弹性圆板在一侧受均载而四周固定的条件下不用Kirchhoff-Love假设的一级近似理论(Ⅱ)

钱伟长[1]

(1995年12月5日收到)

摘　要

本文在前文[1]所得的微分方程和有关边界条件的基础上，求得了这些方程在有关边界条件下的解析解。当然，为了节省计算工作量，我们进一步简化了一级近似理论，使它在保持合理的基础上，更加简单化了。

关键词　弹性力学　圆板　克希霍夫-拉夫假设　广义变分原理

六、一级近似理论的最简化假设及其方程系和边界条件

在上文[1]中，我们在一级近似理论中取近似假定为

$$e_z=A_0+A_1z,\quad e_{rz}=(h^2/4-z^2)(S_0+S_1z+S_2z^2) \tag{6.1a,b}$$

其中e_z，e_{rz}都已放弃了在板内恒等于零的Kirchhoff-Love假设[2],[3]，而且在(6.1b)中，因子$(h^2/4-z^2)$保证了上下表面上$e_{rz}=0$的板面不受剪力作用的要求。在本文中，我们将取更加简单的一级近似假定，即在放弃板内e_z，e_{rz}恒等于零的Kirchhoff-Love假设下，只保留(6.1a,b)中的首二项A_0，A_1；S_0，S_1。或都只保留一个对z对称的项A_0，S_0和一个对z反对称的项A_1，S_1。于是将采用下列一级近似假定

$$e_z=A_0+A_1z,\quad e_{rz}=(h^2/4-z^2)(S_0+S_1z) \tag{6.2a,b}$$

于是，位移的一级近似表达式不再是(3.4a,b)，而是

$$W(r,z)=w(r)+A_0z+A_1z^2/2 \tag{6.3a}$$

$$U(r,z)=u(r)-\frac{dw}{dr}z-\frac{1}{2}\frac{dA_0}{dr}z^2-\frac{1}{3}\frac{dA_1}{dr}z^3+2\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)zS_0+\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{2}\right)z^2S_1 \tag{6.3b}$$

于是我们的一级近似理论中，只有$w(r)$，$u(r)$，$A_0(r)$，$A_1(r)$，$S_0(r)$，$S_1(r)$等6个待定函数，通过和上文一样的推导，采用广义变分原理的变分驻值条件(3.9)，导出了6个微分方程，其中3个涉及$w(r)$，$A_1(r)$，$S_0(r)$：

1 上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072

$$\nabla^2\nabla^2 w-\nu_1\nabla^2 A_1+h^2\left[\frac{1}{40}\nabla^2\nabla^2 A_1-\frac{2}{5}\nabla^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_0)\right]=\frac{q}{D_1} \tag{6.4}$$

$$\nu_1\nabla^2 w-A_1-h^2\left[\frac{1}{40}\nabla^2\nabla^2 w-\frac{\nu_1}{20}\nabla^2 A_1+\frac{2}{5}\nu_1\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_0)\right]$$
$$-h^4\left[\frac{1}{1344}\nabla^2\nabla^2 A_1-\frac{1}{105}\nabla^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_0)\right]+\frac{qh^2}{8D_1}=0 \tag{6.5}$$

$$\frac{d}{dr}\nabla^2 w-\nu_1\frac{dA_1}{dr}+\frac{1}{42}h^2\frac{d}{dr}\nabla^2 A_1-\frac{17}{42}h^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_0)+2(1-\nu_1)S_0=0 \tag{6.6}$$

其中 $\nabla^2(\cdots)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}(\cdots)$

和上文[1]相比，(5.10)，(5.11)，(5.12)，(5.13) 中少了(5.12)式，其余各式中略去了有关S_2的各项.

还有涉及$u(r)$，A_0，S_1的3个微分方程

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)+\nu_1\frac{dA_0}{dr}-\frac{1}{24}h^2\frac{d}{dr}\nabla^2 A_0+\frac{7}{480}h^4\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_1)=0 \tag{6.7}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)+\nu_1\frac{dA_0}{dr}-\frac{1}{392}h^2\frac{d}{dr}\nabla^2 A_0-\frac{8}{49}h^2(1-\nu_1)S_0$$
$$+\frac{107}{4704}h^4\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_1)=0 \tag{6.8}$$

$$-\nu_1\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)+A_0+\frac{1}{24}h^2\left[\nabla^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)+2\nu_1\nabla^2 A_0\right]$$
$$-h^4\left[\frac{1}{320}\nabla^2\nabla^2 A_0+\frac{7}{480}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_1)\right]+\frac{9}{8960}h^4\left[\nabla^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_1)\right]-\frac{qh^2}{24D_1}=0 \tag{6.9}$$

它们和(5.14)，(5.15)，(5.16)，完全相同.

