应用数学和力学，第18卷 第2期（1997年2月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

广义拟似变分不等式解的存在性*

丁协平[1]

（1995年11月10日收到）

摘 要

本文在 Hausdorff 拓扑矢量空间的仿紧设置下对一类具有间断映象的广义拟似变分不等式证明了解的存在性定理。这些定理统一、改进和推广了广义拟变分不等式的许多最近结果。

关键词 拓扑矢量空间 广义拟似变分不等式 0-对角凹 0-对角凹关系

一、引 言

设E和F是具有相同标量域Φ（或实数域或复数域）的拓扑矢量空间，X 是 E 的非空子集和$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$F\times E\to\Phi$是双线性泛函。设$f:X\to F$是单值映象和$T:X\to 2^F$是集值映象其中$2^F$表$F$的一切子集的族。古典变分不等式问题VI$(f,X)$是：寻求$\hat{x}\in X$使得

$$\mathrm{Re}\langle f(\hat{x}),\ \hat{x}-y\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.1}$$

广义变分不等式问题GVI$(T,\ X)$是：寻求$\hat{x}\in X$和$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\mathrm{Re}\langle \hat{w},\ \hat{x}-y\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.2}$$

由于变分不等式理论在纯粹和应用科学的许多不同领域内有广泛应用，因此近年来VI(f,X)和 GVI(T,X) 已分别在有限维和无限维空间内被广泛研究和在各个不同的方向上被推广，例如见文献[1～5]和其中的参考文献。

如果再设$g:X\to E$是一单值映象，隐变分不等式问题IVI(f,g,X) 是：寻求 $\hat{x}\in X$ 使得$g(\hat{x})\in X$和

$$\mathrm{Re}\langle f(\hat{x}),\ g(\hat{x})-g(y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.3}$$

当$E=F=H$是 Hilbert 空间，$g(X)=X$时，Noor[6~8]在研究奇阶障碍问题时引入了上述IVI(f,g,X)。Yao[9,10]和Yao-Guo[11]也分别在有限维空间和Banach 空间内和在不同假设下得到了IVI(f,g,X)解的存在性结果。

广义隐变分不等式问题GIVI(T,g,X)是：寻求$\hat{x}\in X$和$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\mathrm{Re}\langle \hat{w},g(\hat{x})-g(y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.4}$$

Ding-Tarafdar[12] 和丁协平[13~15]在 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间内研究了比上述GIVI(T,g,X)更为一般的广义隐变分不等式问题GNVIP(T,g,b,X)。

* 国家自然科学基金资助项目
1 四川师范大学数学系，成都 610066

如果又设$\eta: X\times X\to E$是一单值映象，似变分不等式问题VLI(f,η,X)是：寻求$\hat{x}\in X$使得

$$\mathrm{Re}\langle f(\hat{x}),\ \eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.5}$$

当$E=F=\boldsymbol{R}^n$时，Parida-Sahoo-Kumar[16]引入和研究了上述VLI(f,η,X)和数学规划问题之间的联系，证明了某些存在性定理。Dien[17]和Siddiqi-Khaliq-Ansari[18]分别在有限维空间和拓扑矢量空间内研究了上述VLI(f,η,X)解的存在性.

广义似变分不等式问题GVLI(I,η,X)是：寻求$\hat{x}\in X$和$\hat{w}\in T(\hat{x})$ 使得

$$\mathrm{Re}\langle \hat{w},\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in X \tag{1.6}$$

如果还假设$S: X\to 2^X$，则拟似变分不等式问题 QVLI(f,S,η,X) 是：寻求$\hat{x}\in X$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和

$$\mathrm{Re}\langle f(\hat{x}),\ \eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x}) \tag{1.7}$$

广义拟似变分不等式问题GQLVI(T,S,η,X)是：寻求 $(\hat{x},\hat{w})\in X\times F$ 使得 $\hat{x}\in S(\hat{x})$，$\hat{w}\in T(\hat{x})$和

$$\mathrm{Re}\langle \hat{w},\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x}) \tag{1.8}$$

显然如果$S(x)=X$，$\forall x\in X$，则问题(1.7)和(1.8)分别化归问题 (1.5) 和 (1.6)；如果再设$\forall(x,y)\in X\times X,\eta(x,y)=g(x)-g(y)$，则问题(1.5)和(1.6)又分别化归问题(1.3)和(1.4)。容易看出问题(1.1)～(1.7)都是问题(1.8)的特殊情形.

