应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

# 轴对称问题的积分方程的迭代解法

云天铨 （华中工学院）

(1979年11月8日收到)

**摘 要**

将集度分别为x(ξ)和y(ξ)的集中力和挤压中心沿物体外弹性空间z轴分布，并迭加应力为常数项的解，就能使轴对称应力问题归结为两个联立的一维Fredholm第一种积分方程．本文研究此类方程的迭代解法．给出与E．Rakotch收缩映射定理等价的引理和迭代收敛证明．

## 一、概 述

迭加法是线性弹性理论常用的一个方法．早在1885年，J．Boussinesq就成功地用迭加法解决著名的半平面上受垂直的集中力问题[1]，他用两个基本解组合，即Kelvin的集中力作用于弹性空间内原点以及沿$z$轴$[0,-\infty)$均匀分布的挤压中心，便求出该问题的解答．1936年，R．D．Mindlin[2]用六种基本解的组合求得半空间内受集中力作用这一个重要问题的解．然而，包括上述，至今仍只有少数轴对称问题才求得其解答．J．Boussinesq和R．D．Mindlin的方法，只能适合于特定的情形，而未能推广至较一般的给定的边界条件的问题．这是因为他们使用的基本载荷都按特定的集度分布，未能适应各种不同的给定边界．

要使所用的方法能较广泛地适应于不同的给定的边界条件，我们需要将基本载荷的集度取为未知的，待由边界条件定的函数．于是，所讨论的弹性力学问题归结为解积分方程．

P．K．Banerjee[3]最近指出：对于表面面积与体积之比例较低的问题，积分方程法常常较有限元法更经济省力地获得更精确的解答．他采用Kelvin的解为基本解，将Kelvin的集中力视为虚载荷，虚分布于物体的边界面上，令满足问题的边界条件，便导出二维的，奇异的联立的第一种积分方程，可以解决任意给定形状的三维弹性力学问题．

不过，对于轴对称应力问题（即边界条件为给定的轴对称的应力）倒不必将虚载荷直接分布于真实的边界面上，而是将基本解的载荷沿物体外的对称轴分布，这样导出的积分方程将是一维的，非奇异的Fredholm第一种联立的积分方程，其数值解将较二维，奇异的积分方程组简单得多．本文就是采用此种方法．

迭代法是解决复杂的代数方程，微分方程，积分方程等等的一个有力的方法．本文讨论迭代法解联立的Fredholm第一种积分方程．根据不动点理论（Fixed Point Theory），本文给出一个与E．Rokotch收缩映射定理等价的引理，基于此引理，证明本文的迭代算法收敛．在第四，五节讨论联立积分方程有解的条件和常数c的选择，并给定利用本文分析的一个例子．

## 二、积分方程的推导

设所研究的回转体 $\rho=\rho(z)$ 在 $z$ 轴[0，∞)内．我们于弹性全空间的 $\xi=-z$ 轴上的[0，∞)区间分布集度为 $x(\xi)$ 的集中力、集度为 $y(\xi)$ 的挤压中心．此外，再迭加简单压缩解．下面，我们来迭加这些解答．

1．集度为 $x(\xi)$ 的集中力沿 $\xi$ 轴的[0，∞)内分布．当不计体积力时，弹性全空间内任意点 $N(\rho,\theta,z)$ 的应力为[1]：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho&=K\int_0^\infty[(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}-3\rho^2(z+\xi)r_\xi^{-5}]x(\xi)d\xi\\
\sigma_\theta&=K\int_0^\infty(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}x(\xi)d\xi\\
\sigma z&=-K\int_0^\infty[(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}+3(z+\xi)^3r_\xi^{-5}]x(\xi)d\xi\\
\tau_{\rho z}&=-K\int_0^\infty[(1-2\nu)\rho r_\xi^{-3}+3\rho(z+\xi)^2r_\xi^{-5}]x(\xi)d\xi\\
\tau_{\rho\theta}&=\tau_{\theta z}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