用上文[1]第四节相同的方法，我们导出下列边界条件：

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(a)}\ w(a)=0 & \text{(b)}\ w'(a)=-\dfrac{11}{168}\dfrac{qah^2}{(1-\nu_1)D_1} \\
\text{(c)}\ A_0(a)=0 & \text{(d)}\ A_0'(a)=0 \\
\text{(e)}\ A_1(a)=0 & \text{(f)}\ A_1'(a)=\dfrac{qa}{2(1-\nu_1)D_1} \\
\text{(g)}\ S_0(a)=-\dfrac{qa}{4(1-\nu_1)D_1} & \text{(h)}\ S_1(a)=0 \\
\text{(i)}\ u(a)=0 &
\end{array}\right\} \tag{6.10}$$

我们也必须指出，在圆板中心处($r=0$)，所有解都必须有限，即

$$w(0),\ u(0),\ A_0(0),\ A_1(0),\ S_0(0),\ S_1(0)=\text{有限} \tag{6.11}$$

七、w(r)，A₁(r)，S₀(r)的解析解

引进$\Omega(r)$，

$$S_0(r)=d\Omega/dr \tag{7.1}$$

于是，(6.4)式可以积分两次，(6.6)式可以以积分一次，在使用了(6.11)的中心条件以后，只剩下两个待定积分常量C_1和C_2，于是(6.4)，(6.5)，(6.6)可以化为

$$\nabla^2 w-\nu_1 A_1=\frac{qr^2}{4D_1}+C_1-h^2\left[\frac{1}{40}\nabla^2 A_1-\frac{2}{5}\nabla^2\Omega\right] \tag{7.2}$$

$$\nu_1\nabla^2 w-A_1=-\frac{qh^2}{8D_1}+h^2\left[\frac{1}{40}\nabla^2\nabla^2 w-\frac{\nu_1}{20}\nabla^2 A_1+\frac{2}{5}\nu_1\nabla^2\Omega\right]$$

$$+h^4\left[\frac{1}{1344}\nabla^2\nabla^2 A_1-\frac{1}{105}\nabla^2\nabla^2\Omega\right] \tag{7.3}$$

$$\nabla^2 w-\nu_1 A_1=C_2-\frac{1}{42}h^2\nabla^2 A_1+\frac{17}{42}h^2\nabla^2\Omega-2(1-\nu_1)\Omega \tag{7.4}$$

(7.2)和(7.4)相减，求得$\nabla^2 A_1$的表达式

$$\nabla^2 A_1=\frac{840}{h^2}(C_1-C_2)+210\frac{qr^2}{D_1h^2}-4\nabla^2\Omega+1680(1-\nu_1)\frac{1}{h^2}\Omega \tag{7.5}$$

把(7.5)中的$\nabla^2 A_1$表达式代入(7.2)或(7.4)式，整理后得

$$\nabla^2 w-\nu_1 A_1=-\frac{5qr^2}{D_1}-(20C_1-21C_2)-42(1-\nu_1)\Omega+\frac{1}{2}h^2\nabla^2\Omega \tag{7.6}$$

把(7.6)式中的$\nabla^2 w$表达式代入(7.3)的右则的$\nabla^2\nabla^2 w$，再用(7.5)中的$\nabla^2 A_1$表达式消去式中的$\nabla^2 A_1$和$\nabla^2\nabla^2 A_1$项，整理简化后给出$\nu_1\nabla^2 w-A_1$用Ω表示的表达式

$$\nu_1\nabla^2 w-A_1=-\frac{21}{4}\nu_1\frac{qr^2}{D_1}-21\nu_1(C_1-C_2)-42(1-\nu_1)\nu_1\Omega+\frac{h^2}{10}(2+3\nu_1)\nabla^2\Omega \tag{7.7}$$