在已知的各类变分不等式的存在性定理中，通常都假设所涉及的映象是连续的和定义域是紧凸集.

本文目的是利用作者[19]的关于一类广义拟变分不等式解的存在性定理，对具有非单调间断映象的GQVLI(I,S,η,X)的解证明几个存在性定理。作为特例，可得到广义拟变分不等式的许多最近结果的统一、改进和推广.

二、预 备 知 识

设X是拓扑空间E的非空集，2^X表X的一切子集的族．称实值函数 $g: X\to\boldsymbol{R}$ 在X上是下半连续的(l.s.c.)如果对任何$\alpha\in\boldsymbol{R}$，$\{x\in X: g(x)\leqslant\alpha\}$是闭集；称$g$在$X$ 上是上半连续的 (u.s.c.)如果$-g$在X上是l.s.c.．设X和Y是拓扑空间和$T: X\to 2^Y$是集值映象，称T在$x\in X$是上连续的如果序列$\{x_n\}$收敛于x和序列$\{y_n\}$收敛于y满足$y_n\in T(x_n)$，则$y\in T(x)$；称T 在 $x\in X$是下连续的如果对任何收敛于x的序列$\{x_n\}$和对任何$y\in T(x)$，存在一收敛于y的序列 $\{y_n\}$ 满足$y_n\in T(x_n)$对一切n成立；称T在X上是上连续（下连续）的如果T在X 的每一点 $x\in X$ 是上连续（下连续）的；称T在X上连续如果T在X上既上连续又下连续。称T在$x\in X$的邻近是一致紧的如果存在x的邻域V使得$T(V)=\bigcup_{x\in V}T(x)$在$Y$中是相对紧的，即$T(V)$的闭包$\overline{T(V)}$ 是Y的紧子集．显然如果T在点$x\in X$上连续和在x的邻近一致紧，则$T(x)$是Y的紧子集．称T在X上一致紧如果对每一$x\in X$，T在x的邻近一致紧．上述概念由Hogan[20]引入．称集Gr$(T)=\{(x,y)\in X\times Y: y\in T(x)\}$为集值映象$T$的图，由定义易知，$T$在$X$上是上连续的充要条件是$T$有闭图，即Gr$(T)$是$X\times Y$的闭子集．称$T$在$X$上是$s$-上半连续（$s$-下半连续）的如果对$Y$的每一开子集$U$，$\{x\in X: T(x)\subset U\}$ （$\{x\in X: T(x)\cap U\neq\phi\}$）是$X$的开子集：$T$ 的上连续性和s-上半连续性是不同的概念．由Aubin-Ekeland[1,p.110]的命题3.1.7，每一具有闭值的 s-

上半连续集值映象$T:X\to 2^Y$在X上是上连续的；反之由Aubin-Ekeland[1,p.111]的系3.1.9，如果Y是紧空间，每一在X上上连续的集值映象T是s-上半连续的。

令X是拓扑空间，F是一拓扑矢量空间和F^*是F的拓扑对偶空间。称映象$T:X\to 2^F$在X上是h-上半连续的如果对每一$p\in F^*$和任何$\lambda\in \boldsymbol{R}$，$\{x\in X:\sup\limits_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle p,\ u\rangle<\lambda\}$ 是开集（见Aubin-Ekeland[1,p.121]）。

每一s-上半连续集值映象是h-上半连续的，其逆一般不真（见Shih-Tan[21]）。

令X是拓扑矢量空间的非空凸子集，称泛函$\varphi(x,y):X\times X\to\boldsymbol{R}\cup\{\pm\infty\}$关于$y$是0-对角凹的(0-DCV)，如果对任何有限集$\{x_1,\cdots,x_m\}\subset X$和对任何$y_0=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$，$\lambda_i\geqslant 0$和$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi(y_0,\ x_i)\leqslant 0$$

令$\varphi(x,\ x)\leqslant 0$，$\forall x\in X$。显然如果对每一固定的$x\in X$，$y\mapsto\varphi(x,\ y)$是凹函数，则$\varphi(x,\ y)$关于$y$是0-DCV，其逆一般不真（见Zhou-Chen[22]）。