式中：$(\rho,\theta,z)$为柱座标．

$K=[8\pi(1-\nu)]^{-1}$

$r_\xi=[\rho^2+(z+\xi)^2]^{1/2}$

$\nu$为泊桑比．

2．集度为 $y(\xi)$ 的挤压中心沿 $\xi=-z$ 轴的[0，∞)上分布．当不计体积力时，弹性全空间内任意点 $N(\rho,\theta,z)$ 的应力为[1]：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho&=K_1\int_0^\infty[\rho^2-(z+\xi)^2/2]r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi\\
\sigma_\theta&=-(K_1/2)\int_0^\infty r_\xi^{-3}y(\xi)d\xi\\
\sigma_z&=K_1\int_0^\infty[(z+\xi)^2-\rho^2/2]r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi\\
\tau_{\rho z}&=(3K_1/2)\int_0^\infty\rho(z+\xi)r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi\\
\tau_{\theta z}&=\tau_{\rho\theta}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

式中 $K_1$ 为常数．

3．柱体简单压缩的解．

简单压缩解是：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\rho=\sigma_\theta=\tau_{\rho z}=\tau_{\theta z}=\tau_{\rho\theta}=0\\&\sigma_z=-KC\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

式中$C$为常数.

这个解答(2.3)式可以用一个沿$z$轴的集中力$C$和一个挤压中心，作用在$\xi\to\infty$处，其大小分别为$C\xi^2/2(1+\nu)$和$\xi^3KC(1-2\nu)/K_1(1+\nu)$，则弹性空间内任意点$N(\rho,\ \theta,\ z)$的应力由(2.1)，(2.2)式求得如(2.3)式示.

4．以上三种载荷共同作用.任意点$N(\rho,\ \theta,\ z)$的应力为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho=&K\int_0^\infty[(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}-3\rho^2(z+\xi)r_\xi^{-5}]\,x(\xi)d\xi+K_1\int_0^\infty[\rho^2-(z\\&+\xi)^2/2]r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi\\\sigma_\theta=&K\int_0^\infty(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}x(\xi)d\xi-(K_1/2)\int_0^\infty r_\xi^{-3}y(\xi)d\xi\\\sigma_z=&-K\int_0^\infty[(1-2\nu)(z+\xi)r_\xi^{-3}+3(z+\xi)^3r_\xi^{-5}]x(\xi)d\xi+K_1\int_0^\infty[(z+\xi)^2\\&-\rho^2/2]r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi-KC\\\tau_{\rho z}=&-K\int_0^\infty[(1-2\nu)\rho r_\xi^{-3}+3\rho(z+\xi)^2]r_\xi^{-5}x(\xi)d\xi+(3K_1/2)\int_0^\infty\rho(z\\&+\xi)r_\xi^{-5}y(\xi)d\xi\\\tau_{\rho\theta}=&\tau_{\theta z}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

5．应力边界条件

本文讨论在回转体$\rho=\rho(z)$的表面上的载荷是给定的这类应力边界问题．以回转体顶端受集中力的问题为例，除顶点外，在$\rho=\rho(z)$的回转面上的应力为零．于是由平衡方程求得在边界上要满足：

$$\sigma_\rho=\tau_{\rho z}\cdot d\rho/dz=\tau_{\rho z}\cdot\rho'\tag{2.5}$$

$$\tau_{\rho z}=\sigma_z\cdot d\rho/dz=\sigma_z\cdot\rho'\tag{2.6}$$

将(2.4)式代入边界条件(2.5)式和(2.6)式，分别得：

$$A_1x=B_1y\tag{2.7}$$

$$A_2x=B_2y+f\tag{2.8}$$

其中算子$A_1$，$A_2$，$B_1$，$B_2$分别为积分方程的核算子．

$$\left.\begin{aligned}&A_1(z;\ \xi)=(1-2\nu)[(z+\xi)+\rho'\rho]r_\xi^{-3}-3\rho(z+\xi)[\rho-\rho'(z+\xi)]r_\xi^{-5}\\&A_2(z;\ \xi)=[\rho'(z+\xi)-\rho][(1-2\nu)r_\xi^{-3}+3(z+\xi)^2r_\xi^{-5}]\\&B_1(z;\ \xi)=[3\rho'\rho(z+\xi)/2-\rho^2+(z+\xi)^2/2](K_1/K)r_\xi^{-5}\\&B_2(z;\ \xi)=\{[(z+\xi)^2-\rho^2/2]\rho'-3\rho(z+\xi)/2\}(K_1/K)r_\xi^{-5}\\&f(z)=-c\,\rho'\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