从(7.6)和(7.7)中求解$\nabla^2 w$和A_1

$$\nabla^2 w=-\left(5-\frac{21}{4}\nu_1^2\right)\frac{qr^2}{D}-\frac{(20-21\nu_1^2)}{1-\nu_1^2}C_1+21C_2$$

$$-42(1-\nu_1)\Omega+\frac{5-2\nu_1-3\nu_1^2}{10(1-\nu_1^2)}h^2\nabla^2\Omega \tag{7.8}$$

$$A_1=\frac{\nu_1}{4}\frac{qr^2}{D}-\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_1-\frac{1}{5(1+\nu_1)}h^2\nabla^2\Omega \tag{7.9}$$

把(7.9)的A_1代入(7.5)式中的$\nabla^2 A_1$，整理后得

$$h^4\nabla^2\nabla^2\Omega-20(1-\nu_1)h^2\nabla^2\Omega+8400(1-\nu_1^2)\Omega$$

$$=5\nu_1(1+\nu_1)\frac{qh^2}{D}1050(1+\nu_1)(1-\nu_1^2)\frac{qr^2}{D}-4200(1+\nu_1)(C_1-C_2) \tag{7.10}$$

它的非齐次解为

$$\Omega^*=-\frac{1}{8}(1+\nu_1)\frac{qr^2}{D}-\frac{1}{1680}\frac{2+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{qh^2}{D}-\frac{1}{2(1-\nu_1)}(C_1-C_2) \tag{7.11}$$

设取齐次解的特解为

$$\Omega^{**}=RJ_0(\lambda r) \tag{7.12}$$

其中R，λ都是待定常数，$J_0(\lambda r)$为λr的零阶贝塞耳函数，它满足贝塞耳方程

$$\nabla^2 J_0(\lambda r)=-\lambda^2 J_0(\lambda r) \tag{7.13}$$

于是，把(7.12)式代入(7.10)式的齐次方程，得决定λh值的特征方程，

$$\lambda^4 h^4+20(1+\nu_1)h^2\lambda^2+8400(1-\nu_1^2)=0 \tag{7.14}$$

上述方程的根为

$$h^2\lambda^2=10(1+\nu_1)\{-1\pm i\sqrt{84[(1-\nu_1)/(1+\nu_1)]-1}\}$$
$$=\sqrt{84(1-\nu_1^2)}\exp[\pm i(\pi-\varphi)] \tag{7.15}$$

其中

$$\tan\varphi=\sqrt{84[(1-\nu_1)/(1+\nu_1)]-1} \tag{7.16}$$

于是，我们有

$$h\lambda=\pm h\lambda_1,\pm h\lambda_2 \tag{7.17}$$

称

$$\left.\begin{matrix}h\lambda_1=h\lambda\\ h\lambda_2=h\bar{\lambda}\end{matrix}\right\}=\{8400(1-\nu_1^2)\}^{\frac{1}{4}}\exp[\pm i(\pi-\varphi)/2] \tag{7.18}$$

λ和$\bar{\lambda}$是共轭的，于是(7.10)的一般解可以写成

$$\Omega(r)=-\frac{1}{8}(1+\nu_1)\frac{qr^2}{D}-\frac{1}{1680}\left(\frac{2+\nu_1}{1-\nu_1}\right)\frac{qh^2}{D}-\frac{1}{2(1-\nu_1)}(C_1-C_2)$$
$$+R_1J_0(\lambda r)+\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}r) \tag{7.19}$$

其中R_1，$\bar{R}_1$是待定的共轭复数，λ，$\bar{\lambda}$见(7.18)。

根据(7.1)，(7.9)，我们有

$$S_0(r)=-\frac{1}{4}(1+\nu_1)\frac{qr}{D}+R_1\frac{d}{dr}J_0(\lambda r)+\bar{R}_1\frac{d}{dr}J_0(\bar{\lambda}r) \tag{7.20}$$

$$A_1(r)=\frac{1}{4}\nu_1\frac{qr^2}{D}+\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_1+\frac{1}{10}\frac{qh^2}{D}-\frac{h^2\lambda^2}{5(1+\nu_1)}R_1J_0(\lambda r)$$
$$-\frac{h^2\bar{\lambda}^2}{5(1+\nu_1)}\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}r) \tag{7.21}$$