设E，F是域Φ上的拓扑矢量空间，X是E的非空凸子集和$\langle\cdot,\cdot\rangle:F\times E\to\Phi$ 是双线性泛函。设$T:X\to 2^F$ 和 $\eta:X\times X\to E$。称T和η有0-对角凹关系（0-DCVR）如果由下式定义的泛函$\varphi(x,y):X\times X\to\boldsymbol{R}\cup\{\pm\infty\}$关于$y$是0-DCV：

$$\varphi(x,y)=\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ \eta(x,y)\rangle$$

引理2.1 设$T:X\to 2^F$和$\eta:X\times X\to E$使得对每一$x\in X$，$\inf\limits_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ \eta(x,\ x)\rangle\leqslant 0$ 和对每一$(x,w)\in X\times F$，$\mathrm{Re}\langle w,\ \eta(x,\cdot)\rangle$是凹函数，则$T$和$\eta$有0-DCVR。

证明 对任何有限集$\{x_1,\cdots,x_m\}\subset X$和任何$y_0=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，我们有

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi(y_0,\ x_i)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\inf_{w\in T(y_0)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(y_0,x_i)\rangle$$

$$\leqslant\inf_{w\in T(y_0)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathrm{Re}\langle w,\eta(y_0,\ x_i)\rangle$$

$$\leqslant\inf_{w\in T(y_0)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(y_0,y_0)\rangle\leqslant 0$$

即T和η有0-DCVR。

注2.1 如果$\eta(x,y)=x-y$，$\forall x$，$y\in X$，则对任何$T:X\to 2^F$，引理2.1的一切条件被满足，从而T和η有0-DCVR。

下面结果是丁协平[19]的定理2.1的变形。

引理2.2 设E是Hausdorff拓扑矢量空间，它的拓扑对偶空间E^*分离E的点，X是 E的非空仿紧凸子集。假设

(1) $S:X\to 2^X$有非空紧凸值和对每一$p\in E^*$，

$$\{x\in X:\mathrm{Re}\langle p,x\rangle\leqslant\sup_{y\in S(x)}\mathrm{Re}\langle p,y\rangle\}$$

是X的闭子集；

(2) $\varphi: X\times X\to \boldsymbol{R}$使得对每一$y\in X$，$x\mapsto\varphi(x,y)$在$X$的每一紧子集上下半连续；

(3) $\varphi(x,y)$关于y是0-DCV；

(4) 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，存在$y\in \mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap S(x)$满足$\varphi(x,y)>0$；

(5) $\Sigma=\{x\in X: \sup\limits_{y\in S(x)}\varphi(x,y)>0\}$是$X$的开子集，则存在$\hat{x}\in K$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和

$$\varphi(\hat{x},y)\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

证明 分析丁协平[19]的定理2.1的证明，假设S是h-上半连续的仅用于得到对每一$p\in E^*$，

$$V(p)=\{x\in X: \mathrm{Re}\langle p,x\rangle-\sup_{y\in S(x)}\mathrm{Re}\langle p,y\rangle>0\}$$

是X的开子集．然而这一条件可由假设(1)得到．因此由丁协平[19]的定理2.1的证明知引理2.2的结论成立．

我们还需要Kneser[23]的极小极大定理．

引理2.3 设X是矢量空间的非空凸子集和Y是Hausdorff拓扑矢量空间的非空紧凸子集．假设$f: X\times Y\to\boldsymbol{R}$使得对每一$x\in X$，$y\mapsto f(x,y)$是下半连续凸函数和对每一$y\in Y$，$x\mapsto f(x,y)$是凹函数．则有

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)=\sup_{x\in X}\min_{y\in Y}f(x,y)$$

三、GQVLI(T,S,η,X)解的存在性

在本节中，我们将对具有非单调间断映象的GQVLI(T,S,η,X)证明某些解的存在性定理．

定理3.1 设E是域Φ上的Hausdorff拓扑矢量空间，E的拓扑对偶空间E^*分离E的点，X是E的非空仿紧凸子集，F是域Φ上的拓扑矢量空间和$\langle\cdot,\cdot\rangle: F\times E\to\Phi$是双线性泛函．假设$T: X\to 2^F$，$S: X\to 2^X$和$\eta: X\times X\to E$满足

(1) 对每一固定的$y\in X$，函数

$$x\mapsto\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle$$

在X的每一紧子集上是下半连续的；

(2) S有非空紧凸值和对每一固定的$p\in E^*$，

$$\{x\in X: \mathrm{Re}\langle p,x\rangle\leqslant\sup_{y\in S(x)}\mathrm{Re}\langle p,y\rangle\}$$