(2.9)式中的核$A_1$，$A_2$，$B_1$，$B_2$，函数$f$均为已知的；$\rho$和$\rho'$分别用回转体的边界方程$\rho=\rho(z)$及其斜率代入．积分方程(2.7)式和(2.8)式中未知函数是$x(\xi)$和$y(\xi)$．

当未知函数$x(\xi)$和$y(\xi)$求出后，应力按(2.4)式计算．最后由回转体任一截面的平衡方程决定载荷与式中常数的关系．

## 三、迭代法解联立积分方程

从一给定的$y$(或$x$)开始，令它反复满足积分方程(2.7)式和(2.8)式，直至收敛，则所得结果将同时满足(2.7)式和(2.8)式．具体过程如下：

将(2.7)，(2.8)式改写为：

$$A_1x=\tilde{y} \tag{3.1}$$

$$\tilde{y}=B_1y \tag{3.2}$$

$$B_2y=\tilde{x} \tag{3.3}$$

$$\tilde{x}=A_2x-f \tag{3.4}$$

**算 法 (A)**

第1步：给定$y^i$，由(3.2)式求出$\tilde{y}_i$．

第2步：解(3.1)式，求出$x^i$．

第3步：由(3.4)式求出$\tilde{x}_i$．

第4步：解(3.3)式，求出$y^{i+1}$．

第5步：若$\|y^{i+1}-y^i\|\leqslant\delta$(给定值)，停止；否则，以$y^{i+1}$代$y^i$转入第1步．

以上的算法得到的序列$\{y^i\}$，若总有：

$$\|y^{i+1}-y^i\|<\|y^i-y^{i-1}\|,\ \forall i \tag{3.5}$$

则必收敛．反之，若发现：

$$\|y^{i+1}-y^i\|>\|y^i-y^{i-1}\|,\ \forall i \tag{3.6}$$

则掉转来．即按算法$B$计算

**算 法 (B)**

第1步：给定$y^i$，由(3.3)式求出$\tilde{x}_i$．

第2步：解(3.4)式，求出$x^i$．

第3步：由(3.1)式，求出$\tilde{y}_i$．

第4步：解(3.3)式，求出$y^{i+1}$．

第5步：同算法($A$)的第5步．

算法($A$)和($B$)的收敛证明都是一样的．下面，我们给出迭代算法($A$)收敛的证明．

## 四、迭代算法的收敛证明

定点理论(Fixed Point Theory)对迭代算法收敛证明有重要的意义．通常在定点理论中讨论的映射是不因点的位置而变化．但在此以及在许多数学、力学等问题中（如结构优化等）迭代计算的公式并不一定在每次迭代计算中都相同．这种因点的位置不同而用不同公式计算就相当于变化的映射问题．在此，结合本问题，将已有定点理论的结果用于变化映射，我们给出下面的引理和定理．

**引理1**． 设$f_{\alpha(x)}(x)$是完备的测度空间$(X,\ d)$上的变化自映射，若

$$d(f_{\alpha(x)}(x),\ f_{\alpha(y)}(y))<d(x,\ y),\ x,\ y\in X \tag{4.1}$$

则 $f_{\alpha(\cdot)}(\cdot)$有唯一的定点$\hat{x}$，且$\{f^n_{\alpha(x)}(x)\}$强收敛于$\hat{x}$，对所有的$x\in X$.