现在让我们用(6.10e,f,g)决定3个待定量C_1，R_1，$\bar{R}_1$，从(7.20)，(7.21)，得

$$R_1\lambda J_0'(\lambda a)+\bar{R}_1\bar{\lambda}J_0'(\bar{\lambda}a)=0 \tag{7.22}$$

$$\frac{1}{2}\nu_1\frac{qa}{D}-\frac{h^2}{5(1+\nu_1)}[\lambda^3R_1J_0'(\lambda a)+\bar{\lambda}^3\bar{R}_1J_0'(\bar{\lambda}a)]=\frac{1}{2}(1+\nu_1)\frac{qa}{D} \tag{7.23}$$

$$\frac{1}{4}\nu_1\frac{qa^2}{D}\ \frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_1+\frac{1}{10}\frac{qh^2}{D}-\frac{h^2}{5(1+\nu_1)}[\lambda^2R_1J_0(\lambda a)+\bar{\lambda}^2\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}a)]=0 \tag{7.24}$$

解之，其结果为

$$R_1=\frac{5qa}{2Dh^2}\ \frac{1+\nu_1}{\lambda(\bar{\lambda}^2-\lambda^2)J_0'(\lambda a)},\quad \bar{R}_1=\frac{5qa}{2Dh^2}\ \frac{1+\nu_1}{\bar{\lambda}(\lambda^2-\bar{\lambda}^2)J_0'(\bar{\lambda}a)} \tag{7.25a,b}$$

$$C_1=\frac{1-\nu_1^2}{\nu_1}\ \frac{qa^2}{D}\left\{\frac{1}{4}\nu_1+\frac{1}{10}\left[1-\frac{5}{(\bar{\lambda}^2-\lambda^2)h^2}\left(\frac{a\lambda J_0(\lambda a)}{J_0'(\lambda a)}-\frac{a\bar{\lambda}J_0(\bar{\lambda}a)}{J_0'(\bar{\lambda}a)}\right)\right]\frac{h^2}{a^2}\right\} \tag{7.25c}$$

这里可以看到R_1，$\bar{R}_1$的确是共轭的。而且也可以看到C_1是实数。

现在让我们求解$w(r)$，把(7.19)中的表达式代入(7.8)，在使用了(7.25a,b,c)以后，得

$$\nabla^2w=\frac{qr^2}{4D}+\frac{1}{40}(8+5\nu_1)\frac{qh^2}{D}+\frac{1}{1-\nu_1^2}C_1+42C_2-\left[42(1-\nu_1)\right.$$
$$\left.+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\lambda^2h^2\right]R_1J_0(\lambda r)-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\bar{\lambda}^2h^2\right]\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}r) \tag{7.26}$$

积分两次，在采用板的中心条件(6.11)后，得

$$w(r)=\frac{qr^4}{64D}+\frac{1}{160}(8+5\nu_1)\frac{qh^2}{D}r^2+\frac{1}{4(1-\nu_1^2)}C_1r^2+C_3+\frac{21}{2}C_2r^2+\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\lambda^2h^2\right]\frac{1}{\lambda^2}R_1J_0(\lambda r)+\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\bar{\lambda}^2h^2\right]\frac{1}{\bar{\lambda}^2}\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}r) \tag{7.27}$$

根据边界条件(6.10a)，我们有

$$C_3=-\frac{qa^4}{64D}-\frac{1}{160}(8+5\nu_1)\frac{qh^2}{D}a^2-\frac{1}{4(1-\nu_1^2)}C_1a^2-\frac{21}{2}C_2a^2-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\lambda^2h^2\right]\frac{1}{\lambda^2}R_1J_0(\lambda a)-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\bar{\lambda}^2h^2\right]\frac{1}{\bar{\lambda}^2}\bar{R}_1J_0(\bar{\lambda}a) \tag{7.28}$$

于是，$w(r)$应该是

$$w(r)=-\frac{q}{64D}(a^4-r^4)-\frac{1}{160}(8+5\nu_1)\frac{qh^2}{D}(a^2-r^2)-\frac{1}{4(1-\nu_1^2)}C_1(a^2-r^2)-\frac{21}{2}C_2(a^2-r^2)-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\lambda^2h^2\right]\frac{1}{\lambda^2}R_1[J_0(\lambda a)-J_0(\lambda r)]-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\bar{\lambda}^2h^2\right]\frac{1}{\bar{\lambda}^2}\bar{R}_1[J_0(\bar{\lambda}a)-J_0(\bar{\lambda}r)] \tag{7.29}$$

