　　$\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\sigma} = 0$，$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}_{,i} - \epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d}$.

$$\mathbf{M}\mathbf{d} - \mathbf{b} - [g\times\boldsymbol{\lambda}_{,i}] - \epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\lambda}] = 0 \tag{3.37}$$

在$\Sigma_{1,3}\times[0,\infty)$上 $\quad \mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}}=0,\quad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda} n_i$ (3.38)

在$\Sigma_{2,4}\times[0,\infty)$上 $\quad \boldsymbol{\lambda} n_i\neq \bar{\mathbf{t}}=0$ (3.39)

$(3.37)_2$ 和 $(3.38)_1$ 为原来的变分条件，$(3.37)_1$ 和 $(3.38)_2$ 给出了 Lagrange 乘子向量所代表的物理量，即

在$V\times[0,\infty)$内 $\quad \boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{\sigma}$ (3.40)

在$\Sigma_{1,3}\times[0,\infty)$上 $\quad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda} n_i=-\boldsymbol{\sigma} n_i=-\mathbf{t}$ (3.41)

把(3.40)代入$(3.37)_3$ 即得平衡方程组(2.10)，把(3.40)代入(3.39)即得外力边界条件。于是把(3.40)和(3.41)代入(3.35)，则得下列

完全的广义位能型变分原理 I 满足(2.1′)，(2.3′)，(2.10)，(2.7′)和(2.8′)诸关系的状态{d，ε，σ}的解必使下述泛函$\Pi_{\mathrm{I}}^*(e)$为驻值

$$\Pi_{\mathrm{I}}^*(e)=\frac{1}{2}\int_V[(\mathbf{M}\mathbf{d}-2\mathbf{b})\odot\mathbf{d}+g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}-2g*(\boldsymbol{\varepsilon}-(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d}))\odot\boldsymbol{\sigma}]dx$$
$$-\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot t\,dx-\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.42}$$

此即分别与Gurtin[11]定理4.2和Hlavácĕk[14]公式(5.3) 对应的非局部微极线性弹性动力学中的胡海昌—鹫津久一郎型的广义变分原理。

由于

$$\int_V g*(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R})\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx=\int_\Sigma g*\mathbf{d}\odot\mathbf{t}\,dx-\int_V g*(\boldsymbol{\sigma}_{,i}+\epsilon_{ijk}\mathbf{R}^T\mathbf{d})\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.43}$$

故由(3.42)可写出另一种等价形式的

完全的广义位能型变分原理 II 满足(2.1′)，(2.3′)，(2.10)，(2.7′)和(2.8′)诸关系的状态{d,ε,σ}的解必使下述泛函$\Pi_{\mathrm{II}}^*(e)$为驻值

$$\Pi_{\mathrm{II}}^*(e)=\frac{1}{2}\int_V[(\mathbf{M}\mathbf{d}-2\mathbf{b}-2[g\times(\boldsymbol{\sigma}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}^T\mathbf{d})])\odot\mathbf{d}+g*\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$-2g*\boldsymbol{\sigma}\odot\boldsymbol{\varepsilon}]dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*\bar{\mathbf{d}}\odot\mathbf{t}\,dx+\int_{\Sigma_{2,4}}g*(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.44}$$

这个变分原理已把Ieşan[9]定理5.1做为特殊情形包括在内。

4. 余能型变分原理

把与最小余能原理有关的变分原理称为余能型变分原理。

利用Lagrange乘子法，进行与推导完全的广义位能型变分原理类似的运算即得下列

完全的广义余能型变分原理 I 满足(2.1′)，(2.3′)，(2.10)，(2.7′)和 (2.8′) 诸关系的{σ,ε,d}的解，必使下述泛函$\Pi_{\mathrm{I}}^*(c)$为驻值

$$\Pi_{\mathrm{I}}^*(c)=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{M}\mathbf{d}\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V g*\mathscr{F}\boldsymbol{\sigma}\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx+\int_V([g\times\boldsymbol{\sigma}_{,i}]$$
$$+\epsilon_{ijk}[g\times\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}]+\mathbf{b}-\mathbf{M}\mathbf{d})\odot\mathbf{d}dx-\int_{\Sigma_{1,3}}g*\bar{\mathbf{d}}\odot\mathbf{t}\,dx$$

$$-\int_{\Sigma_{2,4}}(\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}})\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.45}$$

此即与Gurtin[11]定理4.1对应的非局部微极线性弹性动力学中的Hellinger－Reissner型的广义变分原理。

由于

$$\int_V[g\times\boldsymbol{\sigma}_{,i}]\odot\mathbf{d}\,dx=\int_\Sigma g*\mathbf{t}\odot\mathbf{d}\,dx-\int_V[g\times\boldsymbol{\sigma}]\odot\mathbf{d}_{,i}\,dx \tag{3.46}$$