**证明**：首先把变化的自映射视为通常的自映射 设$T$为同一测度空间上的自映射.

令
$$T(\cdot)=\begin{cases}f_{\alpha(x)}(x), & \cdot=x\\ f_{\alpha(y)}(y), & \cdot=y\end{cases}$$

则$d(f_{\alpha(x)}(x),\ f_{\alpha(y)}(y))=d(T(x),\ T(y))$，$\exists\varepsilon(d(x,y))>0$，将(4.1)式写成：

$$d(f_{\alpha(x)}(x),\ f_{\alpha(y)}(y))=d(x,\ y)-\varepsilon(d(x,\ y))$$
$$\leqslant d(x,\ y)-\frac{1}{n}\varepsilon(d(x,\ y)),\ (n\geqslant 1) \tag{4.2}$$

令
$$\alpha_j d(x,\ y)=d\ (x,\ y)-\frac{1}{n}\varepsilon(d(x,\ y))$$

则
$$0<\alpha_j=\alpha_j\ (d(x,\ y))=1-\frac{\varepsilon(d(x,\ y))}{nd(x,\ y)}<1$$，于是(4.2)式写成：

$$d(T(x),\ T(y))\leqslant\alpha_j(d(x,\ y))d(x,\ y),\quad 0<\alpha_j<1 \tag{4.3}$$

式中$\alpha_j(d(x,\ y)$表示第$j$次映射距离收缩的比值，它是距离$d(x,\ y)$的函数，若令

$$\alpha_{mi}(d(x,\ y))=\max\{\alpha_j\},\quad j=1,\ 2,\ \cdots i.$$

则(4.3)式可写成：

$$d(T(x),\ T(y))\leqslant\alpha_{mi}(d(x,\ y))d(x,\ y),\quad 0<\alpha_{mi}<1, \tag{4.4}$$

式中$\alpha_{mi}$为一随迭代次数$i$而渐增的，但又总小于1的函数.(4.4)式即E. Rakotch[4]定理的条件，据此定理，$T$(即$f_\alpha$)有唯一的定点$\hat{x}$，且$\{T^n(x)\}$(即$\{f^n_{\alpha(x)}(x)\}$)强收敛于$\hat{x}$，对所有$x\in X$

以上证明了引理1和E. Rakotch定理是等价的. 下面，再证明迭代算法收敛.

**定理1** 设联立积分方程(2.7)，(2.8)有唯一解$\hat{x}$，$\hat{y}$. 若迭代算法$(A)$得到的序列$\{y^i\}$满足(3.5)式，即

$$\|y^{i+1}-y^i\|<\|y^i-y^{i-1}\|,\ \forall i$$

则
$$\lim_{n\to\infty}y^n=\hat{y},\quad \lim_{n\to\infty}x^n=\hat{x}$$

**证明**：(一) 若给出真值$\hat{y}$进行迭代.

按假设，此时Fredholm第一种积分方程$A_1x=B_1\hat{y}$有唯一解$\hat{x}$，

$$\hat{x}=(A_1^*A_1)^{-1}A_1^*(B_1\hat{y})=U_0(\hat{y}) \tag{4.5}$$

式中$A_1^*$是$A_1$的伴随算子. 解$\hat{x}$可用迭代法逼近[6].

同样，当$\hat{x}$求出后，Fredholm第一种积分方程$B_2y=A_2\hat{x}-f$有唯一解$\hat{y}$.

$$\hat{y}=(B_2{}^*B_2)^{-1}B_2{}^*\ (A_2\hat{x}-f)=V_0(\hat{x}) \tag{4.6}$$

式中$B_2{}^*$是$B_2$的伴随算子。

(4.5)式代入(4.6)式，得：

$$\hat{y}=V_0(U_0(\hat{y}))=f_0(\hat{y}) \tag{4.7}$$

即$\hat{y}$是$f_0$的定点.

(二) 若给出偏离真值$\hat{y}$为$\delta y$的初值$y^0=\hat{y}+\delta y$进行迭代.