根据边界条件(6.10b)求得

$$21C_2=-\frac{qa^2}{16D}-\frac{1}{80}(8+5\nu_1)\frac{qh^2}{D}-\frac{11}{168}(1+\nu_1)\frac{qh^2}{D}-\frac{1}{2(1-\nu_1^2)}C_1-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\lambda^2h^2\right]\frac{1}{\lambda a}R_1J_0'(\lambda a)-\left[42(1-\nu_1)+\frac{5+3\nu_1}{10(1+\nu_1)}\bar{\lambda}^2h^2\right]\frac{1}{\bar{\lambda}a}\bar{R}_1J_0'(\bar{\lambda}a) \tag{7.30}$$

于是，把(7.30)式代入(7.29)，我们得$w(r)$：

$$w(r)=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)^2+\frac{11}{336}(1+\nu_1)\frac{qa^2}{D}(a^2-r^2)\frac{h^2}{a^2}+\left[105(1-\nu_1^2)+\frac{1}{4}(5+3\nu_1)\lambda^2h^2\right]\frac{qa^2}{D\lambda^2(\bar{\lambda}^2-\lambda^2)h^4}\left[\frac{1}{2}(a^2-r^2)+\frac{a}{\lambda}\frac{J_0(\lambda a)-J_0(\lambda r)}{J_0'(\lambda a)}\right]\frac{h^2}{a^2}+\left[105(1-\nu_1^2)+\frac{1}{4}(5+3\nu_1)\bar{\lambda}^2h^2\right]\frac{qa^2}{D\bar{\lambda}^2(\lambda^2-\bar{\lambda}^2)h^4}\left[\frac{1}{2}(a^2-r^2)+\frac{a}{\bar{\lambda}}\frac{J_0(\bar{\lambda}a)-J_0(\bar{\lambda}r)}{J_0'(\bar{\lambda}a)}\right]\frac{h^2}{a^2} \tag{7.31}$$

从(7.20)和(7.21)在利用了(7.25a,b,c)之后，可以写成

$$S_0(r)=-\frac{1}{4}(1+\nu_1)\frac{qr}{D}+\frac{5}{2}(1+\nu_1)\frac{qa}{D}\frac{1}{h^2(\bar{\lambda}^2-\lambda^2)}\left[\frac{J_0'(\lambda r)}{J_0'(\lambda a)}-\frac{J_0'(\bar{\lambda}r)}{J_0'(\bar{\lambda}a)}\right] \tag{7.32}$$

$$A_1(r)=-\frac{1}{4}\nu_1\frac{q}{D}(a^2-r^2)+\frac{1}{2}\frac{qa}{D}\left\{\frac{\lambda}{\bar{\lambda}^2-\lambda^2}\left[\frac{J_0(\lambda r)-J_0(\lambda a)}{J_0'(\lambda a)}\right]+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda^2-\bar{\lambda}^2}\left[\frac{J_0(\bar{\lambda}r)-J_0(\bar{\lambda}a)}{J_0'(\bar{\lambda}a)}\right]\right\} \tag{7.33}$$

(7.31)，(7.32)，(7.33)为本问题的解析解.

八、u(r)，A₀(r)，S₁(r)的解析解

引进$\Omega_1(r)$，$\psi(r)$，

$$S_1=\frac{d\Omega_1}{dr},\quad u=\frac{d\psi}{dr} \tag{8.1}$$

于是，除(6.9)仍用原式外，(6.7)，(6.8)式各式积分一次：

$$\nabla^2\psi+\nu_1A_0-\frac{1}{24}h^2\nabla^2A_0+\frac{7}{480}h^4\nabla^2\Omega_1=C_4 \tag{8.2}$$

$$\nabla^2\psi+\nu_1A_0-\frac{1}{392}h^2\nabla^2A_0-\frac{8}{49}h^2(1-\nu_1)\Omega_1+\frac{107}{4704}h^4\nabla^2\Omega_1=C_5 \tag{8.3}$$

$$\nu_1\nabla^2\psi+A_0-\frac{h^2}{24}[\nabla^2\nabla^2\psi+2\nu_1\nabla^2A_0]+h^4\left[\frac{1}{320}\nabla^2\nabla^2A_0+\frac{7}{480}\nabla^2\Omega_1\right]$$
$$-\frac{9}{8960}h^6\nabla^2\nabla^2\Omega_1+\frac{qh^2}{24D}=0 \tag{8.4}$$