是X的闭子集；

(3) T和η有0-DCVR；

(4) 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，存在$y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap S(x)$满足$\inf\limits_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle>0$；

(5) $\Sigma'=\{x\in X: \sup\limits_{y\in S(x)}\inf\limits_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle\leqslant 0\}$

是X的闭子集．

则存在$\hat{x}\in K$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和

$$\inf_{w\in T(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad\forall y\in S(\hat{x})$$

如果进一步假设$T(\hat{x})$是紧凸集，$\langle\cdot,\cdot\rangle:F\times E\to\Phi$连续和对每一$w\in F$，$\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},\cdot)\rangle$是凹函数，则存在$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\mathrm{Re}\langle\hat{w},\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

证明 定义泛函$\varphi:X\times X\to\boldsymbol{R}$如下：

$$\varphi(x,y)=\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle,\qquad \forall(x,y)\in X\times X$$

由(1)，对每一$y\in X$，$x\mapsto\varphi(x,y)$在X的每一紧子集上是下半连续的和由(3)，$\varphi(x,y)$关于y是0-DCV。因此引理2.1的一切条件被满足。从而存在$\hat{x}\in K$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和$\varphi(\hat{x},y)\leqslant 0$，$\forall y\in S(\hat{x})$，即有

$$\inf_{w\in T(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})\tag{3.1}$$

现在定义函数$f:S(\hat{x})\times T(\hat{x})\to\boldsymbol{R}$如下：

$$f(y,w)=\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle,\qquad \forall(y,w)\in S(\hat{x})\times T(\hat{x})$$

由假设对一$y\in S(\hat{x})$，$w\mapsto f(y,w)$是连续线性的和对每一$w\in T(\hat{x})$，$y\mapsto f(y,w)$是凹函数，由引理2.3推得

$$\min_{w\in T(\hat{x})}\sup_{y\in S(\hat{x})}f(y,w)=\sup_{y\in S(\hat{x})}\min_{w\in T(\hat{x})}f(y,w)$$

因此由(3.1)式，有

$$\min_{w\in T(\hat{x})}\sup_{y\in S(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0$$

因为函数$w\mapsto\sup\limits_{y\in S(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle$在$T(\hat{x})$上下半连续和$T(\hat{x})$是紧集，存在$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\sup_{y\in S(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle\hat{w},\eta(\hat{x},y)\rangle=\min_{w\in T(\hat{x})}\sup_{y\in S(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w,\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0$$

即有

$$\mathrm{Re}\langle\hat{w},\eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

所以$(\hat{x},\hat{w})$是GQVLI(T,S,η,X)的一解。

注3.1 如果X是紧凸集，则条件(4)被平凡满足和如果$\eta(x,y)=x-y$，$\forall(x,y)\in X\times X$则由引理2.2和注2.1，条件(3)被平凡满足。因此定理3.1在下列几方面推广了Yao[24]的定理3.3：(1) 从广义拟变分不等式推广到广义拟似变分不等式；(2) 把映象的定义域X从紧凸集推广到仿紧凸集；(3) 从有限维空间$\boldsymbol{R}^n$推广到无限维拓扑矢量空间E和F。

注3.2 在定理3.1中对集值映象T，S和点值映象$\eta:X\times X\to E$没有连续性假设。下面例子说明存在间断映象T和η满足定理3.1的条件(1)和(3)。

例 令$E=F=\boldsymbol{R}$，$X=[0,\ 1]$，$T:[0,\ 1]\to 2^{\boldsymbol{R}}$和$\eta:[0,\ 1]\times[0,\ 1]\to\boldsymbol{R}$定义如下：

$$T(x)=\begin{cases}[2,\ 3], & \text{如果 } x=0\\ \{1\}, & \text{如果 } 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

$$\eta(x,\ y)=\begin{cases}-2y, & \text{如果 } x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x^2-y, & \text{如果 } 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

则对每一$y\in[0,\ 1]$，我们有

$$\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle=\begin{cases}-6y, & \text{如果 } x=0\\ x^2-y, & \text{如果 } 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

容易验证对每一固定的$y\in X$，$x\mapsto\inf\limits_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ \eta(x,\ y)\rangle$是下半连续的。注意到对每一固定

的$x\in[0, 1]$，$\varphi(x, y)=\inf\limits_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x, y)\rangle$是$y$的凹函数和$\varphi(x, x)\leqslant 0$，$\varphi(x, y)$关于$y$是0-DCV且因此$T$和$\eta$有0-DCVR。定理3.1的条件(1)和(3)被满足。但T和η都不是连续的。