此时Fredholm第一种积分方程$A_1x=B_1y^0$是病态的 在此，我们采用K Miller[6]的在最小二乘原理意义下的解，即：

$$x^0=(A_1{}^*A_1+\alpha^2L^*L)^{-1}A_1{}^*\ (B_1y^0) \tag{4.8}$$

式中$\alpha^2=\varepsilon/\beta$；$L$是另外预先给定的讯息的一个算子．设$x$是满足下列二不等式的解：

$$\|A_1x-(B_1y^0)\|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$
$$\|Lx\|\leqslant\beta<\infty$$

其中$\varepsilon$，$\beta$，$L$是已知的．

K. Miller考虑使

$$\|A_1x-(B_1y^0)\|^2+\alpha^2\|Lx\|^2=min \tag{4.9}$$

便给出最小解$x^0$如(4.8)式所示．

将(4.8)式记为：

$$x^0=U_\alpha(y^0) \tag{4.10}$$

若我们取$L=I$（单位算子）[7,p,183]，则此时算子$U_\alpha(y^0)=(A_1{}^*A_1+\alpha^2)^{-1}A_1{}^*\ (B_1y^0)$．

同样，偏离真值$\hat{x}$为$\delta x$的$x^0$值进行迭代，积分方程$B_2y=A_2x^0-f$的解$y^1$为：

$$y^1=V_{\alpha_1}(x^0)=(B_2{}^*B_2+\alpha_1^2)^{-1}B_2{}^*(A_2x^0-f) \tag{4.11}$$

将(4.10)式代入(4.11)式，得：

$$y^1=V_{\alpha_1}(U_\alpha(y^0))=f_\alpha(y^0) \tag{4.12}$$

算子$f_\alpha(y^0)=(B_2{}^*B_2+\alpha_1^2)^{-1}B_2{}^*(A_2(A_1{}^*A_1+\alpha^2)^{-1}A_1{}^*(B_1y^0)-f)$与$y^0$有关（$\alpha$值），是一个在迭代过程中变化的算子．

重复迭代，得：

$$y^{i+1}=f_{\alpha(y^i)}\ (y^i) \tag{4.13}$$

今(3.5)式成立，即

$$\|y^{i+1}-y^i\|=\|f_{\alpha(y^i)}\ (y^i)-f_{\alpha(y^{i-1})}\ (y^{i-1})\|<\|y^i-y^{i-1}\|,\quad \forall_i \tag{4.14}$$

据引理1，$\{y^{i+1}\}$强收敛于$\hat{y}$，$\{x^{i+1}\}$强收敛于$\hat{x}$，对所有$y^0\in H$

（证完）

## 五、联立积分方程(2.7)，(2.8)有解的条件及常数C的讨论

若(2.7)，(2.8)式有解$\hat{x}$，$\hat{y}$，则有：

$$\hat{x}=(A_1{}^*A_1)^{-1}A_1{}^*(B_1\hat{y})=(A_2{}^*A_2)^{-1}A_2{}^*\ (B_2\hat{y}+f)$$

即 $$((A_1{}^*A_1)^{-1}A_1{}^*B-(A_2{}^*A_2)^{-1}A_2{}^*B_2)\ \hat{y}=(A_2{}^*A_2)^{-1}A_2{}^*f$$

或简写为： $$A\hat{y}=F. \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{式中核算子}\quad A=(A_1{}^*A_1)^{-1}A_1{}^*B_1-(A_2{}^*A_2)^{-1}A_2{}^*B_2\\&\text{函数}\quad F=(A_2{}^*A_2)^{-1}A_2{}^*f\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Fredholm 第一种积分方程（5.1）有解的条件是满足 E. Picard 条件[5]，即：

$$\left.\begin{aligned}&1.\quad (F,\ u)=0，\text{对所有}u，\text{使}A^*u=0\\&2.\quad \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|(F,\ \Psi_i)|^2<\infty\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

式中$\{\Psi_i\}$是相应核$AA^*$的特征函数系统；$\lambda_i^2$是特征值，满足积分方程$\Psi_i=\lambda_i^2AA^*\Psi_i$．

(5.3)式是积分方程(5.1)，也就是积分方程(2.8)，(2.9)有解的条件．

同样分析，也有：

$$\hat{y}=(B_1{}^*B_1)^{-1}B_1{}^*(A_1\hat{x})=(B_2{}^*B_2)^{-1}B_2{}^*(A_2\hat{x}-f)$$