其中C_4，C_5为待定的积分变量.(8.2)，(8.3)相减，得

$$\nabla^2A_0=\frac{96}{23}(1-\nu_1)\Omega_1-\frac{24}{115}h^2\nabla^2\Omega_1-\frac{588}{23}(C_4-C_5)\frac{1}{h^2} \tag{8.5}$$

把(8.5)式代入(8.2)或(8.3)式，求得用$\Omega_1(r)$表达的$\nabla^2\psi+\nu_1A_0$：

$$\nabla^2\psi+\nu_1A_0=-\frac{3}{46}C_4+\frac{49}{46}C_5+\frac{4}{23}(1-\nu_1)h^2\Omega_1-\frac{357}{11040}h^4\nabla^2\Omega_1 \tag{8.6}$$

把上式中的$\nabla^2\psi$代入(8.4)中的$\nabla^2\nabla^2\psi$项，得

$$\nu_1\nabla^2\psi+A_0=-\frac{qh^2}{24D_1}+\frac{\nu_1}{24}h^2\nabla^2A_0-\frac{1}{320}h^4\nabla^2\nabla^2A_0$$
$$+\frac{1}{138}\left[(1-\nu_1)-\frac{161}{80}\right]h^4\nabla^2\Omega_1+\frac{1}{28980}h^6\nabla^2\nabla^2\Omega_1 \tag{8.7}$$

把(8.5)式的∇^2A_0表达式代入(8.7)式，得

$$\nu_1\nabla^2\psi+A_0=-\frac{qh^2}{24D_1}-\frac{49}{46}\nu_1(C_4-C_5)+\frac{4}{23}\nu_1(1-\nu_1)h^2\Omega_1$$
$$-\frac{1}{735}\left(1+\frac{32}{15}\nu_1\right)h^4\nabla^2\Omega_1+\frac{199}{289800}h^6\nabla^2\nabla^2\Omega_1 \tag{8.8}$$

从(7.6)，(7.8)中求解$\nabla^2\psi$和A_0，得用Ω_1表示的$\nabla^2\psi$和A_0.

$$\nabla^2\psi=\nu_1\frac{qh^2}{24D}-\left(\frac{49}{46}-\frac{1}{1-\nu_1^2}\right)C_4+\frac{49}{46}C_5+\frac{4}{23}(1-\nu_1)h^2\Omega_1$$
$$+\left[-\frac{357}{11040}+\frac{1}{735}\nu_1+\frac{32}{11025}\nu_1^2\right]\frac{1}{1-\nu_1^2}h^4\nabla^2\Omega_1$$
$$-\frac{199}{289800}\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}h^6\nabla^2\nabla^2\Omega_1 \tag{8.9}$$

$$A_0=-\frac{qh^2}{24D}-\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_4+\left[\frac{357}{11040}\nu_1-\frac{1}{735}\left(1+\frac{32}{15}\nu_1\right)\right]\frac{1}{1-\nu_1^2}h^4\nabla^2\Omega_1$$

$$+\frac{199}{289800}\frac{1}{1-\nu_1^2}h^6\nabla^2\nabla^2\Omega_1 \tag{8.10}$$

把(8.10)中的A_0代入(8.5)式，整理后得决定Ω_1的微分方程

$$h^6\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Omega_1+\left[\frac{238843}{5572}\nu_1-\frac{2760}{1393}\right]h^4\nabla^2\nabla^2\Omega_1+\frac{60480}{199}(1-\nu_1^2)h^2\nabla^2\Omega_1$$

$$-\frac{1209600}{199}(1-\nu_1)(1-\nu_1^2)\Omega_1=-\frac{9408800}{199}(1-\nu_1^2)(C_4-C_5)\frac{1}{h^2} \tag{8.11}$$