系3.1 设E，F，Φ，X，$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$T$，$S$，$\eta$与定理3.1中相同且满足定理3.1中的条件(1)～(3)和(5)，条(4)由下面条件代替：

(4)′ 存在X的非空子集D使得对每一$x\in X\backslash D$存在$y\in D\cap S(x)$满足

$$\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x, y)\rangle>0$$

和D含于X的一紧凸子集X_0内。

则存在$\hat{x}\in D$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和

$$\inf_{w\in T(\hat{x})}\mathrm{Re}\langle w, \eta(\hat{x}, y)\rangle\leqslant 0, \qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

如果再设$T(\hat{x})$是紧凸集，$\langle\cdot,\cdot\rangle: F\times E\to\Phi$连续和对每一$w\in F$，$y\mapsto\mathrm{Re}\langle w, \eta(\hat{x}, y)\rangle$是凹函数，则存在$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\mathrm{Re}\langle\hat{w}, \eta(\hat{x}, y)\rangle\leqslant 0, \qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

即$(\hat{x}, \hat{w})$是GQVLI(T, S, η, X)的解。

证明 令$K=\bar{D}$，则$K\subset X_0$是X的非空紧子集。由条件(4)′，对每一$x\in X\backslash K=X\backslash\bar{D}\subset X\backslash D$，存在$y\in D\cap S(x)\subset\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap S(x)$使得

$$\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x, y)\rangle>0$$

因此定理3.1的条件(4)被满足。系3.1的结论由定理3.1得到。

引理3.1 设E和F是域Φ上的两个拓扑矢量空间，X是E的非空子集和$\langle\cdot,\cdot\rangle: F\times E\to\Phi$是连续双线性泛函。假设

(1) $T: X\to 2^F$是上连续和一致紧的；

(2) $\eta: X\times E\to E$是连续的；

(3) $S: X\to 2^E$是下连续的。

则函数

$$x\mapsto\sup_{y\in S(x)}\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x, y)\rangle$$

在X上是下半连续的。

证明 定义函数$g: X\to\boldsymbol{R}$如下：

$$g(x)=\sup_{y\in S(x)}\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x, y)\rangle, \qquad \forall x\in X$$

对任意固定的$\alpha\in\boldsymbol{R}$，令$X_\alpha=\{x\in X: g(x)\leqslant\alpha\}$。假设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X_\alpha$且收敛于某$x_0\in X$，则有

$$g(x_n)=\sup_{y\in S(x_n)}\inf_{w\in T(x_n)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x_n, y)\rangle\leqslant\alpha, \qquad \forall n\geqslant 1 \tag{3.2}$$

对每一$y\in S(x_0)$，由条件(3)，存在序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$使得$y_n\to y$和$y_n\in S(x_n)$，$\forall n\geqslant 1$。由条件(1)知每一$T(x_n)$是紧集，因此存在$w_n\in T(x_n)$使得

$$\inf_{w\in T(x_n)}\mathrm{Re}\langle w, \eta(x_n, y_n)\rangle=\mathrm{Re}\langle w_n, \eta(x_n, y_n)\rangle \tag{3.3}$$

又由条件(1)，T在X上是上连续一致紧的，注意到$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{x_0\}$是紧集，从Merrill[25]的定理2.1和定理2.2（也见Yao[24, p.466]）推得$T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{x_0\})$是紧集。因为$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\subset T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{x_0\})$，存在$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$的收敛子序列。不失一般性，我们可假设$w_n\to w_0\in T(x_0)$。由条件(2)，(3.2)和(3.3)式，我们有

$$\begin{aligned}\inf_{w\in T(x_0)} \operatorname{Re}\langle w,\ \eta(x_0,y)\rangle &\leqslant \operatorname{Re}\langle w_0,\ \eta(x_0,\ y)\rangle\\ &=\liminf_{n\to\infty} \operatorname{Re}\langle w_n,\ \eta(x_n,\ y_n)\rangle\\ &=\liminf_{n\to\infty} \inf_{w\in T(x_n)} \operatorname{Re}\langle w,\ \eta(x_n,\ y_n)\rangle\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in S(x_n)} \inf_{w\in T(x_n)} \operatorname{Re}\langle w,\ \eta(x_n,\ y)\rangle\\ &=\liminf_{n\to\infty} g(x_n)\leqslant\alpha\end{aligned}$$