故由(3.45)可写出另一种等价形式的

完全的广义余能型变分原理Ⅱ　满足(2.1′)，(2.3′)，(2.10)，(2.7′)和(2.8′)诸关系的状态{σ，ε，d}的解必使下述泛函$\Pi_{\text{II}}^*(c)$为驻值

$$\Pi_{\text{II}}^*(c)=-\frac{1}{2}\int_V(\mathbf{M}\mathbf{d}-2\mathbf{b})\odot\mathbf{d}\,dx+\frac{1}{2}\int_V g*\mathscr{F}\boldsymbol{\sigma}\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx$$

$$-\int_V g*\boldsymbol{\varepsilon}\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx+\int_{\Sigma_{1,3}}g*(\mathbf{d}-\bar{\mathbf{d}})\odot\mathbf{t}\,dx+\int_{\Sigma_{2,4}}g*\bar{\mathbf{t}}\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.47}$$

这个变分原理把Hlaváček[14]公式(5.4)做为特殊情形包括在内。

上面给出了非局部微极线性弹性介质理论中的四种主要型式的变分原理。还可以给出与[13]对应的各种不完全的变分原理，这里从略。

5. 等价性原理

等价性原理　非局部微极线性弹性介质理论中的完全的广义位能型和余能型变分原理是等价的。

证明：由(3.42)和(3.45)得

$$\Pi_{\text{I}}^*(e)+\Pi_{\text{I}}^*(c)=\int_V g*(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d})\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx+\int_V[g\times(\boldsymbol{\sigma}_{,i}$$

$$+\epsilon_{ijk}\mathbf{R}^T\mathbf{d})]\odot\mathbf{d}\,dx-\int_{\Sigma_{1,3}}g*\mathbf{d}\odot\mathbf{t}\,dx-\int_{\Sigma_{2,4}}g*\mathbf{t}\odot\mathbf{d}\,dx \tag{3.48}$$

考虑到卷积向量点积性质(1.25)和(1.24)，则

$$\int_V g*(\mathbf{d}_{,i}-\epsilon_{ijk}\mathbf{R}\mathbf{d})\odot\boldsymbol{\sigma}\,dx+\int_V[g\times(\boldsymbol{\sigma}_{,i}+\epsilon_{ijk}\mathbf{R}^T\mathbf{d})]\odot\mathbf{d}\,dx$$

$$=\int_V g*(\mathbf{d}\odot\boldsymbol{\sigma})_{,i}dx=\int_\Sigma g*\mathbf{d}\odot\mathbf{t}\,dx \tag{3.49}$$

这就证明了

$$\Pi_{\text{I}}^*(e)=-\Pi_{\text{I}}^*(c) \tag{3.50}$$

证毕

钱伟长在1964年就证明了经典弹性理论中的胡海昌—鹫津久一郎型和Hellinger—Reissner型两种变分原理的等价性，我们把它推广到了非局部微极线性弹性介质理论中。

参 考 文 献

1. Hlaváček, I., Aplikace Matematiky 1, 16 (1971).
2. Hlaváček, I., Aplikace Matematiky 1, 16 (1971).
3. Hlaváček, I., Aplikace Matematiky 2, 16 (1971).
4. Ieşan, D., *IJES*, 15 (1977) 693—699.
5. Gurtin, M. E., The Linear Theory of Elasticity, in "Handbuch d. Physik", Bd. VI a/2, (1972).
6. Eringen, A. C. and Şuhubi, E. S., Elastodynamics I, (1975).
7. Sandru, N., *Atti Accad. Lincei*, 37 (1965).
8. Beatty, M. E., *Acta Mech.*, 3 (1967).
9. Ieşan, D., *IJES*, 7 (1969), 1213—1220.
10. Continuum Physics IV, Ed. by A. C. Eringen, (1976).
11. Gurtin, M. E., *ARMA*, 16 (1964).
12. Eringen, A. C., Mechanics of micromorphic continua, in "Mechanics of Generalized Continua" (E. Kröner, ed.), (1968).
13. 钱伟长, 力学与实践, 1和2 (1979).
14. Hlaváček, I. & M., *Apl Mat.* 5, 14 (1969).

Various Reciprocal Theorems and Variational Principles in the Theories of Nonlocal Micropolar Linear Elastic Mediums

Tai Tien-min

(South-West university of communication)

Abstract

In the first part of our paper, we have extended the concepts of the classical convolution and the "convolution scalar product" given by I. Hlaváček and presented the concepts of the "convolution vector" and the "convolution vector scalar product", which enable us to extend the initial value as well as the initial-boundary value problems for the equation with the operator coefficients to those for the system of equations with the operator coefficients.

In the second part of this paper, based on the concepts of the convolution vector and the convolution vector scalar product, two fundamental types of reciprocal theorems of the nonlocal micropolar linear elastodynamics for inhomogeneous and anisotropic solids are derived.

In the third part of this paper, based on the concepts and results in the first and second parts as well the Lagrange multipliers method which is presented by W. Z. Chien, four main types of variational principles are given for the nonlocal micropolar linear elastodynamics for inhomogeneous and anisotropic solids These are the counterparts of the variational principles of Hu-Washizu type, Hellinger-Reissner type and Gurtin type in classical elasticity as well as Hlaváček type and le an type in local micropolar and nonlocal elasticity. Finally, we have proved the equivalence of the last two main variational principles which are given in this paper.