即 $$B\hat{x}=G \tag{5.4}$$

式中核算子 $B=(B_1^*B_1)^{-1}B_1^*A_1-(B_2^*B_2)^{-1}B_2^*A_2$

函数 $G=-(B_2^*B_2)^{-1}B_2^*f$ (5.5)

积分方程(5.4)有解的条件是：

$$\left.\begin{array}{l}1.\quad (G,\ u)=0\text{，对所有}u\text{，使 }B^*u=0\\ 2.\quad \sum\limits_{i=1}^{\infty}\theta_i^2|(G,\ \varphi_i)|^2<\infty\end{array}\right\}\tag{5.6}$$

式中$\{\varphi_i\}$是相应核$BB^*$的特征函数系统；$\theta_i^2$是特征值，满足积分方程$\varphi_i=\theta_i^2BB^*\varphi_i$.

(5.6)式是积分方程(5.4)，也就是积分方程(2.7)，(2.8)有解的条件.

所以，积分方程(2.7)，(2.8)要有解，应满足(5.3)式和(5.6)式.

至于(2.9)式中常数$C$的选择问题，若取$C=0$，即$f=0$. 此时积分方程(5.1)和(5.4)都变成齐次型：

$$A\hat{y}=0\tag{5.7}$$

$$B\hat{x}=0\tag{5.8}$$

如果积分方程(5.7)，(5.8)有非零解$\hat{y}$和$\hat{x}$，则不是唯一的. 乘上任意常数$a_i$后，$a_1\hat{y}$和$a_2\hat{x}$也是解. 下面，我们利用这一性质，给出利用一个问题的已知解推导出另一个问题的解的例子.

因为通常给定回转体的边界条件后，积分方程(5.7)和(5.8)不一定有非零解.所以我们宁愿取$C\neq 0$，使(5.7)，(5.8)变成(5.1)和(5.4)式. 当然，Fredholm 第一种积分方程也不一定有解，但我们可以采用解病态问题的方法来处理，比起没有常数项$C$的齐次型更灵活.

至于常数$C$（$\neq 0$）的大小，由迴转体截面的平衡条件定出.

## 六、例　　子

J. Boussinesq 给出半平面上受集中载荷$P$作用的解[1]，此解他是将在全空间中原点受集中力作用的解和在$z=0$到$z=-\infty$轴上分布等集度的挤压中心的解迭加而得. 原点上的集中力$\underline{B}$和挤压中心集度$\underline{A_1}$的关系是$\underline{A_1}=2\underline{B}(1-2\nu)$. 集中力$\underline{B}$和载荷$P$的关系是由平衡条件求出$P=2\pi\underline{B}$.

此解是本文方法的一特殊情况. 即：

$$\left.\begin{array}{l}x(\xi)=\begin{cases}\underline{B_1},\ \xi=0, & \int_0^{\infty}x(\xi)d\xi=\underline{B}\\ 0,\ \xi\neq 0,\end{cases}\\ y(\xi)=\underline{A_1}=\text{const}\end{array}\right\}\tag{6.1}$$

J. Boussinesq并没有迭加简单压缩解. 即$C=0$. 按照上节分析，没有常数项$C$的积分方程(5.7)，(5.8)是齐次型的；如果有解$\hat{x}$和$\hat{y}$，也不是唯一的. 将$\hat{x}$和$\hat{y}$乘上常数，则$a_1\hat{x}$和$b_1\hat{y}$也将满足齐次积分方程. 亦即只要改变集中力$\underline{B_1}$和挤压中心集度$\underline{A_1}$的大小（而不改变其分布也一定能满足对应的积分方程.