由$y\in S(x_0)$的任意性，有

$$g(x_0)=\sup_{y\in S(x_0)} \inf_{w\in T(x_0)} \operatorname{Re}\langle w,\ \eta(x_0,\ y)\rangle\leqslant\alpha$$

所以X_α是X的闭子集，从而g在X上是下半连续的。

注3.3 引理3.1推广了Yao[24]的引理3.4到拓扑矢量空间内的更一般的形式且X不必是紧集。

定理3.2 设E是域Φ上的Hausdorff拓扑矢量空间，E^*分离E的点，X是E的非空仿紧凸子集，F是Φ上的拓扑矢量空间和$\langle\cdot,\cdot\rangle$: $F\times E\to\Phi$是连续双线性泛函。假设

(1) $T:X\to 2^F$是上连续一致紧的具有非空凸值；

(2) $S:X\to 2^X$是下连续具有非空紧凸值使得对每一$p\in E^*$,

$$\{x\in X:\operatorname{Re}\langle p,x\rangle\leqslant \sup_{y\in S(x)}\operatorname{Re}\langle p,y\rangle\}$$

是闭集；

(3) $\eta:X\times X\to E$连续使得T和η有0-DCVR；

(4) 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，存在$y\in \mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap S(x)$满足$\inf\limits_{w\in T(x)}\operatorname{Re}\langle w,\ \eta(x,\ y)\rangle>0$。

则存在$\hat{x}\in K$使得$\hat{x}\in S(\hat{x})$和

$$\inf_{w\in T(\hat{x})}\operatorname{Re}\langle w,\ \eta(\hat{x},\ y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

如果再设对每一$w\in F$，$y\mapsto\operatorname{Re}\langle w,\ \eta(\hat{x},y)\rangle$是凹函数，则存在$\hat{w}\in T(\hat{x})$使得

$$\operatorname{Re}\langle\hat{w},\ \eta(\hat{x},y)\rangle\leqslant 0,\qquad \forall y\in S(\hat{x})$$

即$(\hat{x},\hat{w})$是GQVLI(T,S,η,X)的解。

证明 对每一固定的$y\in X$，在引理3.1中，令$S(x)=\{y\}$，$\forall x\in X$，则由(1)，(3)和引理3.1知函数

$$x\mapsto \inf_{w\in T(x)}\operatorname{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle$$

在X上是下半连续的。又由条件(1)、(2)、(3)和引理3.1知，函数

$$x\mapsto \sup_{y\in S(x)}\inf_{w\in T(x)}\operatorname{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle$$

也在X上下半连续，因此

$$\Sigma'=\{x\in X:\ \sup_{y\in S(x)}\inf_{w\in T(x)}\operatorname{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle\leqslant 0\}$$

是X的闭子集。定理3.1的一切条件被满足。定理3.2的结论由定理3.1得到。

如果$E=F=H$是Hilbert空间和$\langle\cdot,\cdot\rangle:H\times H\to\Phi$是内积，则我们有下述结果。

系3.2 设X是Hilbert空间H的仿紧凸子集。假设

(1) $T:X\to 2^H$是上连续一致紧的具有非空凸值；

(2) $S:X\to 2^X$下连续具有非空紧凸值；

(3) $\eta: X\times X\to H$连续使得T和η有0-DCVR;

(4) 存在X的非空紧凸集X_0和非空紧子集K使得对每一$x\in X\backslash K$，存在$y\in \mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\cap S(x)$满足 $\inf\limits_{w\in T(x)} \mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle>0$;

(5) 对每一$(w,x)\in H\times X$，$y\mapsto \mathrm{Re}\langle w,\eta(x,y)\rangle$是凹函数.

则GQVLI(T,S,η,X)有解$\hat{x}\in K$和$\hat{w}\in T(\hat{x})$.

证明 在引理3.1中，令$E=F=H$和$\langle\cdot,\cdot\rangle$表$H$中的内积，对每一$p\in H^*=H$，令 $S(x)=\{p\}$ $\forall x\in X$和对一切$(x,y)\in X\times H$，令$\eta(x,y)=-y$. 则由引理3.1知对每一$p\in H$，函数

$$x\mapsto \sup_{y\in T(x)} \mathrm{Re}\langle p,y\rangle$$

在X上是上半连续的且因此函数

$$x\mapsto \mathrm{Re}\langle p,x\rangle-\sup_{y\in T(x)} \mathrm{Re}\langle p,y\rangle$$

在X上是下半连续的. 由此推得对每一$p\in H^*=H$,

$$\{x\in X:\mathrm{Re}\langle p,x\rangle\leqslant \sup_{y\in T(x)} \mathrm{Re}\langle p,y\rangle\}$$

是X的闭子集. 系3.2的结论由定理3.2推得.