设上式的齐次方程的特解取下述形式

$$\Omega_1^*=PJ_0(\beta r) \tag{8.12}$$

其中P,β为待定常数。$J_0(\beta r)$满足贝塞耳方程

$$\nabla^2J_0(\beta r)=-\beta^2J_0(\beta r) \tag{8.13}$$

把(8.12)中的Ω_1^*表达式代入(8.11)的齐次式，得决定βh值的特征值方程：

$$h^6\beta^6-\left[\frac{238843}{5572}\nu_1-\frac{2760}{1393}\right]h^4\beta^4+\frac{60480}{199}(1-\nu_1^2)h^2\beta^2$$

$$+\frac{1209600}{199}(1-\nu_1)(1-\nu_1^2)=0 \tag{8.14}$$

表1给出了在$0.25\leqslant\nu\leqslant0.35$中的$\beta h$的根$\beta_k h$值，其中$\pm\beta_2 h$和$\pm\beta_3 h$是共轭的复根。

表1　　不同ν值时的$\beta_k h$值

ν	ν_1	$\pm\beta_1 h$	$\pm\beta_2 h$, $\pm\beta_3 h=\pm\bar{\beta}_2 h$
0.250	0.3333	3.5969	$2.8596\pm2.9170i$
0.275	0.3793	3.6269	$2.8484\pm2.7489i$
0.300	0.4286	3.6784	$2.8197\pm2.5546i$
0.325	0.4815	3.7694	$2.7634\pm2.3274i$
0.350	0.5385	3.9320	$2.6605\pm2.0652i$

于是，$\Omega_1(r)$的一般解可以写成

$$\Omega_1(r)=\frac{49}{8(1-\nu_1)}(C_4-C_5)\frac{1}{h^2}+\sum_{k=1}^{3}P_kJ_0(\beta_k r) \tag{8.15}$$

其中P_1为实数，$P_2,P_3=\bar{P}_2$为共轭复数；$\beta_1 h$是实数；$\beta_2 h$和$\beta_3 h=\bar{\beta}_2 h$是共轭复数。

把(8.15)代入(8.9)和(8.10)，得

$$A_0(r)=-\frac{qh^2}{24D}-\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_4+\sum_{k=1}^{3}P_kg_1(\beta_k h)J_0(\beta_k r)h^2 \tag{8.16}$$

$$\nabla^2\psi=-\nu_1\frac{qh^2}{24D}+\frac{1}{1-\nu_1^2}C_4+\sum_{k=1}^{3}P_kg_2(\beta_k h)J_0(\beta_k r)h^2 \tag{8.17}$$

这里的$g_1(\beta_k h)$，$g_2(\beta_k h)$为

$$g_1(\beta_k h)=\frac{199}{289800(1-\nu_1^2)}h^4\beta_k^4-\left[\frac{357}{11040}\nu_1-\frac{1}{735}-\frac{32\nu_1^2}{11025}\right]\frac{1}{1-\nu_1^2}h^2\beta_k^2 \tag{8.18}$$

$$g_2(\beta_k h)=-\frac{199\nu_1}{289800(1-\nu_1^2)}h^4\beta_k^4+\left[\frac{357}{11040}-\frac{\nu_1}{735}-\frac{32\nu_1^2}{11025}\right]\frac{h^2\beta_k^2}{1-\nu_k^2}+\frac{4}{23}(1-\nu_1) \tag{8.19}$$

(8.17)式还可以积分一次，得

$$\psi=-\nu_1\frac{qh^2}{96D}r^2+\frac{C_4r^2}{4(1-\nu_1^2)}-\sum_{k=1}^{3}P_k\frac{g_2}{\beta_k^2}(\beta_k h)J_0(\beta_k r)h^2+C_6 \tag{8.20}$$

于是，根据定义，我们从(8.15)，(8.20)导出

$$S_1(r)=\frac{d\Omega_1}{dr}=\sum_{k=1}^{3}P_k\beta_k J_0'(\beta_k r) \tag{8.21}$$

$$u(r)=\frac{d\psi}{dr}=-\nu_1\frac{qh^2}{48D}r+\frac{C_4 r}{2(1-\nu_1^2)}-\sum_{k=1}^{3}P_k\frac{g_2}{\beta_k}(\beta_k h)J_0'(\beta_k r)h^2 \tag{8.22}$$

在(8.16)，(8.21)，(8.22)的$A_0(r)$，$S_1(r)$，$u(r)$中只有4个独立的特定常数C_4，P_1，P_2，P_3。我们刚好有4个边界条件(6.10c,d,g,i)。