现在，我们将挤压中心的集度$\underline{A_1}$乘上常数$a$，即令：

$$\left.\begin{array}{l}x(\xi)=\begin{cases}\underline{B_1},\ \xi=0, & \int_0^{\infty}x(\xi)d\xi=\underline{B}\\ 0,\ \xi=0,\end{cases}\\ y(\xi)=a\underline{A_1}=\text{const}.\end{array}\right\}\tag{6.2}$$

(6.2)式必然能满足积分方程(2.7)，(2.8)（在某迴转体 $\rho=\rho(z)$ 的边界上）．将(6.2)式代入(2.7)，(2.8)式，对于回转体的边界方程为 $\rho=a_1 z$（锥面），显然是满足(2.7)式和(2.8)式的．此时 $a\underline{A}_1$ 和 $\underline{B}$ 的关系是：

$$a\underline{A}_1=-2\underline{B}(1-2\nu)(1+\cos\phi) \tag{6.3}$$

式中 $\phi$ 是锥面母线与 $z$ 轴的夹角．$a_1=\operatorname{tg}\phi$．

迴转体内的应力由(2.5)式给出：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho&=\underline{B}\left\{(1-2\nu)\left[(1+\cos\phi)\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{z}{\rho^2 r}\right)-\cos\phi\cdot\frac{z}{r^3}\right]-3\frac{\rho^2 z}{r^5}\right\}\\
\sigma_\theta&=\underline{B}(1-2\nu)\left[\frac{z}{r^3}-(1+\cos\phi)\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{z}{\rho^2 r}\right)\right]\\
\sigma_z&=-\underline{B}\left[3\frac{z^3}{r^5}-(1-2\nu)\cos\phi\cdot\frac{z}{r^3}\right]\\
\tau_{\rho z}&=-\underline{B}\left[3\frac{\rho z^2}{r^5}-(1-2\nu)\cos\phi\cdot\frac{\rho}{r^3}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

由平衡方程求得迴转体顶端受集中载荷 $P$ 与全空间内原点受集中力 $\underline{B}$ 之间的关系是：

$$P=2\pi\underline{B}(1+2\nu\cos\phi+\cos^2\phi)(1-\cos\phi) \tag{6.5}$$

(6.4)式中 $r=(\rho^2+z^2)^{1/2}$

易见，J. Boussinesq 的半平面受集中载荷 $P$ 作用的解是(6.4)的特例($\phi=\pi/2$)．

## 七、结　论

1．给定迴转体边界应力条件的轴对称受力问题本法归结为解两个联立的 Fredholm 第一种积分方程．当满足(5.3)和(5.6)式时，这个联立的积分方程有解．

2．当联立的积分方程有唯一解时，满足（3.5）式，本文的迭代算法能强收敛于唯一解．

3．若积分方程没有解，用解病态问题的诸法（如[6、7]等）来处理．

4．宜取常数 $C\neq 0$．

## 参 考 文 献


1．钱伟长，叶开沅著，《弹性力学》，科学出版社，北京，(1956)

2．Mindlin, R. D., Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *J. physics*, 77, May, (1936), 195

3．Banerjee, P. K., Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape, *Int. J. Mech. Sci*, 18, (1976), 293—303.

4．Srinivasa Swaminathan, Fixed point Theory and its Applications, Academic press, (1976), 198.

5．云天铨，Fredholm 第一种积分方程 $Ax=y$ 的最速迭代解法，《华中工学院学报》，(1978)，第3期，94—98.

6．Franklin, J. L., Minimum principles for ill-posed problems, *SIAM J. Math.*

*Anal*., Vol. 9, №4, Aug (1978), 639—651.

7. Delves, L. M. and Walsh, J., Numerical Solution of integral equations, Clarendon press, (1974), 175—185.

# An Iteration Method for Integral Equations Arising from Axisymmetric Loading Problems

Yun Tain-quan

(Department of Mechanics, Huazhong Institute of Technology, Wuhan.)

## Abstract

Let the concentrated forces and the centers of pressure with unknown density functions $x(\xi)$ and $y(\xi)$ respectively be distributed along the $z$ axis outside the solid, then one can reduce an axisymmetric loading problem of solids of revolution to two simultaneous Fredholm integral equations. An iteration method for solving such equations is discussed. A lemma equivalent to E. Rakotch's contractive mapping theorem and a theorem concerning the convergent proof of the iteration method are presented.