注3.4 如果$\eta(x,y)=x-y$, $\forall x, y\in X$, 则定理3.2和系3.2的条件(3)被平凡满足. 如果X是紧凸集，则定理3.2和系3.2的条件(4)也被平凡满足. 因此定理3.2和系3.2从几方面推广了 Yao[84]的系3.5和Harker-Pang[5]的定理6.1.

参 考 文 献

[1] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons, New York (1984).

[2] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities*, John Wiley & Sons, New York (1984).

[3] D. Kinderlehrer and G. Stampacchi, *An Introduction to Variational Inequalities*, Acad. Press, New York (1980).

[4] D. Chan and J. S. Pang, The generalized quasi-variational inequalities, *Math. Oper. Res.*, 7 (1982), 211—222.

[5] P. T. Harker and J. S. Pang, Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications, *Math. Program, Ser. B*, **48** (1990), 161—220.

[6] M. A. Noor, General variational inequalities, *Appl. Math. Lett.*, **1** (1988), 119—122.

[7] M. A. Noor, General algorithm and sensitivity for variational inequalities, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 5 (1992), 29—42.

[8] M. A. Noor, K. I. Noor and T. M. Rassias, Some aspects of variational inequalities, *J. Comput. Appl. Math.*, **47** (1993), 285—312.

[9] J. C. Yao, General variational inequalities in Banach spaces, *Appl. Math. Lett.*, **5**(1) (1992), 51—54.

[10] J. C. Yao, On the general variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **174** (1993), 550—555.

[11] J. C. Yao and J. S. Guo, Variational and generalized variational inequalities with discontinuous mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **182** (1994), 371—392.

[12] X. P. Ding and E. Tarafdar, Generalized nonlinear variational inequalities with non-monotone set-valued mappings, *Appl. Math. Lett.*, 7(4) (1994), 5—11.

[13] 丁协平，一类广义变分不等式及应用，四川师范大学学报，17(6) (1994), 10—16.

[14] 丁协平，一类广义变分不等式解的存在性，烟台大学学报，2 (1995), 15—22.

[15] 丁协平，具有间断映象的隐变分不等式，四川师范大学学报，18(2) (1995), 8—15.

[16] J. Parida, M. Sahoo and A. Kumar, A variational-like inequality problem, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 39 (1989), 225—231.

[17] N. H. Dien, Some remarks on variational-like inequalities, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 46 (1992), 335—342.

[18] A. H. Siddiqi, A. Khaliq and Q. H. Ansari, On variational-like inequalities, *Ann. Sci. Québec*, 18(1) (1994), 95—104.

[19] 丁协平，拟变分不等式和社会平衡，应用数学和力学，12(7) (1991), 599—606.

[20] W. W. Hogan, Point-to-set maps in mathematical programming, *SIAM Rev.*, 15 (1973), 591—603.

[21] M. H. Shih and K. K. Tan, Covering theorems of convex sets related fixed pint theorems, in *Nonlinear and Convex Analysis*, Marcel Dekker Inc.,New York (1987), 235—244.

[22] J. X. Zhou and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), 213—225.

[23] H. Kneser, Sur un théoème fondamantal de la théorie des jeux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234 (1952), 2418—2420.

[24] J. C. Yao, Generalized-quasi-variational inequality problems with discontinuous mappings, *Math. Opera. Res.*, 20(2) (1995), 465—478.

[25] O. H. Merrill, Applications and extensions of an algorithm that computes fixed points of certain upper semi-continuous point-to-set mappings, Ph. D. Thesis, Univ. of Michigan, Ann Arbor, MI. (1972).

Existence of Solutions for Generalized Quasi-Variational-Like Inequalities

Ding Xieping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610066, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, some existence theorems of solutions for a class of generalized quasi-variational-like inequalities with discontinuous mappings are proved under paracompact setting in topological vector spaces. These theorems unify, improve and generalize many recent results.

Key words topological vector space, generalized quasi-variational-like inequality, 0-diagonally concave, 0-diagonally concave relation