这些边界条件可以写成：

$$\sum_{k=1}^{3}P_k g_1(\beta_k h)J_0(\beta_k a)=\frac{q}{24D}+\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}C_4\frac{1}{h^2} \tag{8.23}$$

$$\sum_{k=1}^{3}P_k\beta_k g_1(\beta_k h)J_0'(\beta_k a)=0 \tag{8.24}$$

$$\sum_{k=1}^{3}P_k\beta_k J_0'(\beta_k a)=0 \tag{8.25}$$

$$\sum_{k=1}^{3}P_k\frac{1}{\beta_k}g_2(\beta_k h)J_0'(\beta_k a)=-\nu_1\frac{qa}{48D}+\frac{a}{2(1-\nu_1^2)h^2}C_4 \tag{8.26}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}
P_1&=\frac{1+\nu_1^2}{\Delta\beta_1 J_0'(\beta_1 a)}\frac{q}{24D}\{g_1(\beta_2 h)-g_1(\beta_3 h)\}\\
P_2&=-\frac{1+\nu_1^2}{\Delta\beta_2 J_0'(\beta_2 a)}\frac{q}{24D}\{g_1(\beta_3 h)-g_1(\beta_1 h)\}\\
P_3&=\frac{1+\nu_1^2}{\Delta\beta_3 J_0'(\beta_3 a)}\frac{q}{24D}\{g_1(\beta_1 h)-g_1(\beta_2 h)\}\\
C_4&=-\frac{1-\nu_1^2}{\nu_1}\frac{qh^2}{24D}+\frac{1-\nu_1^2}{\nu_1}h^2\sum_{k=1}^{3}P_k g_1(\beta_k h)J_0(\beta_k a)
\end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ g_1(\beta_1 h) & g_1(\beta_2 h) & g_1(\beta_3 h)\\ G(\beta_1 h) & G(\beta_2 h) & G(\beta_3 h)\end{vmatrix} \tag{8.28}$$

$$G(\beta_k h)=\frac{2\nu_1}{\beta_k^2 a}g_2(\beta_k h)-\frac{g_1(\beta_k h)}{\beta_k a}\frac{J_0(\beta_k a)}{J_0'(\beta_k a)} \tag{8.29}$$

最后，从(8.22)，(8.16)，(8.21)，得

$$\left.\begin{aligned} u(r)&=-(1+\nu_1^2)\frac{1}{\nu_1}\frac{qh^2}{48D}r+\sum_{k=1}^{3}P_k\left\{\frac{h^2}{2\nu_1}g_1(\beta_k h)J_0(\beta_k a)r\right.\\ &\qquad\left.-\frac{h^2}{\beta_k}g_2(\beta_k h)J_0'(\beta_k r)\right\}\\ S_1(r)&=\sum_{k=1}^{3}P_k\beta_k J_0'(\beta_k r)\\ A_0(r)&=h^2\sum_{k=1}^{3}P_k g_1(\beta_k h)[J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k a)] \end{aligned}\right\}\tag{8.30}$$

感谢郭平同志校核了本文和前文的所有计算。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性圆薄板在一侧受均载而四周固定的条件下不用Kirchhoff-Love 假设的一级近似理论(Ⅰ)，应用数学和力学，18(1) (1997)，1—17.

[2] G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und Angewandte Math.*(Crülle), 40 (1850), 51—88.

[3] A. E. N. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge (1937).

[4] A. E. McPherson, W. Ramberg and S. Levy, Normal Pressure Tests on Circular Plates with Clamped Edges, NACA Report, (744) (1943).

The First-Order Approximation of Non-Kirchhoff-Love Theory for Elastic Circular Plate with Fixed Boundary under Uniform Surface Loading(Ⅱ)

Chien Weizang

(Shanghai Universty, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, *P. R. China)*

Abstract

Based upon the differential equations and their related boundary conditions given in the previour paper [1], this paper finds the analytical solution of non-Kirchhoff-Love theory for elastic circular plate with fixed boundary conditions under unifom surface loading. However, for the sake of saving computational work, the first order approximation theory can be further simplified on more rational bases.

Key words elasticity, circular plate, Kirchhoff-Love assumptions, generalized variational principle